Ισότητα, Αλγεβρικές και Αναλυτικές Ιδιότητες Πραγματικών Ακολουθιών

Συμβολισμοί

Σε αναλογία με τους ορισμούς συμβολίζουμε μια ακολουθία:

1. είτε μέσω του διανυσματικού ορισμού, παραθέτοντας αναγκαστικά πεπερασμένο πλήθος από τους αρχικούς όρους της ακολουθίας, $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, με τον προφανή κίνδυνο αοριστίας, π.χ. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots\right)$,
2. είτε μέσω του συναρτησιακού ορισμού, παραθέτοντας τον «τύπο» που ενδέχεται να περιγράφει την συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ που ορίζει την ακολουθία, εφόσον αυτός υπάρχει και είναι διαθέσιμος (γιατί μπορεί να μην υπάρχει τέτοιος τύπος; Είναι π.χ. δυνατόν να υπάρχει συνάρτηση με μη πεπερασμένο πλήθος κλάδων;), π.χ. $f(n) = \frac{1}{n+1}$,
3. είτε συνδυάζοντας τους δύο συμβολισμούς ως (x_n), π.χ. $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Ο τελευταίος τρόπος συμβολισμού θα είναι βολικός όταν επεκτείνουμε την έννοια της ακολουθίας σε ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων κ.ο.κ. Στα επόμενα θα είναι δυνατόν να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τους τρεις ανάλογα με την κατά περίπτωση χρηστικότητα του καθενός.

Ισότητα και Σχεδόν Παντού Ισότητα Πραγματικών Ακολουθιών

Η ισότητα μεταξύ πραγματικών ακολουθιών προκύπτει άμεσα από την διάταξη των μελών κάθε μιας από αυτές. Είναι προφανής επέκταση της ισότητας μεταξύ διανυσμάτων.

Ορισμός (Ισότητα). *Έστω πραγματικές ακολουθίες* $(x_n), (y_n)$*. Αυτές θα είναι ίσες, δηλαδή* $(x_n) = (y_n)$*, ανν* $x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Προφανώς η ισότητα είναι ανακλαστική, δηλαδή $(x_n) = (x_n)$, συμμετρική, δηλαδή $(x_n) = (y_n) \Leftrightarrow (y_n) = (x_n)$ και μεταβατική, δηλαδή αν $(x_n) = (y_n)$ και $(y_n) = (z_n)$ τότε $(x_n) = (z_n)$, εξαιτίας του ορισμού της και των ανάλογων ιδιοτήτων στους πραγματικούς.

Όταν έστω και ένας από τους περιορισμούς που απαιτέι ο προηγούμενος ορισμός δεν ισχύει τότε προφανώς οι ακολουθίες δεν θα είναι ίσες, $(x_n) \neq (y_n)$. Όταν το πλήθος των περιορισμών που δεν ικανοποιούνται είναι πεπερασμένο, τότε μπορούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω ως εξής: επιτρέπουμε σε ακολουθίες να θεωρούνται «περίπου» ίσες αν οι περιορισμοί του **Ορισμός (Ισότητα)** ισχύουν για σχεδόν κάθε $n \in \mathbb{N}$ με την έννοια που έχουμε δώσει στο κατηγόρημα «σχεδόν».

Ορισμός (Σχεδόν Παντού Ισότητα). *Έστω πραγματικές ακολουθίες* $(x_n), (y_n)$*. Αυτές θα είναι σχεδόν παντού ίσες, δηλαδή* $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$*, ανν* $x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *εκτός από πεπερασμένο πλήθος από n.*

