Διαλέξεις 20-21-22-23-24
-25

- Σειρές Πραγματικών Συναρτήσεων

- Αλγόριθμος γενικού προσδιορισμού του Πεδίου Ορισμού

- Παραδείγματα

- Εφαρμογή στα Οικονομικά:

Συνάρτηση Ωφέλειας από την Διαχρονική Κατανάλωση

Διάλεξη 20

Σειρές πραγματικών συναρτήσεων:

* Η έννοια του σημειακού ορίου μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε την έννοια της σειράς συναρτήσεων:

$$(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$$

$$f_n : X \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

* Επειδή το X είναι κοινό πεδίο ορισμού, έχει νόημα το σημειακό άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους μελών της ακολουθίας:

αν $i, j \in \mathbb{N}$ τότε η $f_i + f_j : X \to \mathbb{R}$

με $(f_i + f_j)(x) := f_i(x) + f_j(x)$

$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$

* Επομένως κατ' αναλογία με τις πραγματικές ακολουθίες έχει νόημα η διαδικασία (κατά σημείο) μερικής άθροισης κ' εδώ:

$$\text{ΑΜΑ}: \left(f_0, f_0+f_1, f_0+f_1+f_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} f_i, \dots\right)$$

σημειακά αθροίσματα

με $\sum_{i=0}^{n} f_i : X \to \mathbb{R}$, $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\right)(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$

→ κατάλογος από πραγματικές ΑΜΑ - μία $\forall x \in X$

* Συνεπώς τώρα μπορεί να οριστεί η $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ως το σημειακό όριο της ΑΜΑ:

– $\sum_{i=0}^{\infty} f_i : X^* \to \mathbb{R}$ → πραγματική σειρά

$$X^* = \left\{ x \in X : \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \text{ συγκλίνει} \right\}$$

– αν $x \in X^*$, $\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$

- Αν $X^* = \emptyset$ [δηλ. η δυν. σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ αποκλίνει $\forall x \in X$]

Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ δεν υπάρχει.

$\Rightarrow$ η $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ είναι "κατάλογος" από πραγματικές σειρές - για $\forall x \in X^*$

$\Downarrow$

δεδομένης $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ βάσει των όσων έχουμε πει για τις πραγματικές σειρές είναι "δύσκολο" να βρούμε την $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$

$\downarrow$

Μπορούμε όμως να περιγράψουμε έναν "πλήρη" αλγόριθμο "εντοπισμού" του X^*

$\swarrow$ Χρήση Κριτηρίου Πηλίκου

$\swarrow$ σε κάποιες εφαρμογές είναι αρκετό

"Αλγόριθμος" Μερικού Εντοπισμού του X^*:

Έστω η $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$· μας ενδιαφέρει να βρούμε (το δυνατόν πληρέστερα) το Π.Ο. της $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$

1. Για τα $x \in X$ που είναι εφικτό σχηματίζουμε τα πηλίκα $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| := \ell_n(x)$

- Βρίσκουμε όταν υπάρχει το $\ell(x) := \lim \ell_n(x)$ ✓
  - * αν $\ell(x) < 1 \Rightarrow x \in X^*$
  - * αν $\ell(x) > 1 \Rightarrow x \notin X^*$
  - * αν $\ell(x) = 1 \Rightarrow$ η συγκεκριμένη διαδικασία δεν μπορεί να αποφανθεί

2. Για τα $x \in X$ που δεν είναι εφικτή η κατασκευή των πηλίκων, ή το ℓ δεν υπάρχει ή το ℓ είναι 1 χρησιμοποιούμε όποια

Διαθέσιμη πληροφορία για την συμπεριφορά της προσαρμοστικής σειράς $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ → Αναφέρεις βήμα θα το δούμε στα παραδείγματα

* Γενικά το παραπάνω εντοπίζει υποσύνολο του X^*
θα δίνεται το X, οι $f_0, f_1, \dots, f_n$ θα ζητείται η εφαρμογή του παραπάνω για τον μερικό εντοπισμό του π.σ. $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$

Παραδείγματα Χρήσης του Αλγορίθμου:

1. $X=\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$

- Όταν $x=0$ η κατασκευή των πηλίκων είναι αδύνατη. Όμως $\left.\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right|_{x=0} = 0^0 + \underbrace{0^1+\dots+0^n+\dots}_{=0}$
$= 0^0 = 1 \Rightarrow 0\in X^*$
↳ Παράδειγμα του βήματος 2

- Όταν $x\neq 0$ $f_n(x) = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x^{n+1-n}| = |x^1| = |x|$
$\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$
$= l(x)$

Επομένως $\ell(x) < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,0) \cup (0,1)$
$\Rightarrow x \in X^*$

— $\ell(x) > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow x \notin X^*$

— $\ell(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ μη απόφανση

Άρα Όταν $x=0$ ή $x \in (-1,0) \cup (0,1) \Rightarrow x \in X^*$

Όταν $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow x \notin X^*$

Δεν γνωρίζουμε για $x = \pm 1$

Επομένως $X^* \supseteq (-1,1)$

Αλλά η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ είναι επί της ουσίας η γεωμετρική σειρά $\Rightarrow$ Ξέρουμε ότι αποκλίνει για $x = \pm 1$

↳ Παράδειγμα χρήσης βήματος 2.

