Διαλέξεις 12-13

Εισαγωγή στις Πραγματικές Σειρές

- Ακολουθίες Μερικών Αθροισμάτων κ' Σειρές
- Παραδείγματα κ' Γεωμετρική Σειρά.

Εισαγωγή στις Πραγματικές Σειρές

Διάλεξη 12

Πώς νοηματοδοτείται το απειροστικό άθροισμα πραγματικών αριθμών; (*) Αποκλειστικά μέσω άλγεβρας αυτό θα ήταν εφικτό μόνο αν σχεδόν όλοι οι όροι είναι μηδενικοί. Όταν δεν ισχύει κάτι τέτοιο συναντούμε προβλήματα όπως το παρακάτω: δηλ: προσπαθούμε να αθροίσουμε τους όρους της $(1,-1,1,-1,\dots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i = (-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+\dots+(-1)^n+\dots$$

$$= \underbrace{(1-1)}_{=0}+(1-1)+\dots+(-1)^n+\dots$$

$$= 1+\underbrace{(-1+1)}_{=1}(-1+1)+\dots+(-1)^n+\dots$$

Ένας τρόπος νοηματοδότησης τέτοιων αθροισμάτων είναι μέσω της έννοιας του ορίου πραγματικών ακολουθιών:

(*) Έστω (x_n) πραγματική ακολουθία.
Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε το

$$x_0+x_1+x_2+\dots+x_n+\dots := \sum_{i=0}^{\infty}x_i$$

Μας χρειάζεται η παρακάτω ενδιάμεση έννοια:

αν η $(x_n) \underset{σ.π.}{=} (0,0,0,\dots,0,\dots)$ δηλ. μόνο πεπ. πλήθος όρων της (x_n) μπορεί να είναι μη μηδενικοί, τότε $\sum_{i=0}^{\infty}x_i$ θα είναι επί της ουσίας το γνωστό μας πεπερασμένου πλήθους όρων άθροισμα.

ΑΜΑ

Ορισμός [Ακολουθία Μερικών Αθροισμάτων]. Έστω (x_n) πραγματική ακολουθία. Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων (ΑΜΑ) αυτής είναι η

$$\left(x_0,\ x_0+x_1,\ x_0+x_1+x_2,\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n} x_i,\ \dots\right)$$

* Η ΑΜΑ είναι πάντοτε καλώς ορισμένη αφού κάθε όρος της είναι άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων.

Παραδείγματα:

1. $x_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n>0 \end{cases}$ (δηλ. $(x_n) := (0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$) — σταθ. στο 1 τ.π.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = (\underbrace{x_0}_{=0}, \underbrace{x_0+x_1}_{=0+1}, \dots, \underbrace{x_0+x_1+\dots+x_n}_{=0+1+\dots+1}, \dots) = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

2. $x_n = (-1)^n$ (δηλ. $(x_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$) → εναλλάσσουσα μεταξύ των 1 και −1

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \left(1,\ 1+(-1),\ 1+(-1)+1,\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i,\ \dots\right)$$

$$= (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

↳ εναλλάσσουσα μεταξύ των 0 και 1

3. Γεωμετρική ΑΜΑ , $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n = \alpha^n$

γεωμετρικοί συντελεστές

(δηλ. $(x_n) = (\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n, \dots) = (1, \alpha, \dots, \alpha^n, \dots)$)

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \left(1, 1+\alpha, 1+\alpha+\alpha^2, \dots, \sum_{i=0}^{n} \alpha^i, \dots\right)$$

→ γεωμετρική ΑΜΑ

4. Αρμονική ΑΜΑ. $x_n = \frac{1}{n+1}$

αρμονικοί συντελεστές

(δηλ. $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$)

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots, \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}, \dots\right)$$

↳ Αρμονική ΑΜΑ

5. Εναλλάσσουσα Αρμονική ΑΜΑ. $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

(δηλ. $(x_n) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots\right)$)

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \left(1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots, \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}, \dots\right)$$

↳ Εναλλάσσουσα αρμονική ΑΜΑ

6. Υπεραρμονική ΑΜΑ. $p>1$, $x_n = \frac{1}{(n+1)^p}$

(Δηλ. $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{(n+1)^p}, \dots\right)$)

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = \left(1,\ 1+\frac{1}{2^p},\ 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}, \dots, \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}, \dots\right)$$

↓

Υπεραρμονική ΑΜΑ

* αν επιτρέψουμε $p=1$ τότε επιστρέφουμε στην αρμονική ΑΜΑ.