Και πάλι είναι εμφανές ότι αν $(x_n) = (x_n)$ τότε και $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$ αφού εξαιτίας της ισότητας το πλήθος των n για τα οποία δεν ισχύουν οι περιορισμοί του ορισμού είναι ακριβώς ίσο με μηδέν, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού
π.χ. $(1, 0, 0, ..., 0, ...) \overset{\sigma.\pi.}{=} (0, 0, 0, ..., 0, ...)$, αφού το το πλήθος των n για τα οποία δεν ισχύουν οι περιορισμοί του ορισμού είναι ακριβώς ίσο με ένα, αλλά προφανώς $(1, 0, 0, ..., 0, ...) \neq (0, 0, 0, ..., 0, ...)$. Η παραπάνω έννοια θα είναι χρήσιμη στην διατύπωση και κατανόηση προτάσεων όπως η «αν δύο ακολουθίες είναι σχεδόν παντού ίσες και η πρώτη έχει όριο, τότε και η δεύτερη έχει το ίδιο όριο» τις οποίες θα δούμε παρακάτω. Τέλος, δύο ακολουθίες δεν θα είναι σχεδόν παντού ίσες όταν οι περιορισμοί δεν ικανοποιούνται για άπειρο πλήθος από n,
π.χ. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) \overset{\sigma.\pi.}{\neq} (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι η σχεδόν παντού ισότητα είναι ανακλαστική, δηλαδή $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (x_n)$.
2. Να δείξετε ότι η σχεδόν παντού ισότητα είναι συμμετρική, δηλαδή $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n) \Leftrightarrow (y_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (x_n)$.
3. Να δείξετε ότι η σχεδόν παντού ισότητα είναι μεταβατική, δηλαδή αν $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$ και $(y_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (z_n)$ τότε και $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (z_n)$.

Διανυσματικός Ορισμός και Αλγεβρικές Ιδιότητες

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση μιας ακολουθίας ως διάνυσμα, μπορούμε να ορίσουμε αλγεβρικές πράξεις μεταξύ πραγματικών ακολουθιών, επεκτείνοντας φυσικά τις ανάλογες πράξεις που γνωρίζουμε μεταξύ διανυσμάτων πεπερασμένης διάστασης.

---

1. (Σημειακή) Πρόσθεση

Ορισμός (Σημειακή Πρόσθεση). *Έστω πραγματικές ακολουθίες $(x_n), (y_n)$. Το άθροισμά τους, $(x_n) + (y_n)$ ορίζεται ως η πραγματική ακολουθία $(x_n + y_n)$, δηλαδή η ακολουθία της οποίας ο n+1-οστός όρος είναι ο $x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Παρατηρήσεις:
1. Η σταθερή ακολουθία στο 0 είναι προφανώς το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.
2. Η πρόσθεση είναι μεταθετική αφού $(x_n) + (y_n) \doteq (x_n + y_n) = (y_n + x_n) \doteq (y_n) + (x_n)$ εξαιτίας της μεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης μεταξύ πραγματικών και του προηγούμενου ορισμού.
3. Η πρόσθεση γενικεύεται σε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από προσθετέες ακολουθίες αναδρομικά, π.χ. έχουμε ότι $(x_n) + (y_n) + (z_n) \doteq [(x_n) + (y_n)] + (z_n) = (x_n + y_n) + (z_n) = (x_n + y_n + z_n)$.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι η πρόσθεση είναι προσεταιριστική, δηλαδή ισχύει ότι $$(x_n) + (y_n) + (z_n) = [(x_n) + (y_n)] + (z_n) = (x_n) + [(y_n) + (z_n)]$$ εξαιτίας της ανάλογης ιδιότητας στην πρόσθεση μεταξύ πραγματικών.
2. Να δείξετε ότι αν $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$ και $(z_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (v_n)$, τότε $(x_n) + (z_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n) + (v_n)$.

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

Ορισμός (Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός). *Έστω πραγματική ακολουθία* (x_n) *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Το γινόμενο τους,* $\lambda(x_n)$ *ορίζεται ως η πραγματική ακολουθία* (λx_n), *δηλαδή η ακολουθία της οποίας ο n+1-οστός όρος είναι ο* λx_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις:

1. Ο πολλαπλασιασμός πραγματικής ακολουθίας με το 1 προφανώς την αφήνει αναλλοίωτη, ενώ με 0 την μετατρέπει σε σταθερή στο 0.
2. Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού μεταξύ πραγματικών μπορούμε να ορίσουμε την παραπάνω πράξη ισοδύναμα και μέσω πολλαπλασιασμού της ακολουθίας από αριστερά με τον πραγματικό, έχουμε δηλαδή ότι $\lambda(x_n) = (\lambda x_n) = (x_n\lambda) = (x_n)\lambda$.
3. Εξαιτίας της επιμεριστικής ιδιότητας των πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης μεταξύ πραγματικών και των ιδιοτήτων της πρόσθεσης μεταξύ ακολουθιών, ισχύει π.χ. ότι για $\mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda+\mu)(x_n) = ((\lambda+\mu)x_n) = (\lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_n) + (\mu x_n) = \lambda(x_n) + \mu(x_n)$.