Επομένως $X^* = (-1,1)$

↳ η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ καλώς ορισμένη συνάρτηση $(-1,1) \to \mathbb{R}$

[Γνωρίζουμε παρατηρώντας: εκτός παραθύρου $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$]

$\forall x \in (-1,1)$

2. $X = \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ ✓, $n \in \mathbb{N}$ Ποιο είναι το Π.Ο. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$

– για $x=0$ δεν είναι κατασκευάσιμα τα σημεία: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\Big|_{x=0} = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \dots + \frac{0^n}{n!} + \dots}_{=0}$

Παράδειγμα χρήσης δύναμης 2.

$= \dfrac{0^0}{0!} = 1 \Rightarrow 0 \in X^*$

– για $x \neq 0$ έχουμε $\ell_n(x) := \left| \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|$

$= \left| \dfrac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = |x| \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{|x|}{n+1}$

$\dfrac{n!}{n!\,(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$

– $\ell_n(x) = \dfrac{|x|}{n+1} \longrightarrow \underset{\ell(x)}{0} \quad \forall x \neq 0$

– $\ell(x) = 0 < 1 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$ αν $x \neq 0,\ x \in X^*$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω:

αν $x=0$ ή $x \neq 0 \Rightarrow x \in X^*$

$\Leftrightarrow \quad X^* = \mathbb{R} = X$

Επομένως η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλά ορισμένη

(Αλλά ποια συνάρτηση είναι; Συνεχής; Παραγωγίσιμη; Δεν μπορεί να μας το πει ο αλγόριθμος)

Ποιο είναι το π.ο. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix}$

8. $X=\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n+1} e^{nx}$

– $\forall x \in \mathbb{R}$ $\ell_n(x) := \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|1/n+2 \, e^{(n+1)x}|}{|1/n+1 \, e^{nx}|}$

$= \frac{n+1}{n+2} e^{(n+1)x - nx} = \frac{n+1}{n+2} e^x \to e^x = \ell(x)$

– $*$ $\ell(x) < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow x \in X^*$

$*$ $\ell(x) > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow x \notin X^*$

$*$ $\ell(x) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ μη απόφανση

– Δηλαδή $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix}\Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1} \overset{=1}{e^{i\cdot 0}}$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ → Αρμονική σειρά
Γνωρίζουμε ότι αποκλίνει $\Rightarrow 0 \notin X^*$

Συνεπώς η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$
καλώς ορισμένη

4. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = n!\, e^{n\cdot x}$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \sum_{i=0}^{\infty} i!\, e^{i\cdot x}$

– $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \ell_n(x) := \dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \dfrac{|(n+1)!\, e^{(n+1)x}|}{|n!\, e^{nx}|}$

$= (n+1)\, e^{(n+1)x - nx} = (n+1) e^{x} \longrightarrow +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* αν $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \notin X^* \Rightarrow X^* = \emptyset$

η $\sum_{i=0}^{\infty} i!\, e^{ix}$ δεν είναι καλώς ορισμένη πραγματική συνάρτηση

Τέλος Διάλεξης 20

Διάλεξη 21

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}\frac{1}{x^i}$$

5. $X = \mathbb{R}-\{0\}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{x^n}$

$= (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

– $\forall x\in X$, $l_n(x) := \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{-(n+1)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1} x^{-n}\right|} = \left|\frac{1/x^{n+1}}{1/x^n}\right|$

$= \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{|x|} \to \frac{1}{|x|} := l(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$

$\frac{n+1}{n+2}\to 1$

– * $\begin{cases} l(x)<1 \\ x\in\mathbb{R}-\{0\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{|x|}<1 \\ \kappa' \ x\in\mathbb{R}-\{0\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>1 \\ \kappa' \ x\in\mathbb{R}-\{0\}\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$\Rightarrow x\in X^*$

* $\begin{cases} l(x)>1 \\ x\in\mathbb{R}-\{0\}\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in(-1,1)-\{0\} \Rightarrow x\notin X^*$

* $l(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{|x|}=1 \\ \kappa' \ x\in\mathbb{R}-\{0\}\end{cases} \Leftrightarrow x=\pm1$ για απόφανση

Παράδειγμα 2 εφαρμογής Βήμ. 2

– αλλά $\left.\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\frac{1}{x^i}\right|_{x=1} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}$

που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική (που γνωρίζουμε ότι συγκλίνει)

Επομένως $1\in X^*$

– Επίσης $\left.\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\frac{1}{x^i}\right|_{x=-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\frac{1}{(-1)^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}$

Που είναι η αρμονική σειρά που γνωρίζουμε ότι αποκλίνει. Άρα $-1 \notin X^*$.

Επομένως η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}\frac{1}{x^i} : (-\infty,-1)\cup[1,+\infty) \to \mathbb{R}$

είναι καλώς ορισμένη.

