Στοιχεία Διαλέξεων 10-11

- Αναλυτικός Ορισμός ορίου
  - Παραδείγματα
- Άλγεβρα κ' όρια
- Μετασχηματισμοί μέσω σύνθεσης
- Αρχή της Μεταφοράς

Διάλεξη 10

Μεταγράφοντας τον γεωμετρικό ορισμό, χρησιμοποιώντας αναλυτικούς όρους αποκτήσαμε τον:

$\forall, \exists, \leq$, κ.ο.κ.

Αναλυτικός Ορισμός Ορίου: Η ακ/α συγκλίνει στον $\ell \in \mathbb{R}$ αν:

ζητούμενο

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n^*(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ |x_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall n \geq n^*(\varepsilon).$$

Παρατήρηση: Το $n^*(\varepsilon)$ αναμένεται γενικά να είναι φθίνουσα συνάρτηση του ε.

Παραδείγματα:

σκοπός η εύρεση του $n^*(\varepsilon)$ για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$

1. $x_n = \frac{1}{n+1}$, $\ell = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

αντικατάσταση

$$(*) \ |x_n - \ell| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

εξετάζουμε την ανισότητα

$$\iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad (**)$$

Επομένως η $(*)$ του ορισμού είναι ισοδύναμη με την $(**)$.

την φέρνουμε αν είναι δυνατόν σε μορφή τέτοια που θα καθιστά εύκολη την εύρεση του n^* ή την διατύπωση της ύπαρξής του

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε τον ορισμό θα πρέπει να εντοπίσουμε αν υπάρχει το $n^*(\varepsilon)$.

Από την (**) παρατηρούμε ότι: α. ο $\frac{1}{\varepsilon}-1 \in \mathbb{R}$

β. $\forall x \in \mathbb{R}$ ορίζεται μονοσήμαντα ο $\text{Εφ}(x)$: ο μικρότερος φυσικός μεγαλύτερος του x

π.χ. $x<0$, $\text{Εφ}(x)=0$, $x=10^{-8}$, $\text{Εφ}(x)=1$

κ.ο.κ. $x=0$, $\text{Εφ}(0)=1$, $\text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) > \frac{1}{\varepsilon}-1$

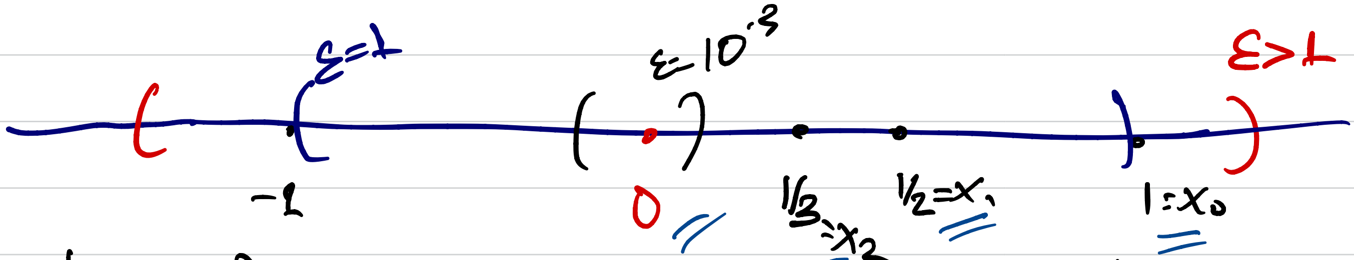
Θέτοντας ως $n^*(\varepsilon) := \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ έχουμε ότι αν $n \geq \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}-1$ οπότε η (**) ισχύει $\forall n \geq \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$. Άρα και η (*) ισχύει $\forall n \geq \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$. Επομένως ο ορισμός ισχύει για την παραπάνω επιλογή του $n^*(\varepsilon)$. Άρα $x_n \to 0$, ∎

Παρατηρήσεις στο παράδειγμα:

1. Η επιλογή $n^*(\varepsilon) := \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ μας δίνει και τους όρους της ακολουθίας που δεν ικανοποι-

ούν το $|x_n-\ell|<\varepsilon$ για δεδομένο ε. Είναι οι

$x_0, x_1, \dots, x_{\varepsilon\phi(\frac{1}{\varepsilon}-1)-1}$:



$\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=0$, επομένως κανένας όρος δεν βρίσκεται εντός του $(-\varepsilon,\varepsilon)$

$\varepsilon\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=\varepsilon\phi(0)=1$, επομένως ένας όρος δεν βρίσκεται εντός του $(-1,1)$ ο $x_0=1$.