Ασκήσεις

1. Συνδυάζοντας πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό να δείξετε ότι ικανοποιείται η ανάλογη επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή ότι $\lambda[(x_n) + y_n)] = \lambda(x_n) + \lambda y_n)$.
2. Να δείξετε ότι αν για κάποιο $\lambda \neq 0$, $\lambda(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} \lambda(y_n)$ τότε και $(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$.

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω πράξεις και ιδιότητες όπως οι προαναφερθείσες είναι δυνατόν να δειχθεί ότι το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών έχει την αλγεβρική δομή διανυσματικού χώρου επί των πραγματικών.

3. (Σημειακός) Πολλαπλασιασμός

Ορισμός (Σημειακός Πολλαπλασιασμός). *Έστω πραγματικές ακολουθίες* $(x_n), (y_n)$. *Το γινόμενο τους,* $(x_n) \otimes (y_n)$ *ορίζεται ως η πραγματική ακολουθία* $(x_n y_n)$, *δηλαδή η ακολουθία της οποίας ο n+1-οστός όρος είναι ο* $x_n y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις:

1. Η σταθερή ακολουθία στο 1 είναι προφανώς το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
2. Ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός αφού $(x_n) \otimes (y_n) = (x_n y_n) = (y_n x_n) = (y_n) \otimes (x_n)$ εξαιτίας της μεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού μεταξύ πραγματικών και του προηγούμενου ορισμού.
3. Ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται σε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από πολλαπλασιαζόμενες ακολουθίες αναδρομικά (δείξτε το με τρόπο παραμφερή με την ανάλογη παρατήρηση για την πρόσθεση).
4. Είναι δυνατόν να αποκτούμε την σταθερή ακολουθία στο 0, πολλαπλασιάζοντας μεταξύ τους ακολουθίες καμμία εκ των οποίων δεν είναι σταθερή στο 0. Π.χ. έχουμε ότι $(0, 0, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 1, 0, \ldots) \otimes (0, 1, 0, 1, \ldots)$. Παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατον στους πραγματικούς αριθμούς. Η αλγεβρική δομή που συνδυάζει τις πράξεις της σημειακής πρόσθεσης και του σημειακού πολλαπλασιασμού επί των πραγματικών ακολουθιών (δακτύλιος) είναι πολυπλοκότερη αυτής των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένων με τις δύο ανάλογες πράξεις.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι ο σημειακός πολλαπλασιασμός ικαοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.
2. Συνδυάζοντας σημειακή πρόσθεση και σημειακό πολλαπλασιασμό να δείξετε ότι ικανοποιείται η ανάλογη επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή ότι $(z_n) \otimes [(x_n) + (y_n)] = (z_n) \otimes (x_n) + (z_n) \otimes (y_n)$.
3. Να δειχθεί ότι $\lambda[(z_n) \otimes [(x_n) + (y_n)]] = (z_n) \otimes [\lambda(x_n) + \lambda(y_n)]$.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να ορίσουμε περαιτέρω μορφές πολλαπλασιασμού μεταξύ ακολουθιών, κάποιοι εκ των οποίων μπορεί να είναι χρήσιμοι σε ζητήματα που αφορούν στην μελέτη δυναμοσειρών.

Συναρτησιακός Ορισμός και Αναλυτικές Ιδιότητες Πραγματικών Ακολουθιών

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση μιας ακολουθίας ως πραγματική συνάρτηση επί των φυσικών, μπορούμε να ορίσουμε αναλυτικές ιδιότητες ακολουθιών που προκύπτουν από ανάλογες ιδιότητες των συναρτήσεων που τις ορίζουν. Θα ασχοληθούμε με δύο τέτοιες ιδιότητες, την φραγή και την μονοτονία, οι οποίες θα μας είναι χρήσιμες στην μελέτη μας για τα όρια.