* Παρατηρούμε ότι όταν $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ έχουμε απόλυτη σύγκλιση

$x=1$ έχουμε κατά συνθήκη σύγκλιση

σύγκλιση $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1+x_2}$

διμεταβλητές συναρτήσεις

6. $X=\mathbb{R}^2$, $x=\binom{x_1}{x_2}$, $f_n(x)=\frac{1}{n+1}e^{nx_1+x_2} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

- $\forall x\in\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)$, $l_n(x) := \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\left|\frac{1}{n+2}\, e^{(n+1)x_1+x_2}\right|}{\left|\frac{1}{n+1}\, e^{nx_1+x_2}\right|} =$

$= \frac{n+1}{n+2}e^{x_1} \longrightarrow e^{x_1} := l(x)$ $\qquad \frac{n+1}{n+2}\to 1$

$e^{(n+1)x_1+x_2-nx_1-x_2}$

μονομεταβλητή συνάρτηση σταθερή ως προς x_2

- * $l(x)<1,\ x\in\mathbb{R}^2 \iff e^{x_1}<1,\ x\in\mathbb{R}^2 \iff x_1<0,\ x\in\mathbb{R}^2 \iff$ αν $x=\binom{x_1}{x_2}$ με $x_1<0$ $\in X^*$

* $\begin{cases} l(x)>1 \\ x\in\mathbb{R}^2\end{cases} \iff \begin{cases} e^{x_1}>1 \\ x\in\mathbb{R}^2\end{cases} \iff \begin{cases} x_1>0 \\ x\in\mathbb{R}^2\end{cases} \iff$ αν $x=\binom{x_1}{x_2}$ με $x_1>0$

$\Rightarrow x\notin X^*$

$$* \begin{cases} \ell(x)=1 \\ x\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1}=1 \\ x\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix},\ \forall x_2\in\mathbb{R}$$

Τότε έχουμε μη πληροφοριακό τύπο

$$- \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1+x_2}\Big|_{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}} =$$

ανεξάρτητο του i

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{x_2} = \underbrace{e^{x_2}}_{\neq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$$

αρμονική σειρά → απειρίζεται

Παρατήρηση:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1+x_2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1} e^{x_2} =$$

$$= e^{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1}$$

→ μόνο το x_1 παίζει ρόλο στο ζήτημα της σύγκλισης όπως είδαμε

Το ζητούμενο απειρίζεται

Άρα $\forall x=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}$ η $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1+x_2}\Big|_{x=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}}$

απειρίζεται $\Rightarrow$ αν το $x=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}$ $\forall x_2\in\mathbb{R}$

τότε το $x \notin X^*$.

Η $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix_1+x_2}$ είναι καλώς ορισμένη πραγματική συνάρτηση

όταν τα $x\in\mathbb{R}^2$ που ορίζεται περιορίζονται να είναι

τα x της μορφής $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, με $x_1<0$, $x_2\in\mathbb{R}$

Τέλος Διάλεξης 21

Διάλεξη 22

Εφαρμογή στην Οικονομική Θεωρία

– Διαχρονική κατανάλωση –

Προτιμήσεις – καλώς ορισμένο Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Θα μελετήσουμε εφαρμογή των παραπάνω στην Οικονομική Θεωρία:

Υπόβαθρο: - Δυναμική Οικονομία που "ζει" σε διακριτό χρόνο

- $t \in \mathbb{N}$, 0 σήμερον, $t > 0$ μελλοντικές χρονικές στιγμές

Έστω αντιπρόσωπος δρων στην οικονομία που "αντιπροσωπεύει" (ορίζει χρησιμότητα από) την κατανάλωση του σε κάθε χρονική στιγμή. Αν $\underline{c_t} \geq 0$ η κατανάλωση του στην στιγμή t τότε η ακολουθία (πραγματική)

$\underline{(c_0, c_1, \ldots, c_t, \ldots)}$, $c_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$

Συνοψίζει το αντικείμενο χρησιμοποιώντας του. Ονομάζεται

διαχρονική ροή κατανάλωσης - consumption flow

(ένα ολόκληρο πρόγραμμα | εμφάνισης πραγματικών ακολουθιών στα οικονομικά)

↳ οποία πραγματική ακολουθία μη αρνητικών όρων

Ανάλογως με τα προβλήματα βέλτιστης επιλογής σε πεπερασμένης διάστασης χώρους που μελετάτε στην Μέρος I τα παραπάνω σχετίζεται με την παρακάτω δομή προβλήματος επιλογής:

I. Εφικτό σύνολο

δηλ. από πραγματικές ακολουθίες μη αρνητικών όρων

↳ συλλογή από διαχρονικές ροές κατανάλωσης που είναι διαθέσιμες στον δράστη βάσει διαχρονικών πόρων που έχει στην διάθεση του

[π.χ. διαχρονικοί εισοδηματικοί περιορισμοί]

II. Προτιμήσεις επί του εφικτού συνόλου που είναι δυνατόν να αναπαρίστανται από συνάρτηση ωφέλειας Εφ. Σύνολο $\to \mathbb{R}$

III. Βέλτιστη Επιλογή: Μεγιστοποίηση της συνάρτησης ωφέλειας (όταν υπάρχει) επί του εφικτού συνόλου

Στα παρακάτω θα δούμε παραδείγματα των I, II, (και III) στο διαχρονικό υπόβαθρό μας: Τα αντίστοιχα αντικείμενα θα είναι πιο περίπλοκα από αυτά που συναντήσατε στην Μίκρο I επειδή θα αφορούν ακολουθίες (αντί π.χ. σημείων στο $\mathbb{R}^2$ κ.ο.κ.)

