Διάλεξη 9

A. Περαιτέρω χρήσιμα αποτελέσματα για τον υπολογισμό ορίων που προκύπτουν από τον γεωμετρικό ορισμό

B. Προετοιμασία για την εξαγωγή του αναλυτικού ορισμού του ορίου, και διατύπωση του ορισμού.

Διάλεξη 9

Οι ακολουθίες χρησιμεύουν κυρίως στην διαμόρφωση λογισμού ο οποίος διευκολύνει σε ορισμένες περιπτώσεις την διαπραγμάτευση

α) είναι η (x_n) συγκλίνουσα;
β) αν ναι, ποιο είναι το όριο;

1. Περαιτέρω χρήσιμα αποτελέσματα για τον λογισμό ορίων που προκύπτουν από τον γεωμετρικό ορισμό:

Λήμμα [Σύγκλιση κ' φραγή] Αν η (x_n) είναι συγκλίνουσα, τότε είναι κ' φραγμένη.

[δηλ. σύγκλιση $\Rightarrow$ φραγή]

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon = 1$ $x_n \in (\ell-1, \ell+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων (γιατί;). Αυτό συνεπάγεται ότι $|x_n| < \max(|\ell-1|, |\ell+1|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός πεπερασμένου πλήθους όρων. Οπότε η (x_n) σχεδόν παντού φραγμένη, και συνεπώς φραγμένη. (γιατί;) $\boxtimes$

* Επομένως αν μια ακολουθία έχει όριο τότε είναι αναγκαστικά φραγμένη. (Φραγή αναγκαία για την σύγκλιση)

* Προσοχή: το αντίστροφο δεν ισχύει, πχ. οι εναλλάσσουσες είναι φραγμένες αλλά όχι συγκλίνουσες. (αν ίσχυε τότε σύγκλιση κ' φραγή θα ήταν ισοδύναμες έννοιες, κ' η ζωή μας θα ήταν ευκολότερη!)

Επομένως: σύγκλιση $\Rightarrow$ φραγή
φραγή $\not\Rightarrow$ σύγκλιση

* Το λήμμα είναι πολύ επιβοηθητικό στον λογισμό ορίων ως εξής: (Θυμηθείτε από την λογική ότι

$$\underbrace{A}_{\text{σύγκλιση}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{φραγή}} \iff \text{όχι } B \Rightarrow \text{όχι } A)$$

Το λήμμα είναι ισοδύναμο με το:
"Αν η ακολ. μη φραγμένη τότε αποκλίνουσα!"

κ' είναι πολλές φορές "ευκολότερο" να δείχνουμε την μη φραγή. Π.χ. Θυμηθείτε την

$(0,1,2,\dots,n,\dots)$ που είναι μη φραγμένη

(⟹ αποκλίνουσα χωρίς να χρειάζονται οι συλλογισμοί για τα όρια που κάναμε σε αυτό το παράδειγμα προηγουμένως)

Λήμμα [Σύγκλιση κ' σύγκριση] Έστω ότι $x_n \to l$, κ' η $(y_n) \underset{\text{σ.π.}}{=} (x_n)$. Τότε $y_n \to l$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο. Τότε επειδή $x_n \to l$, $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων. Επειδή επίσης $x_n \neq y_n$ για πεπερασμένο πλήθος από n ⟹ $y_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων.

Το αποτέλεσμα έπεται εφόσον το ε επιλέχθηκε αυθαίρετα. ☐

* Το λήμμα ισοδυναμεί με την διαπίστωση ότι το αν $x_n \to l$ δεν εξαρτάται από κανένα πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας.

Επομένως π.χ. αν η (y_n) είναι αυθαίρετη για $n = 0, \dots, 10^8$, αλλά $y_n = \frac{1}{n+1}$ $\forall n > 10^8$ τότε μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι $y_n \to 0$ (γιατί;)

$(y_n) = (;, ;, \dots, ;, \frac{1}{10^8+1}, \frac{1}{10^8+2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots)$, 10^8, $n > 10^8$

$(y_n) \overset{}{\underset{\text{σ.π.}}{=}} \left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\frac{1}{n+1} \to 0$

Λήμμα [Σύγκλιση και διάταξη I]. Έστω ότι $x_n \to l_x \in \mathbb{R}$ κ' $y_n \to l_y \in \mathbb{R}$, ενώ $x_n \le y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,* τότε $l_x \le l_y$. (όμοια αν $x_n \ge y_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow l_x \ge l_y$)

(* η μη αυστηρή σχέση κυριαρχίας μεταξύ των ακολουθιών μεταφέρεται ως αντίστοιχη σχέση κυριαρχίας μεταξύ των ορίων τους)

Απόδειξη. Έστω ότι $l_x > l_y$ $\Longrightarrow$ $\varepsilon := l_x - l_y > 0$.

Τότε $\overbrace{(l_x - \varepsilon/2, l_x + \varepsilon/2)}^{=: I_{x,\varepsilon}} \cap \overbrace{(l_y - \varepsilon/2, l_y + \varepsilon/2)}^{=: I_{y,\varepsilon}} = \emptyset$,

αν $z \in I_{x,\varepsilon}$, $w \in I_{y,\varepsilon}$ αναγκαστικά $z > w$.

Επειδή $x_n \to l_x \Rightarrow x_n \in I_{x,\varepsilon}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων.

