Διάλεξη 19

- Ακολουθίες (πραγματικών) Συναρτήσεων

- Σημειακά Όρια

Γενικεύσεις Πραγματικών Ακολουθιών:

Ακολουθίες Πραγματικών Συναρτήσεων

→ Πραγματικές Ακολουθίες: Συναρτήσεις $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

αν επιτρέψουμε στο πεδίο τιμών να είναι γενικότερα κάποιο $Y \neq \emptyset$ τότε:

$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots \in Y$

Ορισμός: Έστω $Y \neq \emptyset$. Ακολουθία από στοιχεία του Y ονομάζεται οποιαδήποτε συνάρτηση $\mathbb{N} \to Y$.

$$g \Downarrow (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$$

Παραδείγματα:

1. $Y = \mathbb{R}$ → επανερχόμαστε στον ορισμό της πραγματικής ακολουθίας

2. $Y = \mathbb{R}^k$, $k > 1$ → ακολουθίες από k-διάστατα πραγματικά διανύσματα:

Ποιά θα είναι η διανυσματική μορφή ενός τέτοιου αντικειμένου;

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0k} \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^k, \ \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1k} \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^k, \ \dots, \ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{\begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^k, \dots \right)$$

Δηλ.

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ με

$$g(n) = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

αν "αγνοήσουμε" τις εσωτερικές παρενθέσεις το προκύπτον γίνεται "ισοδύναμο" με

$$
\begin{array}{r}
k \text{ γραμμές}
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{n1} & \cdots \\
x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{n2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{0k} & x_{1k} & \cdots & x_{nk} & \cdots
\end{pmatrix}
$$

δηλ. για πραγματική $\underline{k \times \infty}$ μήτρα!

3. Y = σύνολο των πραγματικών ακολουθιών

Αντίστοιχος:

$$
\left(
\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0m} \\ \vdots \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1m} \\ \vdots \end{pmatrix},
\ldots,
\begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nm} \\ \vdots \end{pmatrix},
\ldots
\right)
$$

που μοιάζει με το

$$
\begin{pmatrix}
x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{n1} & \cdots \\
x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{n2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{0m} & x_{1m} & \cdots & x_{nm} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}
$$

δηλ. $g : \mathbb{N} \to Y$ με $g(n) = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nm} \\ \vdots \end{pmatrix}$

δηλ. πραγματική $\infty \times \infty$ μήτρα!

Γενίκευση του 1-3:

- Έστω $X \neq \emptyset$ και $Y = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$

↳ δηλ. το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$

- Βάσει του γενικού ορισμού παραπάνω:

Ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$ θα είναι συνάρτηση $\mathbb{N} \to Y$ δηλ. συνάρτηση g όταν υπολογίσει στο $n \in \mathbb{N}$ το $g(n)$ μας αποδίδει μια συνάρτηση $X \to \mathbb{R}$ — δηλ. διανυσματικά μια τέτοια ακολουθία είναι διάνυσμα με πρώτο στοιχείο αλλά χωρίς τελευταίο στοιχείο, πλήθος στοιχείων ίσο με το πλήθος του $\mathbb{N}$, κ' του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις $X \to \mathbb{R}$ — δηλ.

$$(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$$

όπου $f_n : X \to \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$

ή ισοδύναμα $g : \mathbb{N} \to Y$ με $g(n) := f_n$

Άσκηση: Γιατί τα παραδείγματα 1-3 εμπίπτουν σε αυτόν τον ορισμό; (Ποιό είναι το X σε καθένα από αυτά;)

Παραδείγματα:

I. $X = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (αφού το X μονοσύνολο οποιαδήποτε συνάρτηση $X \to \mathbb{R}$ θα είναι απλώς η επιλογή κάποιου πραγματικού αριθμού) (*)

Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(\alpha) = (n+1)^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$

κ' η ακολουθία συναρτήσεων $\left(\underset{f_0}{1^\alpha}, \underset{f_1}{2^\alpha}, \underset{f_2}{3^\alpha}, \ldots, \underset{f_n}{(n+1)^\alpha}, \ldots \right)$

Εξαιτίας του (*) αυτό είναι απλώς μια πραγματική ακολουθία.

II. $X = \mathbb{R}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \exp(n+x)$

οπότε έχουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$\left(\underset{f_0}{e^x}, \underset{f_1}{e^{1+x}}, \underset{f_2}{e^{2+x}}, \ldots, \underset{f_n}{e^{n+x}}, \ldots \right)$$

III. $X=\mathbb{R}$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\exp(nx)$

Οπότε ακολουθούμε την:

$$\left(\underset{f_0}{1}, \underset{f_1}{e^x}, \underset{f_2}{e^{2x}}, \dots, \underset{f_n}{e^{nx}}, \dots\right)$$

σταθερή συνάρτηση στο 1

IV. $X=\mathbb{R}$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\exp\left(\frac{x}{n+1}\right)$

Οπότε ακολουθούμε την:

$$\left(\underset{f_0}{e^x}, \underset{f_1}{e^{x/2}}, \underset{f_2}{e^{x/3}}, \dots, \underset{f_n}{e^{\frac{x}{n+1}}}, \dots\right)$$

