Βασικός Λογισμός Σειρών (συνέχεια)

Ε. [Μονοτονία] Έστω ότι για τις ακολουθίες (x_n) (y_n) οι σειρές $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ και $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ υπάρχουν, καθώς και ότι $x_i \leq y_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Τότε $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_i$.

Απόδειξη. $x_i \leq y_i$ $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i \leq \sum_{i=0}^{n} y_i$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i) \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως η πραγματική ακολουθία $\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)\right)$ αποτελείται από μη θετικούς όρους. Επίσης επειδή οι παραπάνω σειρές υπάρχουν, οι ΑΝΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ και $\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)$ συγκλίνουν οπότε από τις ανάλογες ιδιότητες των σειρών (συμπληρώστε!) και η ΑΝΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)\right)$ θα συγκλίνει στην σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - y_i)$. Επιπλέον επειδή το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας μη αρνητικών όρων δεν μπορεί να είναι θετικό (γιατί; συμπληρώστε!) έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - y_i) \leq 0$ το οποίο, εφαρμόζοντας αντίστροφα τις προαναφερθείσες ιδιότητες των σειρών (συμπληρώστε!) συνεπάγεται ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{\infty} y_i \leq 0$, που είναι το ζητούμενο. □

ΣΤ. [Αλλαγή Μεταβλητής] Έστω ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει και η $f:\mathbb{N}\to A\subseteq\mathbb{N}$ αύξουσα. Το προηγούμενο συνεπάγεται ότι υπάρχει η $f^{-1}: A\to\mathbb{N}$.

Παράδειγμα:

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ με $f(i)=i+1=j$, $i\in\mathbb{N}$. Έχουμε ότι η $f^{-1}(j)=j-1:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$.

(*) Παράδειγμα:

$f:\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$ ($2\mathbb{N}=$ το σύνολο των άρτιων φυσικών) με $f(i)=2i=j$, $i\in\mathbb{N}$ και $f^{-1}(j)=j/2: 2\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

Τότε ισχύει η παρακάτω αλλαγή δείκτη

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i=\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i=\sum_{j\in A} x_{f^{-1}(j)}.$$

Συνέχεια παραδείγματος (*):

Έστω ότι $x_i=\alpha^i$ με $|\alpha|<1$. Συνεπώς $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i=\frac{1}{1-\alpha}$ και έστω $j: f(i)=i+1$. Τότε βάσει της παραπάνω ιδιότητας έχουμε $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i=\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha^i=\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\alpha^{f^{-1}(j)}=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}$.

Αυτό ισχύει αφού i. αν $\alpha=0$ έχουμε $1 = \overset{1}{0^0} + \overset{0}{0^1} + \dots + \overset{=0}{0^n} + \dots$
$= \sum_{i=0}^{\infty} 0^i$, και $\sum_{j=1}^{\infty} 0^{j-1} = 0^0 + 0^1 + \dots + 0^n + \dots = 1$, ενώ ii. αν
$\alpha \neq 0$ έχουμε ότι $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \alpha^j = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j$

$= \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, όπου και εφαρμόσαμε την

ιδιότητα εξαγωγής κοινού παράγοντα "δοκιμα-

σμένη" και ενεργεί έγκυρα αφού κατέληξε

σε υπάρχουσα σειρά. □

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες του παραπάνω βασικού

λογισμού είναι παρεμφερείς με ανάλογες ιδιότητες ολοκλη-
ρωμάτων και αυτό δεν είναι τυχαίο. (Θα μπορούσαμε
μάλιστα να δείξουμε ότι ισχύει και ιδιότητα άθροισης
κατά παράγοντες, χωρίς όμως να την χρησιμοποιήσου-
με στα παρακάτω). □

Η επόμενη άσκηση μας δείχνει ότι ο παραπάνω λο-
γισμός είναι δυνατόν να έχει εφαρμογή για το ερώ-
τημα α. (Θυμηθείτε, αν η δεδομένη σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπά-

ρχει)

Άσκηση. Να δειχθεί ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ υπάρχει.