I. Παράδειγμα Εφικτού Συνόλου ✓

Ο καταναλωτής στο 0 έχει στην διάθεσή του

Αρχική προικοδότηση πόρου που μπορεί να χρησιμοποιήσει για να χρηματοδοτήσει την ροή κατανάλωσής του. Έστω ότι αυτός είναι το

$k_0 > 0$. [Αντίστοιχα ο πόρος που του είναι διαθέσιμος στην t είναι ο k_t]

Οπότε η σταθμοποιητική ακολουθία

$$(k_0, k_1, \ldots, k_t, \ldots)$$

εξωγενώς προσδιορισμένο

προκύπτουν από το k_0 κ' τις αποφάσεις που παίρνει για την κατανάλωσή του

συνοψίζει τους διαχρονικούς διαθέσιμους πόρους.

Ο k_0 του είναι εξωγενώς δεδομένος - οι υπόλοιποι εξαρτώνται από τις επιλογές του.

Σε κάθε χρονική στιγμή του είναι διαθέσιμη τεχνολογία (στιγμιαίου) μετασχηματισμού του $k_t \to k_t^\alpha$ με $\alpha \in (0,1]$. Ανάλογα με την τιμή του k_t ο τελικά διαθέσιμος πόρος στο t, k_t^α μπορεί τα είναι $< k_E \rightarrow$ φθορά απόδοση

$> k_E \rightarrow$ μεγέθυνση - παραγωγή

Αν το $\alpha = 1$ ο μετασχηματισμός είναι ταυτοτικός.

Η τεχνολογία μετασχηματισμού περιγράφεται από το α που είναι εξωγενές κ' ανεξάρτητο του t.

Τα παραπάνω προσδιορίζουν το εξής σύνολο βάσει του παραπάνω δένδρο-συμβολισμού:

→ καταν.

$$k_0 \rightarrow k_0^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} c_0 \\ k_1 \end{cases} \rightarrow k_1^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} c_1 \\ k_2 \end{cases} \rightarrow k_2^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} c_2 \\ k_3 \end{cases}$$

μετασχηματισμός

στιγμή

διαθέσιμος πόρος στο $t=1$

$$\rightarrow \dots \rightarrow k_t^{\alpha} \rightarrow \begin{cases} c_t \\ k_{t+1} \end{cases} \rightarrow \dots$$

Σε κάθε χρονική στιγμή ο διαθέσιμος μετασχηματισμένος πόρος k_t^{α} μοιράζεται μεταξύ κατανάλωσης σε κ' πόρου k_{t+1} που φυλάσσεται για το μέλλον

Επομένως το εφικτό σύνολο θα αποτελείται από όλες τις διαχρονικές ροές κατανάλωσης που ικανοποιούν το προηγούμενο διάγραμμα

δεδομένων των k_0, α δηλαδή:

$$\mathcal{E}\mathcal{\Sigma}(k_0,\alpha) = \{(c_0, c_1, \ldots, c_t, \ldots),\ c_t \geq 0\ \forall t,$$
$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha},\ \forall t,\ k_t \geq 0\ \forall t\}$$ ✓

συγκροτείται δηλαδή από τις $(c_0, c_1, \ldots, c_t, \ldots)$

που έχουν μη αρνητικούς όρους κ' ικανοποιούν

το διαχρονικό σύστημα ανισοτήτων (επιτοκιακ-τικών περιορισμών): ✓ $c_0 + k_1 \leq k_0^{\alpha}$

✓ $c_1 + k_2 \leq k_1^{\alpha}$

$\vdots$

✓ $c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha}$

$\vdots$

οι ανισότητες που βάζει του δένδρο διαγράμματος θα έπρεπε να είναι αυστηρές ισότητες αφήνουν κ' την δυνατότητα απόρριψης πόρων μεταξύ χρονικών στιγμών

"αποθεματικούς εισοδηματικούς" από εισοδηματικούς περιορισμούς → διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός

Κάποιες Ιδιότητες του Εφικτού Συνόλου:

αν π.χ. καταναλώσει όλους τους διαθέσιμους πόρους στο $t=1$ τότε σχηματίζεται η διαχρονική ροή κατανάλωσης $(0, k_0^{\alpha^2}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

1. $E\Sigma(k_0,\alpha) \neq \emptyset$

Παρατηρούμε ότι η

$$(\underset{= c_0}{k_0^{\alpha}}, \underset{= c_1}{0}, \underset{= c_2}{0}, \dots, \underset{= c_t}{0}, \dots) \in E\Sigma(k_0,\alpha)$$

↳ καταναλώνονται όλοι οι πόροι στο παρόν

ή γενικότερα η

$$(0, 0, \dots, k_0^{\alpha^{t+1}}, 0, \dots, 0, \dots) \in E\Sigma(k_0,\alpha)$$

↳ καταναλώνονται όλοι οι πόροι στο t

κ.ο.κ.