$\varepsilon\phi\left(\frac{1}{10^{-3}}-1\right)=\varepsilon\phi(10^3-1)=\varepsilon\phi(999)=1000$, επομένως χίλιοι όροι της ακολουθίας δεν βρίσκονται εντός του $(-10^{-3},10^{-3})$, οι $x_0, x_1, \dots, x_{999}$

⋮

κ.ο.κ.

2. Η επιλογή $n^*(\varepsilon) = \lceil\frac{1}{\varepsilon}-1\rceil$ δεν είναι η μοναδική που λειτουργεί. Π.χ. κ' η επιλογή $n^*(\varepsilon) := \lceil\frac{1}{\varepsilon}-1\rceil+1$ θα έκανε τον ορισμό να λειτουργεί. Η αρχική είναι όμως πιο πληροφοριακή για το πόσοι όροι της (x_n) βρίσκονται εκτός του εκάστοτε διαστήματος. $\blacksquare$

Άρνηση του Ορισμού: $x_n \not\to \ell$ ανν

$\underline{\exists} \varepsilon > 0$: $|x_n - \ell| \geq \varepsilon$ για άπειρο πλήθος από n.

για το συγκεκριμένο ε υπάρχει αδυναμία εύρεσης $n^*(\varepsilon)$.

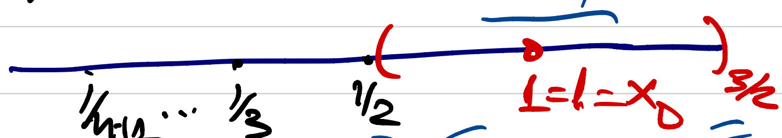
B. $x_n = \frac{1}{n+1}$, $\ell = 1$. $x_n \not\to 1$ (προφανώς αυτό μας το λέει ήδη το Α κ' η μοναδικότητα του ορίου - ας δούμε όμως γιατί δεν λειτουργεί ο ορισμός:) Έστω $\varepsilon = 1/2$, κ (*) γίνεται

$\frac{1}{n+1} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - 1| < \frac{1}{2} \iff \left|\frac{1}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{2} \iff$$

$$1 - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2} \iff n+1 < 2 \iff$$

$$n < 1. \quad (**)$$



Επομένως η (*) είναι ισοδύναμη με την (**) η οποία ισχύει μόνο για $n=0$. Επομένως το $n^*(1)$ δεν υπάρχει (γεωμετρικά μόνο ο $x_0 \in (1/2, 3/2)$), άρα $x_n \not\to 1$. ⊠

Παρατήρηση στο παράδειγμα:

Υπάρχουν ε για τα οποία $n^*(\varepsilon)$ υπάρχει. Π.χ. $\varepsilon = 1$ (γιατί;). Η άρνηση του ορισμού μας λέει ότι αρκεί να υπάρχει έστω κ' ένα ε για το οποίο το $n^*(\varepsilon)$ να μην είναι ορισμένο. ⊠

Προφανώς η "τεχνολογία" του $n^*(\varepsilon)$ μας βοηθά να εξηγήσουμε τον λογισμό των ορίων:

Σύγκλιση κ' άλγεβρα ακολουθιών

Έστω $x_n \to l_x \in \mathbb{R}$, $y_n \to l_y \in \mathbb{R}$ κ' $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λήμμα ΒΠ. Αν $x_n \to l_x$ τότε $\lambda x_n \to \lambda l_x$. [$\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$]

(ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός "σέβεται" την σύγκλιση.)

Απόδειξη. Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda(x_n) = (0, 0, \dots, 0, \dots) \to 0 = 0 \cdot l_x$. Έστω $\lambda \neq 0$, και $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι

άρα το λήμμα ισχύει

$$(*) \quad |\lambda x_n - \lambda l_x| < \varepsilon \iff |\lambda| \, |x_n - l_x| < \varepsilon$$

$$\overset{\lambda \neq 0}{\iff} |x_n - l_x| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \quad (**). \qquad \left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0\right)$$

θυμόμαστε ότι $x_n \to l_x$

Επειδή $x_n \to l_x$, $\exists\, n_x^*\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) : |x_n - l_x| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ $\forall n \geq n_x^*\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$. Θέτουμε $n^*(\varepsilon) := n_x^*\left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ κ' έχουμε ότι η $(**)$ κ' συνεπώς η $(*)$ θα ισχύουν

$\forall n \geq n^*(\varepsilon)$. $\blacksquare$ ↙ Τέλος Διάλεξης 10

Διάλεξη 11

Λήμμα Πρ. Αν $x_n \to \ell_x$ κ' $y_n \to \ell_y$ τότε $x_n + y_n \to \ell_x + \ell_y$. ← $[\lim(x_n+y_n) = \lim x_n + \lim y_n]$

(η πρόσθεση "σέβεται" την σύγκλιση) τρ. ανισ.