έχει ομοιότητες με της ορισμένη ολοκλήρωση; ✓

* Παρατήρηση: Η διαδικασία της μερικής άθροισης αποτελεί επίσης διαδικασία μετασχηματισμού της (x_n) σε νέα πραγματική ακολουθία. Τα 1-6 αποτελούν παραδείγματα μετασχηματισμού της (x_n) στην αντίστοιχη ΑΜΑ. Άσκηση: Υπάρχει αντίστροφη διαδικασία της μερικής άθροισης ΑΜΑ $\to (x_n)$;

* Ο γενικός όρος της ΑΜΑ είναι ο $\sum_{i=0}^{n} x_i$. Η στρατηγική μας θα είναι να ορίσουμε το $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ ως το $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$ όταν υπάρχει το όριο:

Ορισμός [Πραγματική Σειρά]. Έστω η (x_n) μια πραγματική ακολουθία των συντελεστών. Ως σειρά με συντελεστές την παραπάνω, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$, ορίζεται το όριο της ΑΜΑ της (x_n) όταν αυτό υπάρχει. (Όταν το παραπάνω όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ δεν υπάρχει.)

* Συνοπτικώς για την κατασκευή της έννοιας

$$\underset{\text{συντελεστές}}{\underset{(*)}{(x_n)}} \xrightarrow[\text{Άθροιση}]{\text{Μερική}} \underset{(**)}{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)} \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ \text{(όταν υπάρχει)}}]{\text{Όριο}} \underset{(***)}{\sum_{i=0}^{\infty} x_i} \in \mathbb{R}$$

Προσοχή: (*), (**) είναι πραγματικές ακολουθίες,
το (***) όταν υπάρχει είναι πραγματικός αριθμός.

Ζητήματα

i. Πότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει; (δύσκολο ζήτημα διακρίβωσης σύγκλισης)

ii. Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει με τι ισούται; (ακόμη δυσκολότερο ζήτημα εύρεσης ορίου
ή "πολυπλοκότητα" του "ποσότητα μέσα της αθροίσματος")

Στο μάθημα θα ασχοληθούμε ΚΑΤΑΡΧΑΣ και
ΚΥΡΙΩΣ με το i. (θα χρησιμοποιήσουμε
τον λογισμό των ορίων που έχουμε ήδη)

Ας δούμε καταρχάς τα παραδείγματα μας:

1. $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = (0,1,2,\dots,n,\dots)$ που γνωρίζουμε

ότι είναι αποκλίνουσα (γιατί;). Άρα η

$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ δεν υπάρχει. ▨ $\longrightarrow (0,1,1,\dots,1,\dots)$

2. $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) = (0,1,0,1,\dots)$ που γνωρίζουμε

ότι αποκλίνει ως ενναλάσσουσα. Άρα η

$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1-1+1-1+\dots$ δεν υπάρχει. ▨

3. $\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right)$. Όταν $\alpha=1$ τότε

$\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right) = (1,2,3,\dots,n+1,\dots)$ που $\rightarrow$ άρα μη φραγμένη άρα αποκλί-νουσα

αποκλίνει ως μη φραγμένη (γιατί;)

$(0,1,2,\dots,n,\dots) + (1,1,1,\dots,1,\dots) =$ μη φραγμένη

μη φραγμένη — σταθερή άρα φραγμένη

Επομένως η $\sum_{i=0}^{\infty} 1$ δεν υπάρχει.