Τέλος Διάλεξης 22

Επίσης [έστω $\alpha=1$] η $\rightarrow$ $c_t>0 \ \forall t \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{4}, \dots, \frac{k_0}{2^{t+1}}, \dots\right) \in E\Sigma(k_0,\alpha)$$

Αφού

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{k_0}{2^{t+1}} = \frac{1}{2} k_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2} k_0 \frac{1}{1-1/2} = k_0$$

Άσκηση: Να βρεθεί η εφικτή διαχρονική ροή κατανάλωσης όταν σε κάθε χρονική στιγμή καταναλώνεται το 1/2 του διαθ. πόρου, κ' $\alpha \in (0,1)$

Β. Αν $(c_t) \in \mathcal{E}\Sigma(k_0, \alpha)$ τότε η (c_t) φραγμένη.

Αφού η (c_t) είναι εφικτή $\Rightarrow$

αξιολογική ως συνάρτηση του t — θα βρούμε φράγμα που εξαρτάται από τα εξωγενή k_0, α

$c_t, k_{t+1} \geq 0 \ \forall t$

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} c_t \leq k_t^{\alpha} \\ k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \end{cases} \forall t \in \mathbb{N}$$

$c_t \leq k_{t-1}^{\alpha^2}$ ✓ $\forall t$

$k_t^{\alpha} \leq k_{t-1}^{\alpha^2}$

$\Rightarrow c_t \leq k_t^{\alpha} \quad t \in \mathbb{N}$

$(k_t)^{\alpha} \leq (k_{t-1}^{\alpha})^{\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{N}^* \Rightarrow c_t \leq (k_{t-1}^{\alpha})^{\alpha} = k_{t-1}^{\alpha^2} \quad \forall t \in \mathbb{N}^*$

$(k_{t-1})^{\alpha^2} \leq (k_{t-2}^{\alpha})^{\alpha^2} \quad \forall t \geq 2$

$\Rightarrow c_t \leq k_{t-1}^{\alpha^2} \leq k_{t-2}^{\alpha^3} \leq \ldots \leq k_0^{\alpha^{t+1}} \quad \forall t \in \mathbb{N}$

αναδρομικά

Επομένως

$$\begin{array}{cccccc} 0 & & 0 & & 0 & \\ \wedge\!| & & \wedge\!| & & \wedge\!| & \\ (c_0, & & c_1, & \ldots, & c_t, & \ldots) \\ \wedge\!| & & \wedge\!| & & \wedge\!| & \\ k_0^{\alpha} & & k_0^{\alpha^2} & & k_0^{\alpha^{t+1}} & \end{array}$$

$k_t^{\alpha} \leq k_{t-1}^{\alpha^2}$

✓✓✓

Και επομένως η $(k_0^{\alpha}, k_0^{\alpha^2}, \dots, k_0^{\alpha^{t+1}}, \dots)$

φράσσει κατά σημείο από πάνω την εφικτή διαχρονική

κατανάλωση. Επομένως αρκεί (γιατί;) το φράγμα

να είναι φραγμένη ακολουθία. Για το τελευταίο

αρκεί (γιατί;) το φράγμα να είναι συγκλίνουσα

ακολουθία: $\alpha \in (0,1]$

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha^{t+1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{(γιατί;)} \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to+\infty} k_0^{\alpha^{t+1}} = \begin{cases} k_0, & \alpha=1 \\ k_0^0, & \alpha<1 \end{cases} = \begin{cases} k_0, & \alpha=1 \\ 1, & \alpha<1 \end{cases}$$

Άρα η $c(t)$ φραγμένη. Αφού επιλέξαμε αυθαίρετα

ισχύει το ζητούμενο.

*. Κάθε στοιχείο του $E\Phi(k_0,\alpha)$ έχει ως

άνω φράγμα την $(k_0^{\alpha}, k_0^{\alpha^2}, \dots, k_0^{\alpha^{t+1}}, \dots)$.

Το $E\Sigma(k_0,\alpha)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο-

uniformly bounded

Προτιμήσεις Επί του Εφικτού Συνόλου

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κοινώς ορισμένη διάταξη προτιμήσεων επί του $E\Sigma(k_0,\alpha)$ που αναπαρίσταται από συνάρτηση ωφέλειας: $U: E\Sigma(k_0,\alpha) \to \mathbb{R}$

πραγματική συνάρτηση
που ορίζεται όμως επί συνόλου πραγματικών ακολουθιών [απειροδιάστατη]

* Δεν ασχολούμαστε με τις ιδιότητες που πρέπει να έχουν οι προτιμήσεις προκειμένου να αναπαρίστανται από συναρτήσεις ωφέλειας κ' μάλιστα σε αυτό το "απειροδιάστατο" υπόβαθρο.

