Συνέχεια Διάλεξης 25

- Εισαγωγή στην Θεωρία Συναρτο-σειρών

    * Ορισμοί - Παραδείγματα
    * Διάστημα Σύγκλισης
    * Αναλυτικές Ιδιότητες:
        - συνέχεια

Εισαγωγή στην θεωρία διανυσματικών (και αναλυτικών συναρτήσεων)

- Διανυσματικές : Σειρές συναρτήσεων με $X=\mathbb{R}$ (γενικεύονται στο $\mathbb{R}^n$ για $n\geq 1$) που:

  - ως αλγεβρικά αντικείμενα γενικεύουν (διατηρούν) τα πολυώνυμα

  - Ως αναλυτικά αντικείμενα έχουν ιδιαίτερα καλές συμπεριφορές ιδιότητες σύγκλισης $\Rightarrow$ ιδιότητες συνέχειας, παραγωγισιμότητας, ολοκληρωσιμότητας τέτοιες ώστε να έχουν πολλές εφαρμογές σε κλάδους όπως οι διαφορικές εξισώσεις, θεωρία πιθανοτήτων, κ.ο.κ.

  - Παραδείγματα σειρών συναρτήσεων με προφανείς αναλυτικές ιδιότητες πέραν της ύπαρξης του X^*. Μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να βρίσκουμε σειρές.

$X = \mathbb{R}$

Ορισμός. Έστω $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ κ' (α_n) πραγματική ακολουθία: Δυναμοσειρά (power series) με κέντρο (center) το α κ' συντελεστές (coefficients) τους $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ ονομάζεται η σειρά συναρτήσεων:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i \qquad [*] \qquad \square$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 (x-\alpha) + \alpha_2 (x-\alpha)^2 + \alpha_3 (x-\alpha)^3 + \dots + \alpha_n (x-\alpha)^n + \dots$$

— Η [*] είναι σειρά ως προς την ακολουθία συναρτήσεων $(\alpha_0, \alpha_1(x-\alpha), \alpha_2(x-\alpha)^2, \dots, \alpha_n(x-\alpha)^n, \dots)$ (οι οποίες είναι πολυώνυμα ως προς το $x-\alpha$), όπου $\alpha_n(x-\alpha)^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$= X$

— Γενικεύουν τις κατηγορίες των σταθερών, γραμμικών, κ.ο.κ., πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Π.χ. η $f(x)=\alpha+\beta x$ μπορεί να γραφεί (μοναδικά;) ως η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ με $a=0$, $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$, $a_n=0$ $\forall n\geq 2$, κ.ο.κ.

— Πολύ περισσότερο οι δυναμοσειρές συμπεριφέρονται τα πολυώνυμα ως προς την πράξη του κατά σημείου πολλαπλασιασμού [τα πολλαπλασιαστικά αντίστροφα των πολυωνύμων είναι δυναμοσειρές]. Η αλγεβρική θεωρία που μελετάει τις αλγεβρικές τους ιδιότητες [χωρίς να ενδιαφέρεται για ζητήματα σύγκλισης] ονομάζεται θεωρία Τυπικών Δυναμοσειρών (Formal power series theory). □

Παραδείγματα:

1. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ (γεωμετρική σειρά) $a=0$, $a_n=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, $a=0$, $a_n=\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i$, $\alpha=1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, n\in\mathbb{N}$

4. $\sum_{i=0}^{\infty} i!\, x^i$ ✓ , $\alpha=0$, $a_n = n!$, $n\in\mathbb{N}$

5. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)} \frac{1}{x^i} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + \dots$, δεν φαίνεται είναι δυναμοσειρά (γιατί;)

Αλλά είναι σχετικά εύλογο να διαπιστώσουμε ότι η 5. είναι σύνθεση $(f\circ g)(x)$ με

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} y^i , \quad \alpha=0, \quad a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}, n\in\mathbb{N}$$

✓ δυναμοσειρά

$$g(x) = \frac{1}{x} ;$$

Σύγκλιση Δυναμοσειράς:

Ποιό είναι το x^* για την $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i$;

Θεώρημα Σύγκλισης του Hadamard:

Για την $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-\alpha)^i$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. συγκλίνει μόνο για $x=\alpha$

2. συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$

3. συγκλίνει για κάθε x σε διάστημα με κέντρο το α κ' ακτίνα $r>0$. $\square$

* Το $X^* \neq \emptyset$ σε κάθε περίπτωση

* Το X^* είναι σε κάθε περίπτωση συνεκτικό

["όχι σπασμένο σε κομμάτια"]

* Στο 3. έχει την μορφή διαστήματος $(\alpha-r, \alpha+r)$ ή $[\alpha-r, \alpha+r)$ ή $(\alpha-r, \alpha+r]$ ή $[\alpha-r, \alpha+r]$ με κέντρο το α κ' ακτίνα το r. Καταχρηστικά μπορούμε να θεωρούμε ότι κ' στις περιπτώσεις 1 κ' 2 έχουμε διαστήματα με κέντρο το α, και ακτίνα $r=0$ στην 1 κ' $r=+\infty$ στην 2.

Οπότε το X^* έχει πάντα την μορφή διαστήματος

$\to \Delta\Sigma$

Το X^* ονομάζεται διάστημα σύγκλισης] με κέντρο το α κ' ακτίνα r [που ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης]

– Αν $r=0$ το ΔΣ θα ονομάζεται εκφυλισμένο (degenerate)

[Σκιαγράφηση Απόδειξης του Θ. Hadamard]

Θα χρησιμοποιήσουμε επί της ουσίας τον αλγόριθμό μας.

Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i$

① Για $x=\alpha$ είναι αδύνατη η εφαρμογή του Κ.Π. αφού $(x-\alpha)^i\big|_{x=\alpha} = 0 \ \forall i>0$. Αλλά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i \Big|_{x=\alpha} = \alpha_0 (x-\alpha)^0 = \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

Άρα $\alpha \in X^*$

② Έστω ότι $x \neq \alpha$ κ' η (α_i) τέτοια ώστε να μπορεί να γίνει χρήση του Κ.Π.:

$$\frac{|a_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|a_n(x-a)^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-a|$$

(α) Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \geq 0$ τότε

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x-a| \longrightarrow \ell |x-a|$ οπότε

(I) $\ell|x-a| < 1 \iff \begin{cases} 0|x-a|<1, & \ell=0 \quad (*) \\ |x-a| < 1/\ell, & \ell>0 \quad (**) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \text{ισχύει } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ κ' } x \neq a \\ \text{ισχύει } \forall x \in (a-1/\ell, a+1/\ell) \text{ κ' } x \neq a \end{cases}$

Έχουμε απόλυτη σύγκλιση

(II) $\ell|x-a| > 1$ (δυνατό μόνο αν το $\ell>0$ κ' $x \in (-\infty, a-1/\ell) \cup (a+1/\ell, +\infty)$)

Έχουμε απόκλιση

(III) αν $\ell>0$ κ' $x = a-1/\ell$ ή $x = a+1/\ell$ έχουμε μη αποφασιστικότητα

(β) αν $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ αποκλίνει τότε $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-a|$ αποκλίνει $\forall x \neq a$.

Συνοψίζοντας:

① + ②.α. (*) $\quad X^*=\mathbb{R}$ (περίπτωση 2 του Θ) $r=+\infty=1/\ell$

① + ②.β $\quad X^*=\{\alpha\}$ (περίπτωση 1 του Θ) $r=0=1/\ell$

① + ②.α (*) + Ⅰ $\quad X^*=(\alpha-1/\ell,\alpha+1/\ell)$ ή

+ Ⅱ

+ Ⅲ $\quad (\alpha-1/\ell,\alpha+1/\ell]$ ή $[\alpha-1/\ell,\alpha+1/\ell)$

ή $[\alpha-1/\ell,\alpha+1/\ell]$ $\quad r=1/\ell$

* Προφανώς υπάρχουν κ' άλλες περιπτώσεις που αφορούν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ οι οποίες όμως θα μας οδηγούσαν στα 1-3.

* Όταν $0<r<+\infty$, το τι συμβαίνει στα άκρα του Δ.Σ. θα πρέπει να εξετάζεται κατά περίπτωση.

Παραδείγματα:

Μπορούμε συνοπτικά να αναφερθούμε καταχρηστικά στις τρεις περιπτώσεις ως εξής:

ΔΣ έχει κέντρο το α κ' $r=1/\ell$

κ' όταν $\ell=0$ $\quad r=+\infty$ $\quad X^*=\mathbb{R}$

$\ell=+\infty$ $\quad r=0$ $\quad X^*=\{\alpha\}$

$\ell>0$ $\quad r>0$ $\quad X^*$ διάστημα με κέντρο το α κ' πεπ. ακτίνα

1. γεωμετρική — $\Delta\Sigma = (-1,1)$ [περ. 3]

$r=1$,

$a_n = 1 \; \forall n$

2. Έχουμε ήδη εξάγει ότι $\Delta\Sigma = \mathbb{R}$ [περ. 2]

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (x-1)^i$: ✓

- για $x=1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (x-1)^i \Big|_{x=1} =$ ✓

$$= \frac{(-1)^0}{0+1} 0^0 = 1, \quad 1 \in \Delta\Sigma$$

όπως περιμέναμε

- για $x \neq 1$ δεν έχουμε μηδενισμούς, επομένως:

$$\frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} (x-1)^{n+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^n \right|} = \frac{n+1}{n+2} |x-1| \to |x-1| \quad (\ell = 1)$$

1

Επομένως $\forall x$: $\begin{cases} |x-1|<1 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0,2) \\ x \neq 1 \end{cases}$ έχουμε σύγκλιση

κ' $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ έχουμε απόκλιση

Τι συμβαίνει στο σύνορο του $(0,2)$;

- για $x=0$, $\displaystyle \left.\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i\right|_{x=0}$

$\displaystyle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i}}{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ που αποκλίνει

αρμονική σειρά

άρα $0 \notin \Delta\Sigma$

- για $x=2$, $\displaystyle \left.\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i\right|_{x=2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} 1^i$

$\displaystyle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2$ οπότε $2 \in \Delta\Sigma$.

→ Εναλ. αρμονική

$\Rightarrow \Delta\Sigma = (0,2]$ [παρ. 3]

4. Έχουμε ήδη δει ότι $\Delta\Sigma = \{0\}$ [παρ. 1]

5. Έχουμε ήδη δει ότι $X^* = (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$

↳ για αυτήν αποδείξη ότι δεν έχουμε συναρτήσεις — δεν ισχύει το Θ. Hadamard

Τέλος Διάλεξης 25