Στοιχεία Διαλέξεων 5-6-7

- Άλγεβρα κ' φραγή
- Μονοτονία Πραγματικών Ακολουθιών
- Φραγή κ' Μονοτονία - Ασυμπτωτική Συγκέντρωση (κινητροδότηση ορισμού ορίου)

Συνέχεια Διάλεξης 5

Τα Λημ. 1 - 3 θα μας είναι χρήσιμα π.χ. σε περίπτωση που η (x_n) δεν μας είναι απόλυτα γνωστή αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει κ' μας ενδιαφέρει να ξέρουμε το αν είναι φραγμένη:

Παράδειγμα: Έστω ότι για την (x_n) ισχύει ότι

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ εκτός πεπερασμένου πλήθους

όρων. Τότε κ' η (x_n) φραγμένη αφού

- από Λήμμα 3 μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους που δεν ικανοποιούν τις ανισότητες
- για τους υπόλοιπους έχουμε ότι $x_n = |x_n| \leq |y_n| = y_n := 1/n+1$, ενώ η $(1/n+1)$ είναι φραγμένη.
- Το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 2 (ii)

Αλληλεπίδραση Φραγής κ' Άλγεβρας

Τι συμβαίνει με την φραγή όταν κάνουμε αλγεβρικές πράξεις επί φραγμένων ακολουθιών, διατηρείται;

- Οι αλγεβρικές πράξεις μπορούν να νοηθούν ως μετασχηματισμοί ακολουθιών. Επηρεάζουν την φραγή;

Λήμμα. [Φραγή κ' Άλγεβρα] Έστω $(x_n), (y_n)$ φραγμένες, και $\lambda \in \mathbb{R}$.
Τότε:

I. η $(x_n)+(y_n)$ φραγμένη, $= (x_n+y_n)$

II. η $\lambda(x_n)$ φραγμένη, και (λx_n)

III. η $(x_n)\otimes(y_n)$ φραγμένη. $(x_n y_n)$

Απόδειξη. Θα εργαστούμε με απόλυτα φράγματα. (x_n) κ' (y_n) φραγμένες $\Leftrightarrow \exists\, C_x, C_y > 0$:

$$\begin{cases} |x_n| \leq C_x & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 1) \\ |y_n| \leq C_y & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 2) \end{cases}$$

I. $(\alpha 1) + (\alpha 2) \Rightarrow |x_n| + |y_n| \leq C_x + C_y \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 3)$
κατά μέλη

αλλά εξαιτίας της Τριγωνικής ανισότητας $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}: |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|)$

$$\begin{cases} |x_n+y_n| \leq |x_n|+|y_n| & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 4) \\ |x_n|+|y_n| \leq C_x+C_y & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 3) \end{cases}$$

Από $(\alpha 3)$ κ' $(\alpha 4)$ $|x_n+y_n| \leq C_x+C_y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ οπότε το

$C_x+C_y > 0$ αποτελεί απόλυτο φράγμα για την $(x_n)+(y_n)$.

II. $|\lambda| \times (\alpha 1) \Rightarrow |\lambda|\,|x_n| \leq |\lambda|\, C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
κατά μέλη

Αλλά $|\lambda|\,|x_n| = |\lambda x_n| \Rightarrow |\lambda x_n| \leq |\lambda| C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

απολ. τιμή του ν-στού όρου της (λx_n)

επομένως το $|\lambda| C_x$ είναι απόλυτο φράγμα για την $\lambda(x_n)$.

III. $(\alpha 1) \times (\alpha 2) \Rightarrow |x_n|\,|y_n| \leq C_x C_y \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
κατά μέλη

$|x_n y_n|$

απόλ. τιμή του γινομένου όρου της $(x_n y_n)$

Αλλά $|x_n||y_n| = |x_n y_n| \Rightarrow |x_n y_n| \leq C_x C_y \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως το $C_x C_y \geq 0$ αποτελεί απόλυτο φράγμα για την

$(x_n) \otimes (y_n)$. ▥

* Η άλγεβρα διατηρεί την φραγή.

Η παρακάτω δομή δεν υπάρχει στην άλγεβρα μεταξύ μη φραγμένων ακολουθιών: είναι δυνατό καθε ενδεχόμενο – βρείτε παραδείγματα!