1. Φραγμένες Πραγματικές Ακολουθίες

Φραγμένη θα ονομάζεται όποια ακολουθία της οποίας η συνάρτηση που την αναπαριστά είναι φραγμένη. Επομένως για την κατανόηση της έννοιας μας είναι χρήσιμη η μελέτη της φραγής γενικότερα, δηλαδή ως προς τις πραγματικές συναρτήσεις.

1.Α Φραγμένες Πραγματικές Συναρτήσεις

Ορισμός (Φραγή Πραγματικής Συνάρτησης). *Έστω $A \neq \emptyset$ και πραγματική συνάρτηση συνάρτηση επί του A, δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$. Αυτή θα ονομάζεται:*

1. *Φραγμένη από πάνω (ή Άνω Φραγμένη- Bounded from Above) ανν $\exists \Phi^\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq \Phi^\alpha, \ \forall x \in A$. Ο αριθμός Φ^α θα ονομάζεται άνω φράγμα (upper bound) της f.*
2. *Φραγμένη από κάτω (ή Κάτω Φραγμένη- Bounded from Below) ανν $\exists \Phi^\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Phi^\kappa \leq f(x), \ \forall x \in A$. Ο αριθμός Φ^κ θα ονομάζεται κάτω φράγμα (lower bound) της f.*
3. *Φραγμένη (Bounded) ανν είναι ταυτόγχρονα άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή ανν $\exists \Phi^\kappa, \Phi^\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\Phi^\kappa \leq f(x) \leq \Phi^\alpha, \ \forall x \in A$.*

Παρατηρήσεις:

1. Ο παραπάνω ορισμός δεν επιβάλλει καμμία ιδιαίτερη μαθηματική δομή στο πεδίο ορισμού A.
2. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η f άνω φραγμένη ανν το σύνολο των τιμών που αποδίδει μπορεί να εγκλειστεί σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \Phi^\alpha]$. Όταν υπάρχει το Φ^α δεν είναι μοναδικό αφού κάθε αριθμός μεγαλύτερος του θα είναι επίσης άνω φράγμα της f. Το σύνολο των άνω φραγμάτων της άνω φραγμένης f θα σχηματίζει διάστημα της μορφής $[y, +\infty)$ όπου y θα είναι το μικρότερο στοιχείο του συνόλου των άνω φραγμάτων. Το y θα ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum της f και θα συμβολίζεται με $\sup f$. Π.χ. έστω $A = (-\infty, 3], f(x) = x$. Αυτή είναι άνω φραγμένη, αφού π.χ. όποιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3 είναι άνω φράγμα για αυτή. Το σύνολο των άνω φραγμάτων της είναι το $[3, +\infty)$ ενώ έχουμε ότι $\sup f = 3$. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν όταν $A = (-\infty, 3), f(x) = x$. Τέλος, για την περίπτωση $A = (-\infty, 0], f(x) = x^2$ έχουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη από πάνω αφού η ύπαρξη άνω φράγματος Φ^α θα ήταν ισοδύναμη με το ότι αυτό θα ήταν μη αρνητικό (γιατί;) και ταυτόγχρονα θα ικανοποιούσε τις $x^2 \leq \Phi^\alpha, \ \forall x \in (-\infty, 0]$. Οι τελευταίες συνεπάγονται ότι $-x \leq \sqrt{\Phi^\alpha}, \ \forall x \in (-\infty, 0]$ το οποίο προφανώς

είναι αδύνατο, αφού για τον $x = -\sqrt{\Phi^\alpha} - 1 \in (-\infty, 0]$ και $-x > \sqrt{\Phi^\alpha}$ για όποιο υποψήφιο άνω φράγμα.