Όταν $\alpha \neq 1$ έχουμε: $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i - \alpha \sum_{i=0}^{n} \alpha^i$

$$[1-\alpha] \sum_{i=0}^{n} \alpha^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i - \sum_{i=0}^{n} \alpha^{i+1} = 1 + \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \dots + \cancel{\alpha^n} - \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha^2} - \dots - \cancel{\alpha^n} - \alpha^{n+1}$$

$$= 1 - \alpha^{n+1}$$

Επομένως: $[1-\alpha] \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = 1 - \alpha^{n+1} \underset{\alpha \neq 1}{\Leftrightarrow}$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Επιτύχαμε να βρούμε μορφή για το μερικό άθροισμα απαλλασσόμενοι από το σύμβολο $\sum_{i=0}^{n}$. Τεχνικό δίδαγμα! Ε) Διάλεξη 12

Διάλεξη 13

Επομένως: $\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right) = \left(\frac{1-\alpha\cdot\alpha^n}{\underline{\underline{1-\alpha}}}\right)$

Περιπτώσεις: α. $\alpha=-1$

$\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\right) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ ← Παράδειγμα 2

Αλλά απομένουν ως εναλλάσσουσα

β. $|\alpha|>1$ $\left(\frac{1-\alpha\cdot\alpha^n}{1-\alpha}\right)$ είναι

μη φραγμένη, αφού αν ήταν φραγμένη

$\exists M>0$: $\frac{|1-\alpha^{n+1}|}{|1-\alpha|} \le M \quad \forall n\in\mathbb{N} \iff$

$\left|\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right| = \frac{|1-\alpha^{n+1}|}{|1-\alpha|}$

$|1-\alpha^{n+1}| \le M|1-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$|1-\alpha^{n+1}| \le M|1-\alpha| \quad \forall n$ περιττό $\overset{|\alpha|>1}{\Longrightarrow}$

προσπαθούμε να απαλλαγούμε από την απόλυτη τιμή

$\alpha^{n+1}-1 \le M|1-\alpha| \quad \forall n$ περιττό $\Rightarrow$

$|\alpha|^{n+1} \le M|1-\alpha|+1 \quad \forall n$ περιττό $\overset{\ln|\alpha|>0}{\Longrightarrow}$

$(n+1)\ln|\alpha| \le \ln[M|1-\alpha|+1]$

$\Updownarrow$

$n+1 \le \frac{\ln[M|1-\alpha|+1]}{\ln|\alpha|}$

$\Rightarrow n \le \frac{\ln(M|1-\alpha|+1)}{\ln|\alpha|} - 1 \quad \forall n$ περιττό.

Άτοπο.

ΑΜΑ αποκλίνει ως μη φραγμένη.

γ. $|\alpha|<1$, $\alpha^n \to 0$ (γιατί;)

ο γενικός όρος της ΑΜΑ $\frac{1-\alpha\alpha^n}{1-\alpha}$ σύνθεση α^n με την $\frac{1-\alpha x}{1-\alpha}$

η $g(x) = \frac{1-\alpha x}{1-\alpha}$ συνεχής στο 0. (ως γραμμική)

Επομένως εξαιτίας της ΑΜΑ $\frac{1-\alpha\alpha^n}{1-\alpha} \to \frac{1-\alpha\cdot 0}{1-\alpha}$

$= \frac{1}{1-\alpha}$.

αν η $x_n \to l_x$ $\lim g(x_n)$

g συν στο l_x $= g(\lim x_n)$

$= g(l_x)$

$x_n = \alpha^n$

$g(x) = \frac{1-\alpha x}{1-\alpha}$

ΑΜΑ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\alpha}$.

Συνοψίζοντας:

$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$

$|\alpha|<1$ υπάρχει κ' ισούται με $\frac{1}{1-\alpha}$

$|\alpha|\geq 1$ δεν υπάρχει

($\alpha \geq 1$ ή $\alpha<-1$ η ΑΜΑ μη φρ.

$\alpha=-1$ η ΑΜΑ ταλαντεύουσα)

Γεωμετρική Σειρά.

"Στην γεωμετρική σειρά απαντήσαμε για i κ ii επειδή με στοιχειώδη τρόπο ολοκληρώσαμε κ' βρήκαμε το $\sum_{i=0}^{n} x_i$"

Στις υπόλοιπες σειρές στα παραδείγματά μας τα πράγματα δεν θα είναι τόσο εύκολα!!!

π.χ. $\alpha = 1/2 \quad (\Rightarrow |\alpha| < 1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (\Rightarrow |\alpha| < 1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$$