Όταν όμως προσθέτουμε μεταξύ τους φραγμένη με μη φραγμένη ακολουθία τότε:

Λήμμα [Μη φραγή] Έστω ότι (x_n) φραγμένη κ' (y_n) μη φραγμένη. Τότε $(x_n)+(y_n)$ μη φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω ότι η $(x_n)+(y_n)$ φραγμένη. Τότε $\exists\, L, M \in \mathbb{R}$:

$$L \leq x_n + y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff$$

$$L - x_n \leq y_n \leq M - x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$(-x_n)$

(x_n) φραγμένη $\iff \exists \inf x_n$ κ' $\sup x_n$ κ'

$\inf x_n \leq x_n \leq \sup x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \iff$ *

ανεξάρτητα του n

$$-\sup x_n \leq -x_n \leq -\inf x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad **$$

$\Rightarrow \quad L - \sup x_n \leq y_n \leq M - \inf x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

στοιχ. ορισμ. σταθ. αρ. ✓ (*)

κ' επομένως οι $L^* := L - \sup x_n \in \mathbb{R}$ κ' $M^* := M - \inf x_n \in \mathbb{R}$ αποτελούν αντίστοιχα κάτω κ' άνω φράγματα για την (y_n). Άτοπο (γιατί;). ∎

* Στο παραπάνω έχει σημασία ότι τα $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητα του n.

B. Μονοτονία

Είναι δυνατόν σε πραγματική ακολουθία

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

οι όροι να μην διατάσσονται σύμφωνα με την φυσική τους διάταξη στην πραγματική ευθεία: (ή την αντίστροφή της)

π.χ. στην $(0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots)$ ο x_2 έπεται του x_1 αλλά $x_2 \leq x_1$ ενώ ο x_3 έπεται του x_2 αλλά $x_3 \geq x_2$.

Οι ακολουθίες στις οποίες αυτό αποκλείεται ονομάζονται μονότονες.

Σημαντικά ο συμβολισμός μας θα είναι:

Μονότονες πραγματικές συναρτήσεις

συναρτησ. ορισμός → μονότονες πρ. ακολουθίες

Προετοιμασία: Έστω $f: \underset{\text{πρ. ακ., } \mathbb{N}}{X} \to \mathbb{R}$. Τώρα το X θα πρέπει να είναι διατεταγμένο (π.χ. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$)

Ορισμός: η f θα ονομάζεται:

i. αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

ii. γνησίως αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

iii. φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

iv. γνησίως φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Όταν η f ικανοποιεί κάποιο από τα i-iv ονομάζεται μονότονη. □

* Οι αντίστοιχοι αγγλικοί όροι:
- i increasing
- ii strictly increasing
- iii decreasing
- iv strictly decreasing

Monotonic

* Για τις περιπτώσεις iii-iv γραμματικά ακριβέστερος θα ήταν ο όρος αναμονότονη.

☒ (Διάλεξη 5)

Διάλεξη 6

Παράδειγμα.*
αν η f σταθερή, τότε είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα. Αντίστροφα αν η f ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα τότε σταθερή αφού

αν $x_1 \neq x_2$ (έστω $x_1 < x_2$ ✓) $\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & \text{αυξ.} \\ f(x_1) \geq f(x_2) & \text{αυξ.} \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Ω ✓

Άσκηση. Υπάρχει f ταυτόχρονα γνησίως αύξουσα κ' γνησίως φθίνουσα;

Παράδειγμα:

$X = \mathbb{R}$, $f(x) := \eta\mu(x)$. Μη μονότονη (γιατί;)
$X = \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. Γν. αύξουσα. Υ.Ο.Ω.
(βρείτε γνησ.) παρ.)

Εφόσον από τον συνεχιστικό ορισμό της στρ. ακολουθίας έχουμε ότι $X = \mathbb{N}$ διατεταγμένο:

αποκτάμε από τον παραπάνω ορισμό
(για $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ αντί των x_1, x_2)

Ορισμός. [Μονοτονία]

Έστω η $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ (ισοδύναμα $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$) πρ. ακολουθία. Αυτή θα ονομάζεται:

i. Αύξουσα αν η f είναι αύξουσα $\Leftrightarrow$ *

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1<n_2 \Rightarrow \overset{x_{n_1}}{f(n_1)} \le \overset{x_{n_2}}{f(n_2)} \Leftrightarrow$ (*) (*)