3. Δυϊκά θα έχουμε ότι η f είναι κάτω φραγμένη ανν το σύνολο των τιμών που αποδίδει μπορεί να εγκλειστεί σε διάστημα της μορφής $[\Phi^\kappa, +\infty)$. Όταν υπάρχει το Φ^κ δεν είναι μοναδικό αφού κάθε αριθμός μικρότερος του θα είναι επίσης κάτω φράγμα της f. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων της κάτω φραγμένης f θα σχηματίζει διάστημα της μορφής $(-\infty, z]$ όπου z θα είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του συνόλου των κάτω φραγμάτων. Το z θα ονομάζεται μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum της f και θα συμβολίζεται με $\inf f$. Π.χ. έστω $A = [3, +\infty), f(x) = x$. Αυτή είναι κάτω φραγμένη, αφού π.χ. όποιος αριθμός μικρότερος ή ίσος του 3 είναι κάτω φράγμα για αυτή. Το σύνολο των άνω φραγμάτων της είναι το $(-\infty, 3]$ ενώ έχουμε ότι $\inf f = 3$. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν όταν $A = (3, +\infty), f(x) = x$. Τέλος, για την περίπτωση $A = (-\infty, 0], f(x) = -x^2$ έχουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη από κάτω αφού η ύπαρξη κάτω φράγματος Φ^κ θα ήταν ισοδύναμη με το ότι αυτό θα ήταν μη θετικό (γιατί;) και ταυτόγχρονα θα ικανοποιούσε τις $\Phi^\kappa \leq -x^2, \ \forall x \in (-\infty, 0]$. Οι τελευταίες συνεπάγονται ότι $\sqrt{-\Phi^\kappa} \geq -x, \ \forall x \in (-\infty, 0]$ το οποίο προφανώς είναι αδύνατο, ακριβώς για το ίδιο λόγο με την αμέσως παραπάνω περίπτωση.
4. Τέλος η φραγή είναι ισοδύναμη με τον εγκλεισμό του συνόλου των τιμών που αποδίδει η f σε διάστημα της μορφής $[\Phi^\kappa, \Phi^\alpha]$. Το «μικρότερο» διάστημα στο οποίο μπορεί να γίνει αυτό ο εγκλεισμός είναι το $[\inf f, \sup f]$. Η f θα είναι μη φραγμένη ανν δεν είναι άνω ή δεν είναι κάτω φραγμένη. Π.χ. Καμμία από τις συναρτήσεις στις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις δεν είναι φραγμένη (γιατί;), ενώ η $A = [-3, 3), f(x) = x^3$ είναι αφού έχουμε ότι $\inf f = -9, \sup f = 9$.

Το ζήτημα της εύρεσης άνω ή/και κάτω φραγμάτων προκειμένου να διαπιστώσουμε αν μια συνάρτηση είναι φραγμένη μπορεί να είναι υπολογιστικά περιπλοκότερο σε σχέση με το αν προσπαθούσαμε να διαπιστώνουμε την φραγή μέσω των απολύτων τιμών των τιμών της συνάρτησης. Το παρακάτω λήμμα μας επιτρέπει την επαναδιατύπωση του ορισμού της φραγής. Η απόδειξη του συσχετίζει τα προαναφερθέντα είδη φραγμάτων, με φράγματα ως προς τις απόλυτες τιμές.

Λήμμα (Φραγή-Απόλυτες Τιμές) Η $f : A \to \mathbb{R}$ θα είναι φραγμένη ανν $\exists M \geq 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in A$. Ο M θα ονομάζεται (απόλυτο) φράγμα της f.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f έχει φράγμα $M \geq 0$. Τότε ο $\Phi^\kappa = -M$ είναι κάτω φράγμα ενώ ο $\Phi^\alpha = M$ είναι άνω φράγμα για την f. Επομένως βάσει του Ορισμός (Φραγή Πραγματικής Συνάρτησης) η συνάρτηση είναι φραγμένη. ($\Leftarrow$) Έστω ότι η f φραγμένη βάσει του Ορισμός (Φραγή Πραγματικής Συνάρτησης). Τότε ο $M = \max\{|\Phi^\kappa|, |\Phi^\alpha|\}$ είναι (απόλυτο) φράγμα της f.$\square$

Το παραπάνω μας πληροφορεί ότι η f δεν θα είναι φραγμένη ανν $\forall M \geq 0, \ \exists x \in A$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > M$. Δεν μας δίνει όμως πληροφορία ως προς το γιατί αποτυγχάνει η φραγή.

