Συνέχεια Διάλεξης 13

- Αρμονική, Υπεραρμονικές Σειρές
- Βασικός Λογισμός

Συνεχή Διάρθωση 13

$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots)$

$x_n = \frac{1}{n+1}$

$\to \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$

Παράδειγμα 4. [Αρμονική Σειρά]

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\right)$. Έχουμε ότι η ΑΜΑ αποκλίνει

$\to$ έχει σχέση με $\int_*^{**} \frac{1}{x} dx$;

επειδή είναι μη φραγμένη. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\exists (\gamma_n)$: $0 \le \gamma_n \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ κ' ότι η (γ_n) μη φραγμένη (γιατί;). Παρατηρούμε ότι $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \le \int_i^{i+1} \max_{x \in [i, i+1]} \frac{1}{x+1} dx$$

$[i, i+1]$

$\int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \le \frac{1}{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$$= \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dx = \frac{1}{i+1} \int_i^{i+1} dx = \frac{1}{i+1} \times \Big|_i^{i+1} = \frac{1}{i+1}(i+1-i)$$

σταθ. ως προς x

$x\Big|_i^{i+1}$

$= \frac{1}{i+1}$. Επομένως αθροίζοντας από $i=0$ έως n

$$\sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx = \int_0^{n+1} \frac{1}{x+1} dx \overset{u=x+1}{=}$ $du = dx$

$\int_0^{n+1} \to n+2$, $0 \to 1$, $x+1 \to u$, $dx \to du$

$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx + \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} dx$

$$= \int_1^{n+2} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_1^{n+2} = \ln(n+2) - \ln(1)$$

$$= \ln(n+2). \Longrightarrow \ln(n+2) \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως $\gamma_n = \ln(n+2)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(\ln(n+2)) =$

$$= \left(\begin{array}{ccccc} \ln 2, & \ln 3, & \ln 4, & \dots, & \ln(n+2), \dots \\ \le & \le & \le & & \le \\ 1 & 1+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1} \end{array}\right)$$

φράσσει κατά σημείο από κάτω την ΑΜΑ. Αν δεν είναι φραγμένη προκύπτει ότι κ' η ΑΜΑ δεν είναι φραγμένη. Έστω ότι η (γ_n) φραγμένη $\Longrightarrow$

$$\exists M > 0 : \ln(n+2) \le M \quad \forall n \in \mathbb{N} \overset{e \text{ αύξουσα}}{\Longrightarrow}$$

$\ln(n+2) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\ln(n+2)| = \ln(n+2)$

$$\exp(\ln(n+2)) \le e^M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$$

$$n+2 \le e^M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$$

$n \le e^{M} - 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Άρα η (σn) μη φραγμένη $\Rightarrow$ η ΑΜΑ μη φραγμένη $\Rightarrow$ η ΑΜΑ αποκλίνουσα $\Rightarrow$ η αρμονική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ. ∎

Συγκρίνουμε με την $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$, $|\alpha|<1$

Παρατήρηση: Παρόλο που $\frac{1}{i+1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$ δεν πηγαίνει "αρκετά γρήγορα" στο 0 ώστε το $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ να συγκλίνει καθώς το n μεγαλώνει. Είναι δυνατόν μάλιστα να αποδειχθεί ότι για "μεγάλο n" το $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ αποκλίνει με "λογαριθμικό ρυθμό".

Τέλος Διάλεξης 13. ∎

Παράδειγμα 5. [Εναλλάσσουσα αρμονική]

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} \right)$.

Βάσει των όσων γνωρίζουμε μέχρι τώρα είναι αδύνατον να διακριβώσουμε το αν υπάρχει κ' με τι ισούται η

Εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

Είναι δυνατόν να δειχθεί (π.χ. μέσω δυναμοσειρών) ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2$!!!

