Η σύγκλιση της υπεραρμονικής σειράς.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι $\forall p>1$ η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ συγκλίνει.

Αρκεί να δειχθεί ότι η $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ συγκλίνει (γιατί;).

Για το παραπάνω αρκεί να δειχθεί ότι η ΑΜΑ

(αρκεί να την προσδιορίσουμε για $n \geq 1$ - γιατί;)

$\left(\cdot, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}, \dots\right)$ είναι φραγμένη - γιατί;

Οι όροι της υπόψη να επιλεγούν θετικοί. Επομένως αρκεί $\forall n \geq 1$ να υπάρχει $\gamma_n > 0$, με $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \gamma_n$

και η (γ_n) να είναι φραγμένη - γιατί; Προκειμένου για την επιλογή των γ_n παρατηρούμε ότι

$$\forall i \geq 1, \quad (*) \quad \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx \geq \int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p}\,dx \quad (\text{γιατί;})$$

και ότι $\int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p}\,dx = \frac{1}{(i+1)^p}\int_i^{i+1} dx = \frac{1}{(i+1)^p}$. Επομένως $\forall n \geq 1$,

αθροίζοντας κατά μέλη τις $(*)$, από $i=1$ έως n

έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}$ ενώ

$$\sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\, x^{1-p}\Big|_1^{n+1} = \frac{1}{1-p}\left[(n+1)^{1-p}-1\right]$$

$= \frac{1}{p-1}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$. Συνεπώς επιλέγουμε ως

$\gamma_n := \frac{1}{p-1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$. Επειδή $p-1>0$, $\frac{1}{p-1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^{p}}\right] \to \frac{1}{p-1}$ (γιατί;) και επομένως η (γ_n) είναι φραγμένη (γιατί;).

Το αποτέλεσμα έπεται. $\square$

Παρατήρηση: Από τα παραπάνω θα έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^p} \le \frac{1}{p-1}$ (γιατί;) και επομένως $\zeta(p) := \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^p} \le 1+\frac{1}{p-1}$ (γιατί;).

Π.χ. από την συνάρτηση ζήτα του Riemann έχουμε ότι

$$\zeta(2) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.645 < 1+\frac{1}{2-1} = 2,$$

$$\zeta(3) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^3} \simeq 1.202 < 1+\frac{1}{3-1} = 1.5, \text{ κ.ο.κ. } \square$$