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1<n_2 \Rightarrow x_{n_1} \le x_{n_2}$

ii. Γνησίως αύξουσα αν η f είναι γν. αύξουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1<n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$ $(x_{n_1}<x_{n_2})$

iii. Φθίνουσα αν η f είναι φθίνουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1<n_2 \Rightarrow f(n_1) \ge f(n_2)$ $(x_{n_1}\ge x_{n_2})$

iv. Γνησίως φθίνουσα αν η f είναι γν. φθίνουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1<n_2 \Rightarrow f(n_1) > f(n_2)$ $(x_{n_1}>x_{n_2})$

Αν η (x_n) ικανοποιεί κάποιο από τα παραπάνω θα ονομάζεται μονότονη. ∎

Χρήσιμη Ισοδυναμία:

Η (x_n) αύξουσα ανν $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n \le x_{n+1}$ (*) (1)

Η (x_n) γνησίως αύξουσα ανν $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$ (2)

Η (x_n) φθίνουσα ανν $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n \ge x_{n+1}$ (3)

Η (x_n) γνησίως φθίνουσα ανν $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$ (4)

* Το παραπάνω εξετάζει την συμπεριφορά κάθε ζεύγους διαδοχικών όρων.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n \le x_{n+1}$. Έστω

$$n_1 < n_2 \Rightarrow n_2 - n_1 = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n_2 = n_1 + k.$$

Για $n = n_1$, $n = n_1+1$, $n = n_1+2$, $\vdots$ έχουμε

$$x_{n_1} \le x_{n_1+1} \le x_{n_1+2} \le \dots \le x_{n_1+k} = x_{n_2}$$

Επομένως αν $n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} \le x_{n_2}$ που επιβεβαιώνει τον ορισμό.

(Αντίστροφα αν ισχύει ο ορισμός τότε για $n_1 = n$, $n_2 = n+1$ $\Rightarrow n < n+1 \Rightarrow x_n \le x_{n+1}$)

Άσκηση. Δείξτε αναλόγως τα (2)-(4).

Επομένως η (x_n) αύξουσα ανν

$$(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots)$$

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

γν. αύξουσα ανν

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

φθίνουσα ανν

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

γν. φθίνουσα ανν

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

* η μονοτονία αποτυγχάνει ανν έστω κ' μία από τις παραπάνω ανισότητες ισχύει με την λάθος φορά.

Παραδείγματα:

* Οι σταθερές ακολουθίες είναι ταυτόχρονα αύξουσες κ' φθίνουσες (γιατί;)

* Οι εναλλάσσουσες δεν είναι μονότονες αφού $c, d \in \mathbb{R}$

(αν $c>d$) $\quad > \quad < \quad > \quad \dots \quad < \quad > \quad <$

$$(c,\ d,\ c,\ d,\ \dots,\ c,\ d,\ \dots)$$

(αν $c<d$) $\quad < \quad > \quad < \quad \dots \quad > \quad < \quad >$

* Η $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ γν. αύξουσα

$$0 < 1 < 2 < \dots < n < \dots$$

* η $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots \right)$ γν. φθίνουσα.

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n+1} > \dots$$

Άσκηση. Εξετάστε όλα τα παραδείγματα ακολουθιών που έχουμε δει μέχρι τώρα ως προς την μονοτονία.

Άσκηση. Τι συμβαίνει με τις αλγεβρικές πράξεις ακολουθιών της ίδιας μονοτονίας, ως προς την μονοτονία;

Γ. Μονοτονία & Φραγή.

Έστω ότι η

(α) (γν.) φθίν.

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots$$

(β) (γν.) αύξ.

(β) Τότε $x_0 \le x_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = \min_{n \in \mathbb{N}} x_n$

→ σε αύξουσα ακολουθία ο πρώτος όρος είναι ο μικρότερος

$\Rightarrow x_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n \Rightarrow$ η ακολουθία φραγμένη από κάτω

(κάθε αύξουσα ακολουθία είναι φραγμένη από κάτω) α) Τότε $x_0 \geq x_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$

$\Rightarrow x_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \Rightarrow$ η ακολουθία

είναι φραγμένη από πάνω.

καθε φθίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη από πάνω

Επομένως οι μονότονες ακολουθίες έχουν αναγκαστικά κάποιου είδους φραγή

(αύξουσες από κάτω - φθίνουσες από πάνω)

Παράδειγμα η $(0,1,2,\dots,n,\dots)$ δεν είναι φραγμένη επειδή αποτυγχάνει να είναι φραγμένη από πάνω.

Ερώτημα. Τι συμβαίνει όταν μια ακολουθία είναι ταυτόχρονα μονότονη κ' (πλήρως) φραγμένη;

— κάτι ενδιαφέρον που θα μας οδηγήσει στην έννοια του ορίου!