$(c_t) \in E\Sigma(k_0,\alpha)$

Υποθέτουμε επίσης:

i. $$U((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} V_t((c_t))$$

$c \in E\Sigma(k_0,\alpha)$

πραγματικές ακολουθίες

όπου $\quad v_t \in \mathcal{E}\delta(k_0,\alpha)$, $t=0,1,\dots$

Το i. συνεπάγεται ότι η ωφέλεια από την διαχρονική κατανάλωση έχει την μορφή αθροίσματος ως προς τις V_t → ωφέλειες από την διαχρονική κατανάλωση σε κάθε t

↳ αφού $t\in\mathbb{N}$ αυτό είναι αναγκαστικά σειρά

ii. $$V_t\left((c_0,c_1,\dots,c_t,\dots)\right) := \underbrace{b^t}_{\mathrm{I.}}\,\underbrace{u(c_t)}_{\mathrm{II.}} \qquad b\in[0,1]$$

↳ ανομοιογένεια

κατανάλωση στην χρονική στιγμή t

II. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, στιγμιαία ωφέλεια

εξαρτάται μόνο από το c_t, κ' όχι από το c_i, $i\neq t$ → διαχωρίσιμες προτιμήσεις

ανεξάρτητη του t

$$U\left((c_0,c_1,\dots,c_t,\dots)\right) = \sum_{t=0}^{\infty} b^t u(c_t), \qquad c_t\in\mathbb{R}$$

↳ η στιγμιαία ωφέλεια από την κατανάλωση στην χρονική στιγμή t

I. $\beta \in [0,1)$ ↙ rate of time preference

↳ συντελεστής χρονικής προτίμησης

(το β^t αναπαριστά την σημασία / "αξία" ("μέτρο") της στιγμιαίας ωφέλειας από την κατανάλωση στο t στην συνάρτηση της σειράς που αποδίδει την ωφέλεια από την διαχρονική ροή κατανάλωσης)

- Όταν $\beta \downarrow 0$ τόσο μικρότερη η σημασία της κατανάλωσης σε απομακρυσμένες χρονικές στιγμές

Όταν $\beta = 0$ η μόνη κατανάλωση που έχει σημασία είναι η παροντική αφού $U((c_0, c_1, \dots, c_t, \dots)) = 0^0 u(c_0) = u(c_0)$

- Όταν $\beta \uparrow 1$ τόσο μεγαλύτερη η σημασία της κατανάλωσης στο απομακρυσμένο μέλλον

Όταν $\beta = 1$ (δεν επιτρέπεται από το παραπάνω)

Κάθε χρονική στιγμή έχει την ίδια σημασία στην συγκρότηση της ωφέλειας από την διαχρονική κατανάλωση

— Το β επί της ουσίας είναι γεωμετρικός συντελεστής "προεξόφλησης". Πιο περίπλοκες μορφές προεξόφλησης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν

Προεξόφληση: Προτιμήσεις μεταξύ χρονικών στιγμών

στιγμιαία ωφέλεια από την κατ. στιγμή t

$$i, ii \Longrightarrow \; U\big(C(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots)\big) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, u(c_t) \qquad (*)$$

π.χ. αν $v(x) = x^{\rho}$, $\rho \in (0, 1]$

Τότε $U\big(C(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots)\big) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho}$

* Θα πρέπει η $(*)$ να είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση $\Sigma(k_0, a) \to \mathbb{R}$

(γιατί; $\Rightarrow$ Πρόβλημα Βελτιστοποίησης)

Τέλος Διάλεξης 23

Διάλεξη 24

iii. **Πρόβλημα Βέλτιστης Επιλογής** → δεδομένης της δομής των i–ii

Η επιλογή της υπέρτερης διαχρονικής ροής κατανάλωσης αναπαρίσταται από το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max_{(c_t)\in E\Sigma(k_0,\alpha)} U((c_t)) = \max_{(c_t)\in E\Sigma(k_0,\alpha)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \qquad (*)$$

Καλώς ορισμένο του (*):

- Για να είναι εφικτή η διερεύνηση της επιλυσιμότητας του (*) [να μην υπάρχουν περιπτώσεις με το $+\infty$] θα πρέπει $\forall (c_t)\in E\Sigma(k_0,\alpha),\ U((c_t))\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow X^* = E\Sigma(k_0,\alpha).$$

- Επομένως τα όσα κάνουμε στην προηγούμενη παράγραφο του φαινομένου έχουν άμεση σχέση με το (*). Ας ελέγξουμε το αν ισχύει το παραπάνω ορισμένο για ένα γενικό παράδειγμα:

έστω ότι $u(x) := x^{\varphi}$, $\varphi \in (0,1)$

↓

φθίνουσα οριακή χρησιμότητα

Έστω λοιπόν η $\mathcal{U}((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\varphi}$, $(c_t) \in \ell^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$

Για αυτήν θα πρέπει να βρούμε το (*).

- Επειδή για αυθαίρετο $(c_t) \in \ell^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$, δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια το τι συνάρτηση του t είναι το c_t, δεν είναι εφικτή η χρήση του αλγόριθμου μας.

