Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Ο αναλυτικός ορισμός του ορίου μας επιτρέπει να μελετούμε σχετικά εύκολα ζητήματα όπως οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων.

Λήμμα [Όρια και Πρόσθεση] Έστω $x_n \to \ell_x$ και $y_n \to \ell_y$. Τότε $x_n + y_n \to \ell_x + \ell_y$.

Παρατήρηση: Συνεπώς η πρόσθεση ακολουθιών δεν αλλοιώνει την σύγκλιση.

Απόδειξη. Έχουμε ότι από τον ορισμό της πρόσθεσης $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$. Επίσης εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας (*) $|x_n + y_n - (\ell_x + \ell_y)| = |x_n - \ell_x + y_n - \ell_y| \leq |x_n - \ell_x| + |y_n - \ell_y|$.

Επομένως εφαρμογή της (*), για $\varepsilon > 0$ αν $|x_n - \ell_x| + |y_n - \ell_y| < \varepsilon$ $\Rightarrow |x_n + y_n - (\ell_x + \ell_y)| < \varepsilon$.

Επειδή $x_n \to \ell_x$, τότε $\exists\, n_x(\varepsilon/2) : |x_n - \ell_x| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq n_x(\varepsilon/2)$

όπου ε όπως παραπάνω. Αναλόγως, αφού $y_n \to \ell_y$

$\exists\, n_y(\varepsilon/2) : |y_n - \ell_y| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq n_y(\varepsilon/2)$. Ορίζουμε

$n^*(\varepsilon) := \max\{n_x(\varepsilon/2), n_y(\varepsilon/2)\}$, το οποίο είναι καλώς

ορισμένο. Επομένως $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$

$$\begin{cases} |x_n - \ell_x| < \varepsilon/2 \\ |y_n - \ell_y| < \varepsilon/2 \end{cases}$$ και προσθέτοντας

κατά μέλη έχουμε ότι $|x_n - l_x| + |y_n - l_y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$. Επομένως εξαιτίας της $(*)$ έχουμε ότι

$$\forall n \geq n^*(\varepsilon) \,,\; |x_n + y_n - (l_x + l_y)| < \varepsilon.$$

Το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του ορίου και ότι το $\varepsilon > 0$ επιλέχθηκε αυθαίρετα. □

Λήμμα [Όριο και Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός] Έστω $x_n \to l_x$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\lambda x_n \to \lambda l_x$.

Παρατήρηση. Αναλόγως ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν αλλοιώνει την σύγκλιση.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της πράξης έχουμε ότι $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$. Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda(x_n) = (0)$ που είναι συγκλίνουσα στο 0 ως σταθερή, και $0 = 0 \cdot l_x$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε αν $\varepsilon > 0$ $|\lambda x_n - \lambda l_x| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |\lambda||x_n - l_x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - l_x| < \varepsilon/|\lambda|$ $(**)$. Επειδή $x_n \to l_x$ $\exists\, n_x(\varepsilon/|\lambda|) : |x_n - l_x| < \varepsilon/|\lambda|$ $\forall n \geq n_x(\varepsilon/|\lambda|)$. Θέτοντας $n^*(\varepsilon) := n_x(\varepsilon/|\lambda|)$ έχουμε ότι $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$, $|x_n - l_x| < \varepsilon/|\lambda|$ $\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} |\lambda x_n - \lambda l_x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$. Το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του ορίου και το γεγονός ότι το $\varepsilon > 0$ επιλέχθηκε αυθαίρετα. □

Τέλος ούτε ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ακολουθιών αλλοιώνει την σύγκλιση.

Λήμμα [Όριο και Πολλαπλασιασμός] Έστω και $x_n \to l_x$ και $y_n \to l_y$. Τότε $x_n y_n \to l_x l_y$.

Άσκηση. Αποδείξτε το παραπάνω. Μπορείτε ανάμεσα στα άλλα να χρησιμοποιήσετε την τριγωνική ανισότητα και όσα γνωρίζετε για την σχέση σύγκλισης και φραγής.

Αρχή της Μεταφοράς

Έστω πραγματική ακολουθία (x_n) και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θυμηθείτε ότι και η ακολουθία καθεαυτή είναι συνάρτηση $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ όπου $x_n := g(n)$. Δεδομένων των παραπάνω υπάρχει μοναδικός τρόπος να οριστεί νέα ακολουθία από $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ την σύνθεση δηλ. $f \circ g$. Η νέα ακολουθία, έστω (y_n), έχει ως γενικό όρο τον $y_n := f(x_n) = f(g(n))$. Π.χ. αν $x_n = \frac{1}{n+1}$ και $f(x) = \exp(x)$, τότε $y_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Προκύπτει απευθείας το ερώτημα ποιά ιδιότητα τη f δεν θα αλλοιώνει την σύγκλιση.