Λύση. Έχουμε ότι $x_i = \frac{1}{i!} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$. Επομένως εφαρμογής του Λήμματος Ομόσημοι-Όροι αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)$ είναι φραγμένη. Έχουμε ότι

$$\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}} \ \forall i \in \mathbb{N} \ [*]$$

1. για $i=0$ έχουμε $\frac{1}{0!} = 1 < 2 = \frac{1}{2^{-1}}$, οπότε

η $[*]$ ισχύει για $i=0$,

2. έστω ότι ισχύει για $i=j$ οπότε

δίνεται ότι $\frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}}$ και

3. για $i=j+1$ έχουμε $\frac{1}{(j+1)!} = \frac{1}{j!(j+1)}$

και $\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{j-1}2}$ οπότε $\frac{1}{j!(j+1)} \leq \frac{1}{2^{j-1}2}$ (i) και εφαρμόζουμε του ii το (j) θα ισχύει εφόσον

$\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{2}$ το οποίο προφανώς ισχύει $\forall j \geq 1$.

Επομένως οι [*] ισχύουν εφαρμόζοντας της παραπάνω επαγωγής.

Εφόσον λοιπόν $\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

επομένως το ζητούμενο θα ισχύει αν η

ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ είναι φραγμένη (γιατί;) και

το τελευταίο θα ισχύει αν η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}$

υπάρχει (γιατί;). Έχουμε όμως ότι εφαρμόζοντας

τον προηγούμενο λογισμό (συμπληρώστε!) ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i}} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 4$$

(δείτε τις προηγούμενες σημειώσεις). Επομένως η

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ υπάρχει. □

(Μάλιστα είναι δυνατόν να δείξουμε ότι $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

αλλά για αυτό δεν επαρκούν τα παραπάνω!)

Η παραπάνω έκθεση μας δείχνει ταυτόχρονα την ανεπάρκεια τόσο του λογισμού όσο και της γεωμετρικής σειράς για το ερώτημα α. Επισημαίνει και το ενδεχόμενο κατασκευής αλγοριθμικής διαδικασίας η οποία βασίζεται σε συλλογισμούς όπως οι παραπάνω, τους τυποποιεί όμως και έτσι αποφεύγει την ανάγκη της άμεσης επικύρωσής τους. Θα δούμε μία τέτοια διαδικασία που ονομάζεται κριτήριο του Πηλίκου, η εγκυρότητα της οποίας βασίζεται σε συλλογισμούς όπως οι παραπάνω, και είναι σχετικά εύκολη στην εφαρμογή της, ενώ αποφαίνεται για την ύπαρξη ή μη σειράς σε κάποιες περιπτώσεις και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την μελέτη των δυναμοσειρών. Για να είναι εφικτή όμως η μελέτη του παραπάνω, μας χρειάζεται κάποια εξοικείωση της έννοιας της σύγκλισης.

Κατάχρηση Ορολογίας:

Στα παρακάτω και προκειμένου να αποφεύγουμε όποτε είναι δυνατόν την αναφορά σε ακολουθίες μερικών αθροισμάτων κ.ο.κ. για λόγους οικονομίας θα χρησιμοποιούμε την καταχρηστική και λανθασμένη αλλά συνηθισμένη ορολογία "η τάδε σειρά συγκλίνει" αντί της ορθής "η τάδε <u>σειρά</u> υπάρχει επειδή η ακολουθία ΑΜΑ συγκλίνει". Προσοχή παρόλο που η σύγχυση αυτή μεταξύ σειράς και ΑΜΑ μπορεί να είναι βολική, θα πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο εφόσον είναι ευδιάκριτη η διαφορά μεταξύ των δύο αντικειμέ—

και προκειμένου να αποφεύγονται τα λάθη!