$\to \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\varphi}$

↳ άγνωστο το πώς συμπεριφέρεται καθώς $t \to +\infty$

– Θα προσπαθήσουμε να εκμεταλλευτούμε τα όσα γνωρίζουμε για το $E\Sigma(k_0,\alpha)$ συνδυαζόμενα με την μορφή της u: Έστω αυθαίρετη $c(t)\in E\Sigma(k_0,\alpha)$

1. Επειδή $\underline{b^t u(c_t) = b^t c_t^p} \geq 0$ $\forall t$ (αφού $c_t \geq 0$ $\forall t\in\mathbb{N}$ εξ' ορισμού, κ' $b>0 \Rightarrow b^t \geq 0$ $\forall t\in\mathbb{N}$)

η προκύπτουσα σειρά $\sum_{t=0}^{\infty} b^t c_t^p$ έχει ομόσημους όρους. Επομένως θα συγκλίνει αν η Ακολ. $\left(\sum_{t=0}^{n} b^t c_t^p\right)$ ✓ είναι φραγμένη (γιατί;)

2. Από τις εξαγωγές που κάναμε για την ομοιόμορφη φράξη του $E\Sigma(k_0,\alpha)$ έχουμε ότι:

$$✓\ c_t \leq k_0^{\alpha^{t+1}} \quad \forall t\in\mathbb{N} \overset{p>0}{\Longrightarrow}$$

$$c_t^p \leq \left(k_0^{\alpha^{t+1}}\right)^p = k_0^{p\alpha^{t+1}} \quad \forall t\in\mathbb{N} \overset{b^t>0\ \forall t\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow}$$

$$b^t c_t^p \leq b^t k_0^{p\alpha^{t+1}} \quad \forall t\in\mathbb{N} \overset{\text{μερικά αθρ.}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{t=0}^{n} b^t c_t^{\rho} \leq \sum_{t=0}^{n} b^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως: (ΑΜΑ) $\to \left(b^0 c_0^{\rho},\ b^0 c_0^{\rho} + b^1 c_1^{\rho}, \ldots, \sum_{t=0}^{n} b^t c_t^{\rho}, \ldots \right)$

$$\vee\!\vee \qquad \vee\!\vee \qquad \vee\!\vee$$

(ΑΜΑ*) $\to \left(b^0 k_0^{\rho\alpha},\ b^0 k_0^{\rho\alpha} + b k_0^{\rho\alpha^2}, \ldots, \sum_{t=0}^{n} b^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}, \ldots \right)$

κ' συνεπώς η ΑΜΑ* φράσσει όρο προς όρο από πάνω την θετική ΑΜΑ.

3. Για να είναι φραγμένη η ΑΜΑ αρκεί να είναι φραγμένη η ΑΜΑ* (γιατί;) όπως το Λήμμα φρ. κ' σύγκλιση ↓ δημοσιεύστε το!

Για να είναι φραγμένη η ΑΜΑ* αρκεί να συγκλίνει η $\sum_{t=0}^{\infty} b^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$ (**) (γιατί;)

↳ από το λήμμα Φραγή κ' Σύγκλιση – Δουλέψτε το!

4. Στην (**) όρος είναι π.χ. εφαρμόσιμο το κριτήριο του λόγου συνδυάζουμε με αυτό

Το τι συνάρτηση του t είναι ο $\beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$).

Επομένως εφαρμόζουμε το Κ.Π. στην σειρά $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$

Έχουμε επίσης ότι $\beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$, επομένως

όταν $\beta=0$ η U συγκλίνει τετριμμένα αφού είναι σειρά που αποτελείται από έναν μόνο όρο την ωφέλεια από την παρούσα κατανάλωση — άρα ασχολούμαστε με την περίπτωση που $\beta>0$

$$\frac{\left|\beta^{t+1} k_0^{\rho\alpha^{t+2}}\right|}{\left|\beta^{t} k_0^{\rho\alpha^{t+1}}\right|} = |\beta| \left| k_0^{\rho\alpha^{t+2} - \rho\alpha^{t+1}} \right| = \beta k_0^{\rho\alpha^{t+1}(\alpha-1)} \xrightarrow{t\to+\infty} \beta \quad \forall \alpha \in (0,1] \text{ (διότι)}$$

$$\alpha^{t+1} \xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases} 0 & \alpha<1 \\ 1 & \alpha=1 \end{cases}$$

$\beta \in (0,1)$ επομένως η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}\right)$ φραγμένη $\Rightarrow$ η $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t c_t^{\rho}\right)$ φραγμένη $\Rightarrow$ η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

αύξουσα

αφού η $(c_t) \in E\Sigma(k_0,\alpha)$ αυθαίρετη, η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho}$ συγκλίνει $\forall (c_t) \in E\Sigma(k_0,\alpha) \Leftrightarrow X^* = E\Sigma(k_0,\alpha) \Rightarrow (*)$ καλώς ορισμένο

$b=1$

* Αν επιτρέπαμε το $b=1$ η προηγούμενη προσέγγιση δεν θα λειτουργούσε για να βρούμε το X^*;

- η εφαρμογή του Κ.Π. για τον έλεγχο της σύγκλισης της $\sum_{t=0}^{\infty} k_0^{p\alpha^{t+1}}$ θα έδινε μη πληροφοριακότητα.

- ακόμη και αν ίσχυε ότι η $\sum_{t=0}^{\infty} k_0^{p\alpha^{t+1}}$ αποκλίνει αυτό δεν θα μας έδινε αναγκαστικά χρήσιμη πληροφορία για την $\sum_{t=0}^{\infty} c_t^p$.

- Παράδειγμα μπορούμε να βρούμε $(c_t) \in \Sigma(k_0, \alpha)$ για τα οποία η $U((c_t)) \in \mathbb{R}$. Πχ.

αν $(c_t) = (0, 0, \ldots, k_0^{\alpha^{t+1}}, 0, \ldots)$ → όλη η κατανάλωση στην στιγμή t

Τότε $U((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t^p = k_0^{p\alpha^{t+1}}$ για όποιο t.