$|(x_n-\ell_x)+(y_n-\ell_y)| \leq |x_n-\ell_x| + |y_n-\ell_y|$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Έχουμε ότι

$(*)$ $|x_n+y_n-(\ell_x+\ell_y)| < \varepsilon \iff$

$|(x_n-\ell_x)+(y_n-\ell_y)| < \varepsilon \Longleftarrow$ τρ. ανισότητα

$|x_n-\ell_x| + |y_n-\ell_y| < \varepsilon \Longleftarrow$ πρόσθεση κατά μέλη

$|x_n-\ell_x| < \varepsilon/2 \quad (**)_I$

$|y_n-\ell_y| < \varepsilon/2 \quad (**)_{II}$

Δηλ. $(**)_I$ κ' $(**)_{II} \Rightarrow (*)$

Επειδή $x_n \to \ell_x$ κ' $\varepsilon/2>0$, $\exists\, n^*_x(\varepsilon/2)$:

$\forall n \geq n^*_x(\varepsilon/2)$ $|x_n-\ell_x| < \varepsilon/2$.

Επειδή $y_n \to l_y$ κ' $\varepsilon/2 > 0$, $\exists n_y^*(\varepsilon/2)$: ✓

$\forall n \geq n_y^*(\varepsilon/2)$ $|y_n - l_y| < \varepsilon/2$.

Επομένως $\forall n \geq \max(n_x^*(\varepsilon/2), n_y^*(\varepsilon/2))$

ισχύουν ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ οι $(**)_I$ κ' $(**)_{II}$.

κ' επομένως η $(*)$.

Συνεπώς θέτοντας $n^*(\varepsilon) := \max(n_x^*(\varepsilon/2), n_y^*(\varepsilon/2))$

έχουμε $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$, $|x_n + y_n - (l_x + l_y)| < \varepsilon$, που

είναι το ζητούμενο. $\boxtimes$

[$\lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n$]

Λήμμα ΣΠ. Αν $x_n \to l_x$, $y_n \to l_y$ τότε $x_n y_n \to l_x l_y$.

(ο σημειακός πολλαπλασιασμός "σέβεται" την σύγκλιση)

Απόδειξη. Άσκηση - Θυμηθείτε ότι κάθε συγκλίνουσα

ακολουθία είναι αναγκαστικά φραγμένη. $\boxtimes$

Παρατήρηση:

Η εφαρμογή τέτοιων συμπερασμάτων θα ήταν επί της ουσίας αδύνατη αν δεν είχαμε στην διάθεση μας τον αναλυτικό ορισμό. Δεν θα προχωρήσουμε σε περισσότερες αποδείξεις για στοιχεία του λογισμού των ορίων. Θα θεωρήσουμε όμως τέτοια στοιχεία που επί της ουσίας έχετε διδαχθεί, π.χ. κανόνας L' Hopital, ως ΔΕΔΟΜΕΝΑ!

Συνεχείς Μετασχηματισμοί

Μπορούμε να αντιληφθούμε τις αλγεβρικές πράξεις ως τρόπους κατασκευής ακολουθιών από υφιστάμενες. Ένας ακόμη τρόπος είναι μέσω της κατά σημείο εφαρμογής κατάλληλης συνάρτησης:

$\xrightarrow{g} g(x_0)$ $\quad \xrightarrow{g} g(x_1)$ $\quad \xrightarrow{g} g(x_n)$

Έστω η $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ κ' $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

κατασκευάζεται η ακολουθία

$$(\underbrace{g(x_0)}_{y_0}, \underbrace{g(x_1)}_{y_1}, \dots, \underbrace{g(x_n)}_{y_n}, \dots)$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω είναι "απλά" σύνθεση συναρτήσεων:

*συναρτησιακός ορισμός

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\text{ακολουθία } (x_n)"'] \arrow[rr, bend right, "(g(x_n))"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

π.χ. $x_n = \frac{1}{n+1}$, $g(x) = e^x \to (e^1, e^{1/2}, \dots, e^{\frac{1}{n+1}}, \dots)$

$= (e, e^{1/2}, \dots, e^{\frac{1}{n+1}}, \dots)$.

Ερώτημα: Υπάρχουν επαρκείς συνθήκες υπό τις οποίες η σύνθεση να σέβεται την σύγκλιση;

$$\lim g(x_n) \overset{?}{=} g(\lim x_n)$$

Αρχή της Μεταφοράς [Continuous Mapping Theorem – CMT]

Έστω (x_n) ακολουθία που συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$, και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο ℓ. Τότε η $(g(x_n))$ συγκλίνει στο $g(\ell)$. $\left[\lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(\ell) \right]$ ✓

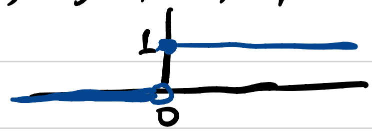
Χωρίς απόδειξη.

