Διάλεξη 26

- Ισότητα κ' Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ δυναμοσειρών
- Αναλυτικές ιδιότητες:

  • Συνέχεια
  • Παραγωγισιμότητα κ' εφαρμογές

Διάλεξη 26

Υπενθύμιση:

- Δυναμοσειρές: (*) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i$, $x \in \mathbb{R}$ — σειρές συναρτήσεων που "γενικεύουν" τα πολυώνυμα

  a_i: συντελεστές, α: κέντρο

- Θεώρημα (Cauchy-)Hadamard:

  X^* έχει την μορφή διαστήματος [Διάστημα Σύγκλισης - ΔΣ] με κέντρο το α κ' ακτίνα r [ακτίνα σύγκλισης]

$$\begin{cases} r=0 \ \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty\right), & ΔΣ = \{\alpha\} \\ 0<r<+\infty \ \left(0<\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < +\infty\right), & ΔΣ \text{ φραγμένο} \\ r=+\infty \ \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0\right), & ΔΣ = \mathbb{R} \end{cases}$$

- Το Κ.Π. μας πληροφορεί μόνο για το εσωτερικό του ΔΣ [δεν μπορεί να μας πει για το αν η (*) συγκλίνει στο σύνορό του]

- Στο εσωτερικό η σύγκλιση είναι απόλυτη. Στο σύνορο όταν συμβαίνει μπορεί να είναι απόλυτη ή κατά συνθήκη ή απόλυτη σε ένα άκρο κ' κατά συνθήκη σε άλλο.

- Όταν $r=0$ τότε αναφερόμαστε στο ΔΣ ως εκφυλισμένο

Ορισμός [Ισότητα Δυναμοσειρών]

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-\alpha)^i$$

κοινό κέντρο

όπως στην ισότητα πολυωνύμων

ανν $(a_i) = (b_i)$ $[\Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall i \in \mathbb{N}]$ $\square$

Άσκηση. Να οριστεί πολλαπλασιασμός μεταξύ δυναμοσειρών με το ίδιο κέντρο.

* Η έννοια ισότητος μεταξύ δυναμοσειρών με διαφορετικό κέντρο θα περιλαμβάνει πιο περίπλοκες σχέσεις.

Ορισμός [Κατά σημείο πρόσθεση δυναμοσειρών]

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i}_{(I)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-\alpha)^i}_{(II)} := \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (a_i+b_i)(x-\alpha)^i}_{(III)}$$

κοινό κέντρο

κατά σημείο πρόσθεση συντελεστών $\square$

* Η κατά σημείο πρόσθεση δυναμοσειρών με διαφορετικό κέντρο θα περιλαμβάνει πιο περίπλοκες σχέσεις

* $\Delta\Sigma_{(III)} \supseteq \Delta\Sigma_{(II)} \cap \Delta\Sigma_{(I)} \neq \emptyset$ (γιατί; - Άσκηση)

Ορισμός [Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός]

βαθμ. πολ/μός συντελεστών

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i}_{(*)} := \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda a_i (x-\alpha)^i}_{(**)}$

* $\Delta\Sigma(**) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{αν } \lambda = 0 \\ \Delta\Sigma(*), & \text{αν } \lambda \neq 0 \end{cases}$ (γιατί; - άσκηση)

Αναλυτικές ιδιότητες δυναμοσειρών

Αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας ισχυρότερες μορφές σύγκλισης από την απλή) ότι οι δυναμοσειρές είναι υπό προϋποθέσεις τόσο καλά συμπεριφερόμενες που επιτρέπουν την εναλλαγή ορίων ώστε να ισχύουν ιδιότητες όπως:

① **Θεώρημα Συνέχειας:** Η $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i$ είναι συνεχής συνάρτηση στο Δ.Σ. αυτής. □

– Ισχύει μέσω της έννοιας της τοπικά ομοιόμορφης σύγκλισης [Εκτός του εύρους του μαθήματος]

–* Μας λέει ότι $\forall y \in \Delta\Sigma$ κ' $\forall x \in \Delta\Sigma$ κ' $x \to y$

$\lim_{x\to y} f(x)$ ||

$$\lim_{x\to y} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i = \lim_{x\to y} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-\alpha)^i$$

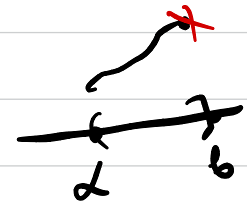
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to y} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-\alpha)^i =$$

εναλλασσόμενων!!!