$\Rightarrow$ η $(0, 0, \ldots, k_0^{\alpha^{t+1}}, 0, \ldots) \in X^*$

Π.χ. Αν $a=1$ κ' $(c_t) = \left(\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{4}, \dots, \frac{k_0}{2^{t+1}}, \dots\right)$

$\in \mathcal{E}\Omega(k_0, a)$

$$u\left(\left(\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{4}, \dots, \frac{k_0}{2^{t+1}}, \dots\right)\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{k_0}{2^{t+1}}\right)^{\rho} = \frac{k_0^{\rho}}{2^{\rho}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\rho t}} =$$

$$\frac{k_0^{\rho}}{2^{\rho}} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\rho}}\right)^{t}}_{\text{συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά}} = \frac{k_0^{\rho}}{2^{\rho}} \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\rho}}} = \frac{k_0^{\rho}}{2^{\rho}} \frac{2^{\rho}}{2^{\rho}-1}$$

$0 < \frac{1}{2^{\rho}} < 1$

$$= \frac{k_0^{\rho}}{2^{\rho}-1}$$

Επομένως η $\left(\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{4}, \dots, \frac{k_0}{2^{t+1}}, \dots\right) \in X^*$

Τέλος Διάλεξης 24

Διάλεξη 25

Επομένως ακόμη και αν $b=1$, υπάρχουν στοιχεία του $\mathcal{E}\Omega(k_0, a)$ στα οποία η U συγκλίνει.

* Η U όπως σχολιάσαμε νωρίτερα είναι εφοδιασμένη με την γεωμετρική προεξόφληση b^t για τη χρονική

στιγμή t. Υπάρχουν κ' άλλοι τρόποι προεξόφλησης που είναι δυνατόν να αντανακλούν πιο ρεαλιστικές προτιμήσεις ως προς τον χρόνο κ' ίσως είναι πιο συμβατές με κάποιες εμπειρικές παρατηρήσεις που αφορούν σε διαχρονικές αποφάσεις. Πχ.

Έστω η $$U^*(C(c_t)) := \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^k} c_t^p, \quad k>1$$

Εδώ η προεξόφληση στην χρ. στιγμή t γίνεται από τον "υπερβολικό" όρο $\frac{1}{(t+1)^k}$. Σε σχέση με την

$\beta^t \qquad \frac{1}{(t+1)^k} = (t+1)^{-k}$

γεωμετρική προεξόφληση έχουμε $t \ln\beta < -k \ln(t+1)$

$0 \qquad 0$

για αρκετά μεγάλο t. Επομένως η αξία της στιγμιαία ωφέλεια από την κατανάλωση σε απομακρυσμένες μελλοντικές στιγμές είναι μεγαλύτερη από την γεωμαρμονική προεξόφληση, σε σχέση με την γεωμετρική.

Τι συμβαίνει με το κανόνα ορισμένο για την $\mathcal{U}^*$;

Με ανάλογους συλλογισμούς όπως προηγουμένως

έχουμε: αν $c(t) \in \mathcal{E}\Sigma(k_0, a)$

$$\left(\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(t+1)^{k}} c_t^{p}\right) \checkmark$$

$$\parallel$$

$$\left(\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(t+1)^{k}} k_t^{pa^{t+1}}\right)$$

συγκλίνουσα

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{k}} k_0^{pa^{t+1}}$$

στοιχειώδη ωφέλεια στο t αν καταναλώσουμε οι διαθέσιμοι πόροι στο t

κ' ότι αν η $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{k}} k_0^{pa^{t+1}}$ έχουμε ότι $X^* = \mathcal{E}\Sigma(k_0, a)$

Εφαρμόζοντας το ΚΠ στην έχουμε την ζητούμενη ιδιότητα. Αλλά $k_0^{pa^{t+1}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$ καθώς το $t \to \infty$ (ξ συμμετρική συγκλίνουσα ακολουθία)

$\Rightarrow \sup_t k_0^{pa^{t+1}} < +\infty$ κ' ανεξάρτητο του t ✓

Επομένως $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{k}} k_0^{pa^{t+1}} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{k}} \sup_t k_0^{pa^{t+1}}$

$= \sup_t k_0^{pa^{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{k}} \in \mathbb{R}$ → συγκλίνει ως υπεραρμονική :

Άρα η (*) $\underline{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{\kappa}} k_0^{\rho a^{t+1}}}$ φράσσεται από πάνω

από την $\underline{\sup_t k_0^{\rho a^{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{\kappa}}}$ που <u>συγκλίνει</u>,

οπότε (γιατί;) η (*) συγκλίνει & άρα (γιατί;)

η $\underline{U^*((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{\kappa}} c_t^{\rho}}$ συγκλίνει

για κάθε εφικτή διαχρονική ροή κατανάλωσης.

Άσκηση. Έστω η $V((c_t)) := \sum_{t=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{t+1}}_{\text{αρμονική προεξόφληση}} c_t^{\rho}$,

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ανάλυση με αυτήν της υπεραρμονικής προεξόφλησης για να δούμε το αν η V είναι καλώς ορισμένη;

...