Σύνοψη: Φραγή κ' μονοτονία

* κάθε μονότονη ακολουθία είναι μερικώς φραγμένη (αύξουσα - από κάτω,
φθίνουσα - από πάνω) //

Μια ακολουθία όμως μπορεί να είναι:

α. μονότονη αλλά μη φραγμένη

π.χ. $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ // (αύξουσα - μη φραγμένη) ✓ //

β. φραγμένη αλλά μη μονότονη

π.χ. κάθε εναλλάσσουσα (γιατί;) //

γ. ούτε φραγμένη ούτε μονότονη

π.χ. $(0, -1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots)$ ✓ //

(γιατί;)

Θ. φραγμένη και μονότονη

π.χ. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$

(φραγμένη κ' φθίνουσα)

Τι συμβαίνει με τις ακολουθίες που εμπίπτουν στην περίπτωση Θ; (αναγκαστική συγκέντρωση γύρω από κάποιο φράγμα τους)

Ας το διερευνήσουμε:

Έστω η (x_n) φραγμένη κ' αύξουσα.

αυθαίρετα επιλεγμένο ↳ όπου ένας τα παρακάτω ισχύουν $\forall \varepsilon > 0$

Αφού φραγμένη $\Rightarrow \exists \sup x_n$. Έστω $\varepsilon > 0$,

κ' θεωρούμε το διάστημα I_ε: $[\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$.

$\sup x_n - \varepsilon < \sup x_n$

Ισχυρισμός 1: ✓

Υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας που βρίσκεται στο I_ε (ισχύει γενικά για τις φραγμένες ακολουθίες) (προφανώς όλα τα μέλη της (x_n) είναι μικρότερα ή ίσα του $\sup x_n$)

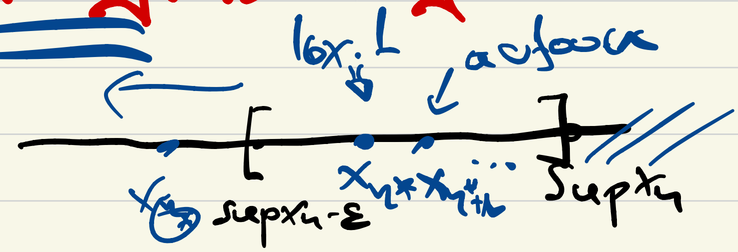
Απόδειξη Ισχυρισμού 1. Έστω ότι κανένας όρος της ακολουθίας δεν βρίσκεται στο I_ε. Αφού $x_n \leq \sup x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ κ' $x_n \notin I_\varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $x_n < \sup x_n - \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι ο πραγματικός αριθμός $\sup x_n - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα της (x_n). Αλλά επειδή $\varepsilon > 0 \Rightarrow \sup x_n - \varepsilon < \sup x_n$ οπότε έχουμε βρει άνω φράγμα αυστηρά μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος. Άτοπο. ∎

* Δεν χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής το ότι η (x_n) είναι αύξουσα. Επομένως ο Ισχυρισμός 1 ισχύει για κάθε φραγμένη (από πάνω) ακολουθία.

☒ Άσκηση 6

Διάλεξη 7

Ισχυρισμός 2. Σχεδόν όλη η ακολουθία βρίσκεται στο I_ε.



Απόδειξη Ισχυρισμού 2. Βάσει του ισχυρισμού 1, $\exists\, n^* \in \mathbb{N} : x_{n^*} \in I_\varepsilon$. Αφού η (x_n) αύξουσα $x_m \geq x_{n^*}$ $\forall m \geq n^*$ κ' αφού $x_n \leq \sup x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n^*} \leq x_m \leq \sup x_n \quad \forall m \geq n^* \iff x_m \in I_\varepsilon \ \forall m \geq n^*.$$

Επομένως οι όροι που ενδεχομένως βρίσκονται εκτός του I, είναι το πολύ οι $x_0, x_1, \dots, x_{n^*-1}$ που συγκροτούν πεπερασμένο πλήθος. ■

* Εδώ χρησιμοποιήσαμε κ' η μονοτονία.

Ισχυρισμός 3. Το ποιοι κ' το πόσοι όροι βρίσκονται εκτός του $I_\varepsilon = [\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ εξαρτώνται από το ε (δηλ. το I_ε).