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{\lim_{x\to y}(x-\alpha)^i} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i (y-\alpha)^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i (y-\alpha)^i = f(y).$$

π.χ. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ \in(0,2]}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i} = \ln 2$ $\qquad \Delta\Sigma=(0,2]$



(2) Θεώρημα παραγωγισιμότητας: Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i$ έχει μη εκφυλισμένο ΔΣ τότε είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό του ΔΣ της, κ η παράγωγος είναι επίσης δυναμοσειρά με: α. το ίδιο κέντρο, β. με ΔΣ του οποίου το εσωτερικό ταυτίζεται με το εσωτερικό του ΔΣ της αρχικής, και γ. δίνεται από τον όρο προς όρο (!!!) παραγώγιση της αρχικής. □

↳ μη κενό το εσωτερικό

* Το γ. είναι επίσης ιδιαίτερο κ σπάνιο αφού αποτελεί μια ακόμη δυνατότητα που υπάρχει στις δυναμοσειρές

για εναλλαγή μεταξύ του ορίου που ορίζει την σειρά κ' του ορίου που ορίζει την παράγωγο: γενικά δεν ισχύει τέτοια δυνατότητα εναλλαγής όμως ισχύει για τις δυναμοσειρές.

* Το μη εκφυλισμένο του ΔΣ είναι εύλογο: αν ΔΣ $=\{\alpha\}$ τότε δεν ορίζεται η παράγωγος (γιατί;)

* Δεδομένου του γ) τα α), β) προκύπτουν εύκολα:

– $$\frac{d\,(x-\alpha)^i}{dx} = \begin{cases} 0\,, & i=0 \\ i\,(x-\alpha)^{i-1}\,, & i>0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\frac{d(x-\alpha)^i}{d(x-\alpha)}\,\frac{d(x-\alpha)}{dx} \qquad i(x-\alpha)^{i-1}\cdot 1$$

– (γ) ⇒ αν $x \in$ εσωτερικό του ΔΣ τότε

$$\frac{d\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(x-\alpha)^i}{dx} \overset{\gamma}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\frac{d\,\alpha_i(x-\alpha)^i}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\frac{d(x-\alpha)^i}{dx} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} i\,\alpha_i(x-\alpha)^{i-1} \quad (**)$$

μηδενισμοί για $i=0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i\,(x-\alpha)^i$$

η (**) δεν έχει την τυπική μορφή δυναμοσειράς μπορούμε να την εκφράσουμε τυπικά θέτοντας

$j = i-1$ $\Leftarrow i = j+1$ [στο εσωτερικό του ΑΣ έχουμε απόλυτη σύγκλιση οπότε μπορούμε να κάνουμε αυτόν τον μετασχηματισμό που έτσι όπως είναι μονότονος] οπότε

$$(**) \underset{\substack{\text{όταν } i\to+\infty \\ \Rightarrow i-1\to+\infty}}{=} \sum_{i-1=0}^{\infty} \underset{j+1}{i}\, a_{\underset{j+1}{i}} (x-\alpha)^{\overset{=j}{i-1}} \underset{j=i-1}{=}$$

$$b_j = (j+1)a_{j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} (x-\alpha)^j \quad (***) \quad = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-\alpha)^j}_{\text{δυναμοσειρά με κέντρο το } \alpha \text{, κ' συντ. } (b_j)}$$

- Η (***) επιβεβαιώνει το α. κ' μας λέει κ' ότι ο i-οστός συντελεστής της παραγώγου είναι ο $(i+1)a_{i+1}$, με a_{i+1} τον $i+1^{\text{οστό}}$ συντελεστή της αρχικής δυναμοσειράς.
- Αν εφαρμόσουμε το ΚΠ στην (**) [υποθέτοντας ότι δεν έχουμε εμπόδια μηδενισμών κ.ο.κ.]

Έχουμε — $x=\alpha$ η (**) συγκλίνει απόλυτα

— $x\neq\alpha$, $\left|\frac{(i+2)}{(i+1)}\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}\frac{(x-\alpha)^{i+1}}{(x-\alpha)^{i}}\right|$ β_{i+1} (γιατί;) β_i

$= \frac{i+2}{i+1}\left|\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}\right||x-\alpha|$

$\xrightarrow{i\to\infty} 1$

ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά με το $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|$ →

Επομένως αυτός ο συλλογισμός μας δίνει μια ισχυρή ένδειξη ως προς το γιατί ισχύει το Β.

* Το ΔΣ της παραγώγου δεν θα ταυτίζεται αναγκαστικά με το ΔΣ της αρχικής

* Αφού η παράγωγος δυναμοσειρά τότε συνεχής στο (μη εκφυλισμένο) ΔΣ αυτής. Επομένως η αρχική συνεχώς παραγωγίσιμη. Τέλος Διάλεξης 26