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι ανν η f είναι άνω φραγμένη και το $\sup f$ είναι τιμή που αποδίδει η συνάρτηση, τότε η συνάρτηση έχει μέγιστο και αυτό είναι ίσο με το ελάχιστο άνω φράγμα αυτής. Να συναχθεί ότι αν το $\sup f$ δεν είναι τιμή που παίρνει η συνάρτηση, τότε αυτή δεν έχει μέγιστο.
2. Να δειχθεί ότι ανν η f είναι κάτω φραγμένη και το $\inf f$ είναι τιμή που αποδίδει η συνάρτηση, τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο και αυτό είναι ίσο με το μέγιστο κάτω φράγμα αυτής. Να συναχθεί ότι αν το $\inf f$ δεν είναι τιμή που παίρνει η συνάρτηση, τότε αυτή δεν έχει ελάχιστο.
3. Να δειχθεί ότι αν η f είναι φραγμένη και το B μη κενό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτηση που προκύπτει από τον περιορισμό της f στο B είναι επίσης φραγμένη.
4. Να δειχθεί ότι η $f(x) = \exp(x), \ A = \mathbb{R}$ είναι μη φραγμένη.

1.Β Φραγμένες Πραγματικές Ακολουθίες

Τα παραπάνω μαζί με τον συναρτησιακό ορισμό της πραγματικής ακολουθίας κάνουν προφανή τον ορισμό που αναζητούμε.

Ορισμός (Φραγή Πραγματικής Ακολουθίας). *Έστω πραγματική ακολουθία (x_n), που ισοδύναμα αναπαρίσταται από $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Αυτή θα ονομάζεται:*

1. *Φραγμένη από πάνω (ή Άνω Φραγμένη- Bounded from Above) ανν η f που την αναπαριστά είναι άνω φραγμένη ως πραγματική συνάρτηση, δηλαδή ανν $\exists \Phi^\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(n) \leq \Phi^\alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}$, που είναι ισοδύναμο με*
$$x_n \leq \Phi^\alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. *Φραγμένη από κάτω (ή Κάτω Φραγμένη- Bounded from Below) ανν η f που την αναπαριστά είναι κάτω φραγμένη ως πραγματική συνάρτηση, δηλαδή ανν*

$\exists \Phi^\kappa \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $\Phi^\kappa \leq f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$*, που είναι ισοδύναμο με*

$$\Phi^\kappa \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Φραγμένη ανν είναι ταυτόγχρονα άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδη ανν* $\exists \Phi^\kappa, \Phi^\alpha \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\Phi^\kappa \leq f(n) \leq \Phi^\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}$*, που είναι ισοδύναμο με* $\Phi^\kappa \leq x_n \leq \Phi^\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}$*. Εξαιτίας του Λήμμα (Φραγή-Απόλυτες Τιμές) η ακολουθία θα είναι φραγμένη ανν* $\exists M \geq 0$ *τέτοιος ώστε* $|f(n)| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *που είναι ισοδύναμο με το*

$$|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήσεις-Παραδείγματα:

1. Η (n) δεν είναι φραγμένη αφού η ύπαρξη φράγματος M θα συνεπάγονταν ότι όλοι οι φυσικοί θα ήταν μικρότεροι του φράγματος, το οποίο είναι αδύνατο. Είναι φραγμένη από κάτω αλλά όχι από πάνω.
2. Αν η (x_n) σταθερή στο c, τότε είναι φραγμένη, αφού η επιλογή $M = |c|$ είναι εφικτή.
3. Αν η (x_n) σχεδόν παντου σταθερή στο c, τότε είναι φραγμένη. Έστω οι όροι που δεν ταυτίζονται με c είναι οι $y_1, y_2, \ldots, y_k$ όπου το k είναι το πλήθος αυτών. Υποθέτουμε ότι $k > 0$ αφού στην αντίθετη περίπτωση αναγόμαστε στην προηγούμενη παρατήρηση. Εφόσον το k είναι πεπερασμένο το $M = \max\{|c|, |y_1|, |y_2|, \ldots, |y_k|\}$ υπάρχει ως πραγματικός αριθμός αφού ορίζεται ως το maximum πεπερασμένου πλήθους ($= k+1$) όρων και προφανώς αποτελεί (απόλυτο) φράγμα για την ακολουθία.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί παράδειγμα ακολουθίας που δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.
2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία των πρώτων αριθμών είναι κάτω αλλά όχι άνω φραγμένη και συνεπώς μη φραγμένη.