Απόδειξη Ισχυρισμού 3. $x_{n_*} \notin I_\varepsilon \iff x_{n_*} < \sup x_n - \varepsilon$.
Αν $x_{n_*} < \sup x_n - \varepsilon \Rightarrow x_m \notin I$ $\forall m \leq n_*$ αφού η ακολουθία αύξουσα. Προφανώς το μέγιστο $n_* \in \mathbb{N}$ για το οποίο $x_{n_*} < \sup x_n - \varepsilon$ εξαρτάται γενικά από το ε. ∎

Αφού το ε επιλέχθηκε αυθαίρετα, τα παραπάνω ισχύουν $\forall \varepsilon > 0$. Συνδυάζοντας τους ισχυρισμούς 1-3 έχουμε στην ουσία απόδειξη το παρακάτω:

Θεώρημα 1. Αν η (x_n) αύξουσα κ' φραγμένη, τότε $\forall \varepsilon > 0$ σχεδόν όλη η ακολουθία βρίσκεται στο διάστημα $[\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$, με το ποιοι κ' πόσοι όροι βρίσκονται εκτός να εξαρτάται γενικά από το ε.

Άσκηση Α. Θα άλλαζε κάτι στο προηγούμενο συμπέρασμα αν θεωρούσαμε τα διαστήματα $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ αντί των $[\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$;

Άσκηση Β. (συμμετρικοποίηση) Θα άλλαζε κάτι στο προηγούμενο συμπέρασμα αν θεωρούσαμε διαστήματα (κλειστά ή ανοικτά) με κέντρο το $\sup x_n$ κ' ακτίνα ε; Θα άλλαζε κάτι αν εργαζόμασταν με $[\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ ✓

εργαζόμασταν με $[\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n + \varepsilon]$ ✓

Αν ασχοληθούμε με φθίνουσες και φραγμένες ακολουθίες αποκτούμε την δυϊκή εκδοχή του θεωρήματος:

Θεώρημα 1*: Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη τότε $\forall \varepsilon > 0$, σχεδόν όλη η ακολουθία βρίσκεται στο $[\inf x_n, \inf x_n + \varepsilon]$, με το ποιοι κ' πόσοι όροι βρίσκονται εντός να εξαρτώνται γενικά από το ε.

Άσκηση 7. Αποδείξτε το 1* — αλγεβρικά (i), αναλυτικά (ii)

(i) η (x_n) φθίνουσα ανν η $(-x_n)$ αύξουσα.

(ii) προσαρμογή των ισχυρισμών 1-3.

Παραδείγματα:

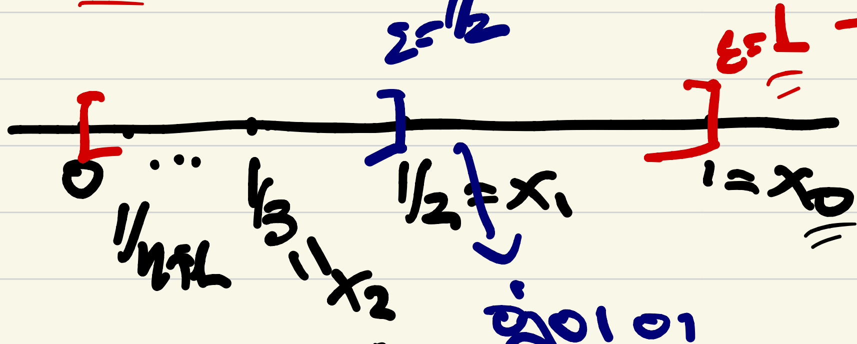
* Σταθερή στο c ✓ (φθίνουσα κ' αύξουσα κ' φραγμένη)

$\sup x_n = \inf x_n = c$ ✓, $x_n \in [c-\varepsilon, c]$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\in [c, c+\varepsilon]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Πλήθος όρων εκτός $= 0$ $\forall \varepsilon > 0$.

* $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/(n+1), \ldots)$ (φθίνουσα κ' φραγμένη)

$\inf x_n = 0$



$\varepsilon = 1$ – όλοι οι όροι εντός $[0,1]$

$[0, \varepsilon]$ (ασχολούμαστε με τέτοια διαστήματα)

όλοι οι όροι εκτός $[0, 1/2]$ από τον πρώτο κ.ο.κ.

$\varepsilon = 10^{-8} \to [0, 10^{-8}]$ πλήθος (εκτός) μεγάλο αλλά πεπ.

* Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα ως ορισμό του ορίου; (ασυμπτωτική συγκέντρωση)