Η ΑΜ παρουσιάζεται ως επαρκής συνθήκη για τον "σεβασμό" της σύγκλισης από τον μετασχηματισμό μέσω της g, την συνέχεια της g στο ℓ.

Π.χ. $x_n = \frac{1}{n+1}$ ✓, $g(x) = e^x$! έχουμε ότι $x_n \to 0$ ✓ κ' η εκθετική συνάρτηση συνεχής παντού, άρα συνεχής στο 0. Επομένως από την ΑΜ έχουμε ότι $e^{\frac{1}{n+1}} \to e^0 = 1$. ✓

Η συνέχεια της g στο ℓ είναι επαρκής κ' όχι αναγκαία για τον σεβασμό της σύγκλισης. Για παράδειγμα αν $x_n=\frac{1}{n+1}$ με $g(x):=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ ασυνεχής στο 0 / όμως.

$$(g(x_n)) = (1,1,1,\dots,1,\dots)\to 1 = g(0).$$



$\lim g\left(\frac{1}{n+1}\right) = g\left(\lim\frac{1}{n+1}\right)$

Παρόλ' αυτά αν η g ασυνεχής στο ℓ, εξαιτίας του ορισμού της συνέχειας, θα υπάρχει οποιαδήποτε ακολουθία με $x_n\to\ell$ αλλά $g(x_n)\not\to g(\ell)$.

Π.χ. $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ κ' $g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. $\lim g(x_n) \neq g(\lim x_n)$

$(g(x_n)) = (1,0,1,0,\dots)$ επομένως ως εναλλάσσουσα.

$\left(\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots\right)\to 0$

$\quad g\downarrow 1 \quad \downarrow g\; 0 \quad \downarrow g\; 1 \quad \downarrow g\; 0$

* Τα όσα έχουμε εξηγήσει ή/και αναφερθεί στα προηγούμενα θα χρησιμοποιηθούν ως μέρη του λογισμού των ορίων στα όσα θα πούμε για τις πραγματικές σειρές.

Κλείνουμε το πρώτο μέρος του μαθήματος με το παρακάτω παράδειγμα που χρησιμοποιεί διάφορες έννοιες τις οποίες έχουμε αναφερθεί:

θα μας οδηγήσει στην γεωμετρική σειρά.

Παράδειγμα – ακολουθία γεωμετρικών όρων όπου για $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε την $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots) = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots)$. Παρατηρούμε ότι:

* $\alpha = 1$, σταθερή στο 1, φραγμένη κ' συγκλίνουσα στο 1 (γιατί;).

* $\alpha = -1$, εναλλάσσουσα μεταξύ του 1 κ' του -1, φραγμένη και αποκλίνουσα (γιατί;) κ' συνεχώς αποκλίνουσα

* $|\alpha| > 1$, μη φραγμένη αφού: αν ήταν φραγμένη $\exists\, M > 0 : |\alpha^n| < M \ \forall n \in \mathbb{N} \iff$

$$|\alpha|^n < M \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{\ln \text{ γν. αύξουσα}}{\iff} n \ln|\alpha| < \ln M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$|\alpha|>1 \Rightarrow \ln|\alpha|>0$

$n < \frac{\ln M}{\ln|\alpha|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, αδύνατο (γιατί;). $\notin \mathbb{Q}$

$*$ $|\alpha|<1$, $\alpha \neq 0$, $\alpha^n \to 0$ αφού: αν $\varepsilon>0$ έχουμε

(*) $|x_n - \ell| < \varepsilon \iff |\alpha^n - 0| < \varepsilon \iff$ ln γν. αύξουσα

$|\alpha^n| < \varepsilon \iff |\alpha|^n < \varepsilon \iff$

$n \ln|\alpha| < \ln\varepsilon \overset{|\alpha|<1}{\iff} n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}$ (**)

$\ln|\alpha|<0$ $\quad \alpha = 0;$

(*) $\iff$ (**)

Ο $\frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|} \in \mathbb{R}$ οπότε θέτοντας $n^*(\varepsilon) : \varepsilon\phi\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}\right)$

έχουμε ότι $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$ ισχύει η (**) κ' άρα η (*). ⊠

$*$ $\alpha = 0$ έχουμε την $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \to 0$ αφού η

ακολουθία είναι $\underset{\text{σ.π.}}{=}$ με την $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ που συγκλίνει

στο 0. ⊠

Τέλος Διάλεξης 11