Λήμμα [Αρχή της Μεταφοράς] Έστω $x_n \to \ell_x$ και η f συνεχής στο ℓ_x. Τότε $f(x_n) \to f(\ell_x)$.
[χωρίς απόδειξη].

Παρατηρήσεις:

1. Το παραπάνω μας λέει ότι αν η f συνεχής τότε ο μετασχηματισμός της (x_n) μέσω της f δεν αλλοιώνει την σύγκλιση.
2. Πλέον μπορούμε να ερμηνεύουμε τους συμβολισμούς $x \to x_0$ που έχουν συναντηθεί κατά καιρούς "απλώς"

σημαίνουν $\forall (x_n)$, $x_n \to x_0$.

3. Συνδυάζοντας την Αρχή της Μεταφοράς με το 2. και το γεγονός ότι η (x_n) είναι αυθαίρετη και συγκλίνουσα στο l_x, τότε η Αρχή της Μεταφοράς είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα της συνέχειας της f στο l_x.

4. Αν η f είναι ασυνεχής στο l_x θα υπάρχει (x_n) με $x_n \to l_x$ και $f(x_n) \to f(l_x)$ [π.χ. η (l_x)] αλλά σίγουρα θα υπάρχει τουλάχιστον μια (y_n) με $y_n \to l_x$ αλλά $f(y_n) \not\to f(l_x)$.

5. Αν $x_n = \frac{1}{n+1}$ και $f(x) = \exp(x)$, εφαρμογή της συνέχειας του εκθετικού στο 0 και της αρχής της μεταφοράς

$\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) \to \exp(0) = 1$. [Προσπαθήστε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας μόνο τον αναλυτικό ορισμό]

6. Τα παραπάνω αποτελούν ενδείξεις για το πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ορισμοί προκειμένου να κατασκευαστεί ένας λογισμός ορίων που διευκολύνει την διακρίβωση της σύγκλισης και τον εντοπισμό του ορίου. Στο εξής αυτά, αλλά και όποιος λογισμός μας είναι γνωστός εκτός του μαθήματος (π.χ. Κανόνας L'Hopital κ.ο.κ.) θα χρησιμοποιείται στο εξής.

Παράδειγμα: Σε αυτό το παράδειγμα θα εφαρμοσθούν διάφορα από τα αποτελέσματα που έχουν ήδη αναπτυχθεί, ενώ η ακολουθία που θα αναλύσουμε θα αποτελέσει το δομικό στοιχείο της γεωμετρικής σειράς. Έστω λοιπόν $\alpha \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε την πραγματική ακολουθία (α^n). Έχουμε ότι:

1. $\alpha=1$ οπότε προκύπτει η (1) που ως σταθερή συγκλίνει στο 1.

2. $\alpha=-1$ οπότε προκύπτει η $(1,-1,1,-1,\dots,(-1)^n,\dots)$

η οποία αποκλίνει ως ταλαντεύουσα, ούσα όμως

φραγμένη $(\sup x_n=1,\ \inf x_n=-1)$.

3. $|\alpha|<1$ οπότε $\alpha^n \to 0$ αφού αν $\varepsilon>0$ $|\alpha^n|<\varepsilon \iff$

$|\alpha|^n<\varepsilon \iff n\ln|\alpha|<\varepsilon \overset{|\alpha|<1}{\iff} n>\varepsilon/\ln|\alpha|$ οπότε μπορού-

με να επιλέξουμε $n^*(\varepsilon)=0$ $\forall \varepsilon>0$.

4. $|\alpha|>1$ οπότε η (α^n) αποκλίνει ως μη φραγμένη. Το τελευταίο ισχύει επειδή αν ήταν φραγμένη θα υπήρχε $M>0$: $|\alpha^n| \le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\iff |\alpha|^n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff n\ln|\alpha| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{\ln|\alpha|>0}{\iff} n \le \frac{M}{\ln|\alpha|} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ άτοπο. } \square$$

Μας ενδιαφέρει, δεδομένης πραγματικής ακολουθίας (x_n), να νοηματοδοτήσουμε το απειροπληθές άθροισμα των όρων της. Παρατηρούμε ότι αν σχεδόν όλοι οι όροι της (x_n) δεν είναι ίσοι με 0, τότε είναι αδύνατον να το κάνουμε αυτό αλγεβρικά, αφού π.χ. αν $x_n = (-1)^n$ θα είχαμε

$$0 = (1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots =$$
$$= 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots = 1,$$