V. $X=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f_n:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{1}{x}$

Οπότε ακολουθούμε την:

$$\left(\underset{f_0}{1/x}, \underset{f_1}{\frac{1}{2x}}, \underset{f_2}{\frac{1}{3x}}, \dots, \underset{f_n}{\frac{1}{(n+1)x}}, \dots\right)$$

Παρατηρήσεις:

* Επιτρέποντας στο X να είναι οποιο μη κενό σύνολο (κ' όχι αναγκαστικά μόνο το $\mathbb{R}$ ή υποσύνολό του), αποκτούμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε πολύπλοκα παραδείγματα (εξαιρετικά πιο πεoften πολύπλοκα των I – V όπως θα δούμε παρακάτω)

* Θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε ακόμη πιο περίπλοκες έννοιες επιτρέποντας στο X να εξαρτάται από το n.

* Επειδή το X δεν εξαρτάται από το n μπορούμε πέραν του ορισμού να αντιληφθούμε την $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ με δύο

ακόμη τρόπους:

α, Αν. 1. α_ν $x\in X$ τότε η

πρώτη συνοδιοφσίσση

$$(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$$
$\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$

Είναι πραγματική ακολουθία. Επομένως

η $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ μπορεί να γίνει

αντιληπτή ως

$$(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots) \ \forall x\in X$$

δηλ. ως κατάλογος από πραγματικές ακολουθίες

- για $\forall x\in X$

Π.χ. στο IV για $x=0$ έχουμε την

$$(e^0, e^{0/2}, e^{0/3}, \dots, e^{0/n+1}, \dots)$$
$$=(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$$

για $x=1$ έχουμε την

$$(e^1, e^{1/2}, e^{1/3}, \dots, e^{1/n+1}, \dots) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Η Αν.1 θα είναι πολύ χρήσιμη για τον ορισμό του σημειακού ορίου.

δεύτερη αναπαράσταση

β. Αν.2 η $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ μπορεί απλούστερα να ειδωθεί ως $G: \mathbb{N} \times X \to \mathbb{R}$

με $G(\underline{\underline{n,x}}) := f_n(x)$

(δηλ. είναι "απλώς" μια "διμεταβλητή" συνάρτηση που δέχεται $n \in \mathbb{N}$ κ' $x \in X$ κ' μας δίνει πραγματικό αριθμό)

π.χ. στο $\underline{\text{IV}}$, $G(n,x) = \exp\left(\frac{x}{n+1}\right)$

* Μπορούμε αντίστοιχα με την περίπτωση που $X = \mathbb{R}$ να ορίσουμε έννοιες ισότητας, κ' αλγεβρικών πράξεων μεταξύ ακολουθιών από συναρτήσεις $X \to \mathbb{R}$

(ή/και να ορίσουμε πιο περίπλοκες πράξεις)

Σημειακά Όρια: Pointwise limits

Ένας τρόπος να ορίσουμε έννοια ορίου φιας

$(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Είναι να εκμεταλλευτούμε την Αν. 1 (κατάλογος από πραγματικές ακολουθίες) κ' τα όσα ξέρουμε για τα όρια πραγματικών ακολουθιών:

Ορισμός [Σημειακό Όριο]. Έστω η $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ ακολουθία συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$. Έστω το σύνολο

$$X \supseteq X^* := \{ x \in X : \lim f_n(x) \text{ υπάρχει} \}.$$

Αν το $X^* \neq \emptyset$ τότε το σημειακό όριο της ακολουθίας είναι συνάρτηση $f : X^* \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = \lim f_n(x)$, $x \in X^*$.

Αν $X^* = \emptyset$ τότε το σημειακό όριο δεν υπάρχει.

↳ η ακολουθία είναι σημειακά αποκλίνουσα

Σημ. Το σημειακό όριο θα είναι συνάρτηση που μας δίνει τα όρια των $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ για κάθε $x \in X$ που αυτό υπάρχει.

– Το π.ο. της f θα είναι γενικά $\subseteq$ του X

(αφού είναι δυνατόν και υπάρχουν $x \in X$ για τα οποία η $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ είναι αποκλίνουσα)

Παραδείγματα:

I. $X^* = \begin{cases} X, & \alpha \leq 0 \\ \emptyset, & \alpha > 0 \end{cases}$ κ' $f(x) = \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \end{cases}$

II. $X^* = \emptyset$ αφού $\lim e^{n+x} = +\infty \ \forall x \in \mathbb{R}$

Το σημειακό όριο δεν υπάρχει

III. $X^* = (-\infty, 0]$ κ' $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$X = \mathbb{R}$ "η συνέχεια χάνεται στο όριο"

IV. $X^* = X = \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

V. $X^* = X = \mathbb{R} - \{0\}$ με $f(x) = 0 \ \forall x \in X$.