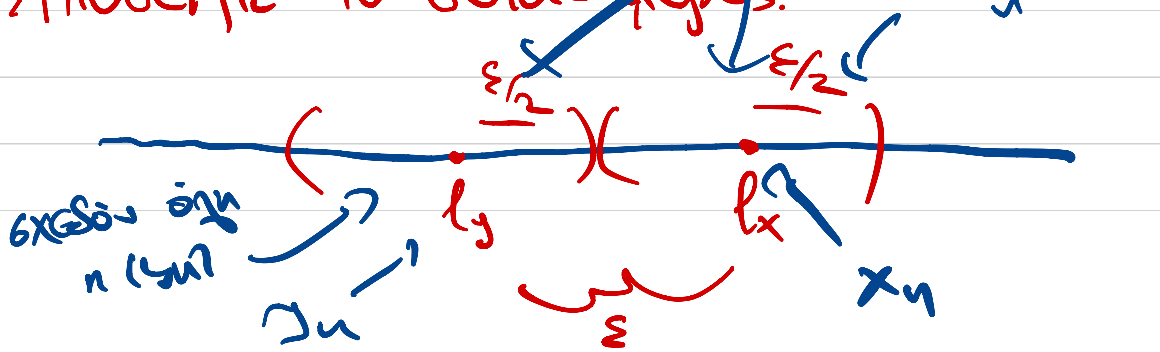
Επειδή $y_n \to l_y \Rightarrow y_n \in I_{y,\varepsilon}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων.

$\Downarrow$

$\exists n^* \in \mathbb{N}$: $x_{n^*} \in I_{x,\varepsilon}$ κ' $y_{n^*} \in I_{y,\varepsilon}$

Οπότε $x_{n^*} > y_{n^*}$ ἄτοπο. ☒

Άσκηση. Αποδείξτε το δεύτερο μέρος.



(Προσοχή: Το λήμμα επιτρέπει να $x_n < y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ αλλά $\ell_x = \ell_y$)

Πόρισμα. Έστω $x_n \to \ell_x$ κ' $\exists c \in \mathbb{R}$: $x_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $\ell_x \leq c$. $(\ell_x \geq c)$ ($x_n \geq$ $\forall n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη. Έστω $(y_n) := (c, c, \ldots, c, \ldots)$.

$y_n \to c := \ell_y$ (γιατί;). Από το προηγούμενο

λήμμα (την φυσική εκδοχή) έχουμε ότι $\ell_x \leq \ell_y = c$. $\boxtimes$

Άσκηση. Είναι δυνατόν ακολουθία με μη αρνητικούς

όρους να έχει αρνητικό όριο; (Μας δίνει πληροφορία για το που μπορεί να βρίσκεται το όριο)

Άσκηση. Το λήμμα [Σύγκριση ή σύγκριση II] θα

εξακολουθούσε να ισχύει αν η σύγκριση των

(x_n) κ' (y_n) ίσχυε σχεδόν παντού;

B.

Προετοιμασία για την διατύπωση του αναλυτικού ορισμού.

*Παρατηρήσαμε ότι ο γεωμετρικός ορισμός, αν και ακριβής δεν είναι, εύκολα να μας παρέχει πληροφορία π.χ. για το πόσοι όροι της ακολουθίας βρίσκονται εκτός όποιου διαστήματος. Αυτό δεν ήταν επιβοηθητικό στην περαιτέρω ανάπτυξη του λογισμού. Θα προσπαθήσουμε να μεταγράψουμε τον ορισμό χρησιμοποιώντας αναλυτικούς όρους (ανισότητες, ποσοδείκτες $\forall, \exists$, κ.ο.κ.)

Θα πρέπει να κάνουμε τις εξής αναδιατυπώσεις:

Γεωμετρικός Ορ.		Αναλυτική Διατύπωση
* Ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ (δεδομένου του κέντρου αυτό προσδιορίζεται από την ακτίνα του $\varepsilon>0$).	$\rightarrow$	$\varepsilon>0,\ (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\Downarrow$
* Ιδιότητα που ισχύει για κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ	$\rightarrow$	$\forall \varepsilon>0$
* Ο νιοστός όρος της ακολουθίας βρίσκεται στο εν λόγω διάστημα $x_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) = \{y\in\mathbb{R} : \lvert y-\ell\rvert<\varepsilon\}$	$\rightarrow$	$\lvert x_n-\ell\rvert<\varepsilon$
* Σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στο εν λόγω διάστημα $\Leftrightarrow$ $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n^*}, \dots)$	$\rightarrow$	$\exists n^* \in \mathbb{N} : \lvert x_n-\ell\rvert<\varepsilon \ \forall n\geq n^*$ όλοι οι όροι από τον x_{n^*} και μετά βρίσκονται στο διάστημα

Αυτό ισχύει επειδή:

* αν σχεδόν όλη η ακολουθία βρίσκεται στο $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\Rightarrow$ θα υπάρχει όρος τέτοιος ώστε όλοι οι όροι από αυτόν κ' μετά βρίσκονται στο $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ $\exists n^* \in \mathbb{N} : |x_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n^*$

  επισημαίνει τον όρο

* Αν $\exists n^* \in \mathbb{N} : |x_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n^*$ τότε οι όροι που δεν βρίσκονται στο $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ είναι το πολύ οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n^*-1}$ που συγκροτούν πεπερασμένο πλήθος.

* Το πλήθος των όρων που βρίσκονται εκτός μπορεί να εξαρτάται από το διάστημα

  Το n^* είναι συνάρτηση του ε, $n^*(\varepsilon)$.

Οπότε συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα έχουμε:

Ορισμός [Αναγκαίος] Ορίου. Το $\ell \in \mathbb{R}$ θα είναι το όριο της (x_n) αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n^*(\varepsilon)$:

$$|x_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n^*(\varepsilon).$$

∎