το οποίο είναι προφανώς αντίφαση. Θα πρέπει μάλλον να χρησιμοποιήσουμε με κάποιο τρόπο την έννοια του ορίου. Η κατασκευή έχει ως εξής:

Ορισμός. Έστω πραγματική ακολουθία (x_n). Ως ακολουθία μερικών αθροισμάτων (ΑΜΑ) της (x_n) ορίζεται η πραγματική ακολουθία $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) =$

$$= \left(x_0, x_0+x_1, x_0+x_1+x_2, \ldots, \sum_{i=0}^{n} x_i, \ldots\right).$$

Παρατήρηση. Η $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ είναι πάντοτε καλώς ορισμένη αφού κάθε όρος της είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα.

Παραδείγματα.

1. $x_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n>0, \end{cases}$ οπότε $\sum_{i=0}^{n} x_i = n$

2. $x_n = (-1)^n$, οπότε $\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 1 & n \text{ άρτιο} \\ 0 & n \text{ περιττό}. \end{cases}$

3. [Γεωμετρική ΑΜΑ]. $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n = \alpha^n$ οπότε
$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i .$$

4. [Αρμονική ΑΜΑ]. $x_n = \frac{1}{n+1}$, οπότε $\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$.

5. [Εναλλάσσουσα Αρμονική ΑΜΑ]. $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$,
οπότε $\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

6. [Υπεραρμονική ΑΜΑ]. $p>1$, $x_n = \frac{1}{(n+1)^p}$
(παρατηρούμε ότι $\frac{1}{(n+1)^p} \to 0$, αφού $\frac{1}{n+1} \to 0$

και η $f(x) = x^p$ είναι συνεχής στο 0.), οπότε
$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} . \quad \square$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το n μεγαλώνει το πλήθος των προσθετέων στο $\sum_{i=0}^{n} x_i$ αυξάνεται. Επομένως γίνεται εύλογος ο παρακάτω ορισμός για το απειροπληθές άθροισμα που μας ενδιαφέρει.

Ορισμός. Έστω πραγματική ακολουθία (x_n). Πραγματική σειρά της (x_n), $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ θα ονομάζεται το όριο της ΑΜΑ, $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ αν υπάρχει. [Δηλαδή $\sum_{i=0}^{\infty} x_i := \lim \sum_{i=0}^{n} x_i$]

Παρατήρηση. Η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ είναι πραγματικός αριθμός όταν υπάρχει. Αν η $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ αποκλίνει τότε λέμε ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ δεν υπάρχει. Προς το παρόν θα χρησιμοποιούμε αυστηρά την παραπάνω ορολογία για να μην συγχέουμε τη φύση των παραπάνω αντικειμένων. □

Ερώτημα. Τα βασικά ερωτήματα στην εν λόγω θεωρία είναι

α. Πότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει;

β. Αν υπάρχει με τι ισούται.

Οπότε και θα ασχοληθούμε κυρίως με το (ήδη δύσκολο) πρώτο ερώτημα και λιγότερο με το δυσκολότερο δεύτερο (π.χ. μέσω της θεωρίας των δυναμοσειρών θα μπορούμε να απαντούμε στο β. σε κάποιες περιπτώσεις. Καταρχάς ας ασχοληθούμε με τα προηγούμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα [Συνέχεια από προηγουμένως]

1. Η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$, με $x_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1, & n>0 \end{cases}$ δεν υπάρχει αφού

η ΑΜΑ (n) αποκλίνει ως μη φραγμένη.

2. Η $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$ δεν υπάρχει αφού η ΑΜΑ $\left((-1)^n\right)$ αποκλίνει ως ταλαντεύουσα.

3. [Γεωμετρική Σειρά]

i. $\alpha = 1$ οπότε η $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} 1$ δεν υπάρχει αφού η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} 1^i\right) = (n+1)$ αποκλίνει ως μη φραγμένη.

ii. $\alpha \neq 1$, οπότε $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i - \alpha \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n - \alpha - \alpha^2 - \ldots - \alpha^{n+1} = 1 - \alpha^{n+1}$. Οπότε $(1-\alpha)\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = 1 - \alpha^{n+1}$ $\overset{\alpha \neq 1}{\Leftrightarrow} \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. Επομένως η ΑΜΑ είναι η $\left(\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)$ [καταφέραμε κάνοντας μόνο αλγεβρικούς χειρισμούς να εκφράσουμε την ΑΜΑ χωρίς το $\sum_{i=0}^{n}$. Τώρα μπορούμε να πάρουμε όρια προκειμένου να απαντήσουμε για α, β. Κάτι τέτοιο είναι γενικά μη ευχερές σε άλλες περιπτώσεις!].