* σε σχέση με το παρ. 4 παρατηρούμε ότι η "εισαγωγή" παρενθέσεων σε άπειρες πλήθος όρων της σειράς είναι δυνατόν να μεταβάλλει την συμπεριφορά αυτής. Θα το διατυπώσουμε ακριβέστερα όταν μελετήσουμε την έννοια της απόλυτης σύγκλισης. $\boxed{\text{VII}}$

Προκειμένου να συνεχίσουμε τα παραδείγματά μας αλλά κ να αναπτύξουμε μεθόδους που θα μας βοηθήσουν στο ό,τι μας χρειάζεται ένας βασικός λογισμός σειρών (που θα βασίζεται στον λογισμό ορίων που έχουμε στην διάθεση μας):

Χρήσιμα για τα παρακάτω στοιχεία Λογισμού Σειρών

Λήμμα [Ομόσημοι Όροι]. Έστω ότι η (x_n) αποτελείται από ομόσημους όρους. Αν η ΑΜΑ της (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει.

Απόδειξη. Αφού οι $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ έχουν το ίδιο πρόσημο τότε η $\left(x_0, x_0+x_1, x_0+x_1+x_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i, \dots\right)$ είναι μονότονη [αύξουσα αν $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα αν $x_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Αφού είναι κ' φραγμένη τότε η ΑΜΑ είναι συγκλίνουσα. ☑

Το παραπάνω Λήμμα είναι επαρκές για να δείξουμε την ύπαρξη της υπεραρμονικής σειράς:

Παράδειγμα 6. [Υπεραρμονική Σειρά] $p>1$

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}\right)$ ⟶ έχει σχέση με το $\int_{*}^{**} \frac{1}{(x+1)^p}dx$;

$\frac{1}{(n+1)^p} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε ομοσημία.

Άρα βάσει του παραπάνω λήμματος η υπεραρμονική σειρά θα υπάρχει αν η ΑΜΑ είναι φραγμένη.

Βάσει του σχολιού λήμματος Φραγή κ' Σύγκριση I η ΑΜΑ θα είναι φραγμένη αν $\exists (\delta_n)$:

$$0 \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \le \delta_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$ κ' η (δ_n) φραγμένη (γιατί;). Παρατηρούμε ότι:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(i+1)^p} = \int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p}dx =$$

$$= \int_i^{i+1} \min_{x\in[i,i+1]} \frac{1}{x^p}dx \le \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}dx$$ Οπότε

Αθροίζοντας από $i=1$ έως n έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{i}^{i+1} \frac{1}{x^p} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \int_{i}^{i+1} \frac{1}{x^p} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq 1 + \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [*]$$

Επίσης $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \overset{p>1}{=} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{1}^{n+1} = \frac{1}{1-p}\left((n+1)^{1-p} - 1\right)$

Οπότε $[*] \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1-p}{1-p} + \frac{1}{1-p} \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - p\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Θέτοντας $\delta_n := \dfrac{1}{1-p}\left[\dfrac{1}{(n+1)^{p-1}} - p\right]$ η σειρά θα υπάρχει άρα η (δ_n) είναι φραγμένη. Αλλά $\frac{1}{n+1} \to 0$

κ' η $g(x) := \frac{1}{1-p}\left[x^{p-1} - p\right]$ είναι συνεχής στο

0 αφού $p>1$. Άρα από την ΑΜ $\delta_n \to \frac{1}{1-p}\left[0^{p-1} - p\right]$

$= \frac{p}{p-1}$ οπότε αφού είναι συγκλίνουσα η (δ_n)

επίσης φραγμένη (γιατί;). Άρα η υπεραρμονική σειρά

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ υπάρχει. $\blacksquare$

Παρατήρηση: Το λήμμα είναι υπαρκτικό, απαντάει μόνο στο i. κ' δεν μας πληροφορεί για το ii.

Στο παραπάνω παράδειγμα είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p} = \zeta(p)$, $p>1$ όπου ζ η συνάρτηση ζήτα του Riemann.

Παρατήρηση: Η μη ύπαρξη της αρμονικής σειράς φαίνεται να σχετίζεται με την αποκλίνουσα συμπεριφορά του $\int_1^M \frac{1}{x}\,dx$ καθώς $M \to +\infty$

Ενώ η ύπαρξη της υπεραρμονικής σειράς αντιστοιχως με την συγκλίνουσα συμπεριφορά του

$$\int_1^M \frac{1}{x^p}\,dx$$ καθώς $M \to +\infty$ επειδή $p > 1$.

Άσκηση – Υπεραρμονική σειρά: Να δειχθεί ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ δεν υπάρχει όταν $0 \leq p \leq 1$.