Μπορούμε πλέον να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

ii_{I}. $|\alpha|<1$ οπότε $\alpha^n \to 0$ (από προηγουμένως)

ενώ επειδή η $f(x)=\frac{1-\alpha x}{1-\alpha}$ είναι συνεχής στο 0

η αρχή της μεταφοράς μας λέει ότι $\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}=\frac{1-\alpha a^{n}}{1-\alpha}\to \frac{1}{1-\alpha}$.

ii_{II} $|\alpha|>1$ οπότε η $\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)$ αποδεικνύεται ως μη φραγμένη. Αν η τελευταία ήταν φραγμένη τότε θα υπήρχε $M\geq 0$: $\left|\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right|\leq M \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$(***) \ |1-\alpha^{n+1}|\leq M|1-\alpha| \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$.

οπότε $\big|1-|\alpha^{n+1}|\big|\leq|1-\alpha^{n+1}| \ \forall n\in\mathbb{N}$ οπότε

$$(***) \Rightarrow \big|1-|\alpha^{n+1}|\big|\leq M|1-\alpha| \ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \big|1-|\alpha|^{n+1}\big|\leq M|1-\alpha| \ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\overset{|\alpha|>1}{\Leftrightarrow} |\alpha|^{n+1}-1 \leq M|1-\alpha| \ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\alpha|^{n+1} \le M|1-\alpha|+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)\ln|\alpha| \le M|1-\alpha|+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\overset{\ln|\alpha|>0}{\Leftrightarrow} \quad n \le \frac{M|1-\alpha|+1}{\ln|\alpha|} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \text{ άτοπο.}$$

$\ddot{u}_{\mathrm{III}}$. $\alpha=-1$ οπότε $\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$ η οποία αποδεικνύει ως εναλλάσσουσα μεταξύ του 1 και του 0.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι:

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i$ υπάρχει αν $|\alpha|<1$ οπότε και ισούται με $\frac{1}{1-\alpha}$.

Παρατήρηση. Το παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς υπονοείται ότι αν η $\sum_{i=0} x_i$ υπάρχει τότε $x_n\to 0$. Πράγματι είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αυτό ισχύει. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει όπως θα μας δείξει το επόμενο παράδειγμα της αρμονικής σειράς.

4. [Αρμονική Σειρά]. Η αρμονική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}$ δεν υπάρχει επειδή η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\right)$ δεν είναι φραγμένη.

Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει επειδή η ΑΝΑ φράσσεται όρο προς όρο* από κάτω από μη φραγμένη ακολουθία χρησιμοποιώντας την δυική εκδοχή του λήμματος Φραγή–Σύγκρισης.

[αν $|x_n| \geq |y_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και (y_n) μη φραγμένη τότε και η (x_n) μη φραγμένη. Δείξτε το!]

* κατ' απόλυτη τιμή.

Βάσει του παραπάνω αρκεί να κατασκευάσουμε ακολουθία (γ_n) με $0 \leq \gamma_n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και η (γ_n) να είναι μη φραγμένη. Έχουμε ότι

$$\forall i \geq 0, \ \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1}\,dx \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1}\,dx = \frac{1}{i+1} \int_i^{i+1} dx = \frac{1}{i+1}\, x \Big|_i^{i+1} = \frac{1}{i+1}.$$

Επομένως $\gamma_n := \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1}\,dx \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ και $\gamma_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ταυτόχρονα $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1}\,dx$

$$= \int_0^{n+1} \frac{1}{x+1}\,dx \underset{du=dx}{\overset{u=x+1}{=\!=}} \int_1^{n+2} \frac{1}{u}\,du = \ln|u| \Big|_1^{n+2} = \ln(n+2) - \ln 1$$

$= \ln(n+2)$.

Επομένως αρκεί η $(\ln(n+2))$ να είναι μη φραγμένη.

Υποθέτουμε ότι είναι οπότε $\exists M \geq 0$:

$$|\ln(n+2)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{\ln(n+2)>0}{\underset{\forall n\in\mathbb{N}}{\iff}} \ln(n+2) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff n+2 \leq e^M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff n \leq e^M - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως η αρμονική σειρά δεν υπάρχει.

5. [Εναλλάσσουσα Αρμονική Σειρά]. Σε αντίθεση με την προηγούμενη η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln(2)$!!! Θα δούμε πως προκύπτει αυτό χρησιμοποιώντας την θεωρία των δυναμοσειρών. Προς το παρόν αυτό μας δείχνει ότι για την συμπεριφορά της σειράς έχουν σημασία τα πρόσημα των όρων της (x_n) κάτι το οποίο θα μας οδηγήσει σε κατάλληλη επέκταση της έννοιας της σύγκλισης και στην συνακόλουθη κατασκευή κριτηρίου που είναι γενική απάντηση στο ερώτημα α.

6. [Υπεραρμονική Σειρά]. Χρησιμοποιώντας τα (προφανές) Λήμμα - Ομόσημοι Όροι παρατηρώ είναι δυνατόν να δειχθεί ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ συγκλίνει όταν $p>1$. [Δείξτε το! Χρησιμοποιήστε την ευθεία

εκδοχή του λήμματος Φραγή-Σύγκριση και κατασκευάστε κατάλληλη βοηθητική ακολουθία (δ_n) όπου $\delta_n \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και (δ_n) φραγμένη, χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα $\int_i^{i+1} \frac{1}{(x+1)^p} dx$, $i \geq 0$]. Με τις έννοιες που μας είναι διαθέσιμες είναι αδύνατο να δειχθεί ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p} = \zeta(p)$ όπου ζ η συνάρτηση ζ του Riemann $\left(\pi.\chi.\ \zeta(2) = \pi^2/6\right)$ που συναντάται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Αυτό μας δείχνει το πόσο δύσκολο είναι να απαντάμε στο ερώτημα β.

Βασικός Λογισμός Σειρών

Στο παρακάτω, χρησιμοποιώντας άμεσα αποτελέσματα που μας ήταν διαθέσιμα στις πραγματικές ακολουθίες κατασκευάζουμε έναν βασικό λογισμό σειρών τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε ακολούθως για τα ερωτήματα α, β.

Α. Έστω $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ υπάρχουσες σειρές. Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+y_i)$ υπάρχει και έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i + \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

Βασική Ιδέα Απόδειξης. Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα Όρια και Πρόσθεση ακολουθιών.

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες!

Παράδειγμα. Έστω $|\alpha|, |\beta| < 1$. Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha^i+\beta^i)$ για την οποία έχουμε ότι επειδή (βλ. γεωμετρική σειρά) $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$, $\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i = \frac{1}{1-\beta}$ τότε από το Α έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha^i+\beta^i) = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i + \sum_{i=0}^{\infty}\beta^i = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} = \frac{2-(\alpha+\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Β. Έστω $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ όπως στο Α και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x_i$ υπάρχει και

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

Βασική Ιδέα Απόδειξης. Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα Όρια και βαθμωτός Πολλαπλασιασμός ακολουθιών. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες!

[Συνεπώς μπορούμε να βγάζουμε κοινούς παράγοντες από σειρές].

Παράδειγμα. Για την $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{2^i} = 2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$$\overset{\text{γεωμ.}}{\underset{\text{σειρά}}{=}} 2\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Γ. Έστω $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ όπως στο Α, και $k \geq 0$. Τότε

$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i.$$

Βασική Ιδέα Απόδειξης. Χρησιμοποιείστε το λήμμα Όρια και Πρόσθεση και το γεγονός ότι η σταθερή ακολουθία $\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i\right)$ συγκλίνει στο $\sum_{i=0}^{k-1} x_i$.

Παράδειγμα. Έστω $|\alpha|<1$ οπότε $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$.

Επομένως $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i =$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}.$$

Παρατηρείστε ότι $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \to 0$ καθώς $k \to +\infty$ εξαιτίας των παραπάνω.

Δ. **Λήμμα [Θετικοί-Όροι].** Έστω ότι οι x_n είναι θετικοί $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει ανν η $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν οι x_n θετικοί $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε η $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ είναι μονότονη (αύξουσα αν είναι μη αρνητικοί και φθίνουσα αν είναι μη θετικοί). Επομένως η ΑΜΑ θα συγκλίνει αν είναι φραγμένη εξαιτίας του λήμματος Φραγή και Μονοτονία.

(⇐) Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει τότε η ΑΜΑ είναι φραγμένη εξαιτίας του λήμματος Φραγή και Σύγκλιση. □