Διαλέξεις 4-5

- Φραγμένα Υποσύνολα του $\mathbb{R}$
- Φραγμένες Πραγματικές συναρτήσεις
- Φραγμένες Πραγματικές Ακολουθίες
- Βοηθητικά Λήμματα

Διάλεξη 4

Στοιχεία Αναλυτικών Ιδιοτήτων Πρ. Ακολουθιών

α. φραγή

β. μονοτονία

A. Φραγή [Υποσύνολα του $\mathbb{R}$ → πρ. συναρτήσεις $\xrightarrow{\text{συν.op}}$ Πρ. ακολουθίες]

Προεργασία: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A θα ονομάζεται:

α. Άνω φραγμένο (Upper Bounded) αν

$\exists M \in \mathbb{R}: \quad x \le M \ \forall x \in A \iff$ (*)

$\exists M \in \mathbb{R}: \quad A \subseteq (-\infty, M]$.

Το M ονομάζεται άνω φράγμα του A (upper bound) κ' όταν υπάρχει δεν είναι μοναδικό (αν $M^* \ge M \Rightarrow x \le M^* \ \forall x \in A$). Υπάρχει όμως κ' είναι μοναδικό το μικρότερο άνω φράγμα του A (supremum - $\sup A$.).

(*) $\iff \sup A \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα: $A = (0,1)$, φραγμένο από πάνω αφού $A \subseteq (-\infty, M]$ $\forall M \ge 1$. $\sup A = 1 \notin A$.

$A = (0,+\infty)$, μη φραγμένο από πάνω αφού $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x$ (π.χ. $x = \max(M+1, 1)$ με $x \in A$ κ' $x > M$)

α'. Ανικά: το A φραγμένο από κάτω (lower bounded) ανν $\exists\, L \in \mathbb{R}$:

$$L \le x \quad \forall x \in A \iff \qquad (**)$$
$$[L, +\infty) \supseteq A$$

Το L ονομάζεται κάτω φράγμα του A (lower bound) κ' εφόσον υπάρχει δεν είναι μοναδικό. Αυτό που είναι μοναδικό είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A ($\inf A$)

$$(**) \iff \inf A \in \mathbb{R}.$$

* Όταν $\sup A \in \mathbb{R}$, $\sup A \in A$ ανν το A έχει μέγιστο. (οπότε $\sup A = \max A$)
Ανικά: >> $\inf A \in \mathbb{R}$, $\inf A \in A$ ανν το A έχει ελάχιστο. (οπότε $\inf A = \min A$)

Άσκηση: Κατασκευάστε παράδειγμα κ' αντιπαράδειγμα.

β. Το A θα ονομάζεται φραγμένο ανν είναι ταυτόχρονα φραγμένο από πάνω κ' από κάτω $\iff$

$$\exists\, L, M \in \mathbb{R}: \ L \le x \le M \ \ \forall x \in A$$
$$\iff \exists\, L, M \in \mathbb{R}: \quad A \subseteq [L, M] \to \text{διάστημα πεπ. αυξήσεως.}$$
$$\iff \quad \sup A, \inf A \in \mathbb{R}$$

(οπότε κ' το $[\inf A, \sup A]$ είναι το μικρότερο διάστημα στο οποίο εμπεριέχεται το A)

Παραδείγματα: $A = (0,1)$ είναι φραγμένο με $\sup A = 1$, $\inf A = 0$
$A = \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο (γιατί;)

Άσκηση: Να δ. ότι αν το A πεπερασμένο τότε κ' φραγμένο.

Υπόδ. A πεπερασμένο $\Rightarrow \exists \min A, \max A$.

Τα παρακάτω θα μας οδηγήσουν στην έννοια της φραγμένης πραγματικής συνάρτησης κ' μέσω του συναρτησιακού ορισμού σε αυτή της φραγμένης πραγματικής ακολουθίας:

Φραγή πραγματικών συναρτήσεων

Έστω η $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ → πραγματική συνάρτηση

X: αυθαίρετο μη κενό σύνολο

Η εικόνα του X στο $\mathbb{R}$ μέσω της f είναι το $f(X) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ για κάποιο $x \in X \}$ $\subseteq \mathbb{R}$ (το σύνολο των τιμών που αποδίδει η f)

Π.χ. έστω $X = [0,1]$, $f(x) = e^x, x \in [0,1]$ τότε $f([0,1]) = [1, e]$.

α. η f θα αναφέρεται φραγμένη από πάνω αν το $f(X) = A$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \; \forall x \in X$ $\Leftrightarrow$ $f(X) \subseteq (-\infty, M]$ $\Leftrightarrow$ $\sup f(X) \in \mathbb{R}$.

→ συνήθης συμβολισμός $\sup_{x \in X} f(x)$

$$\sup_{x \in X} f(x)$$

Παραδείγματα: $X = \mathbb{R}$, $f(x) = ημx$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} ημx = \max_{x \in \mathbb{R}} ημx = 1 \in \mathbb{R}$

Αντιπαράδειγμα $X = \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$, αν υπήρχε M: $\boxed{e^x \leq M \; \forall x \in \mathbb{R}}$ (το M θα μπορούσε να επιλεγεί θετικό - γιατί;) $\Leftrightarrow$ $x \leq \ln M \; \forall x \in \mathbb{R}$, άτοπο

$$\Leftrightarrow \mathbb{R} \subseteq (-\infty, \ln M]$$

α'. Δηλαδή: η f φραγμένη από κάτω αν το $f(X)$ είναι κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, L \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq L$ $\forall x \in X$
$\Leftrightarrow$ $f(X) \subseteq [L, +\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\inf\limits_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}$.

Άσκηση. Βρείτε παράδειγμα κ' αντιπαράδειγμα.

β. η f θα ονομάζεται φραγμένη αν είναι ταυτόχρονα φραγμένη από πάνω κ' από κάτω $\Leftrightarrow$ $\exists\, L, M \in \mathbb{R}$: $L \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in X$ $\Leftrightarrow$
$f(X) \subseteq [L, M]$ $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{x \in X} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \eta\mu x$, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \eta\mu x = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} \eta\mu x = -1$ – φραγμένη.

$X = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, μη φραγμένη αλλά φραγμένη από κάτω – γιατί;

Άσκηση. αν $X = \mathbb{R}$ κ' $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη με τι ισοδυναμεί αυτό για το γράφημα της f;

Εφαρμόζοντας πλέον τον συναρτησιακό ορισμό αποκτούμε την έννοια της φραγμένης πραγματικής ακολουθίας:

Φραγμένες Πραγματικές Ακολουθίες

Έστω πραγματική ακολουθία (x_n) (ισοδύναμα $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = x_n$)
Αυτή θα ονομάζεται:

α. φραγμένη από πάνω αν η f που την ορίζει είναι

άνω φραγμένη πραγματική συνάρτηση $\iff \exists\, M \in \mathbb{R}$:
$f(n) \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff \underset{f(n)}{\underset{\parallel}{x_n}} \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff$

$x_n \in (-\infty, M] \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$.

α. φραγμένη από κάτω αν η f που την ορίζει είναι φραγμένη από κάτω πραγματική συνάρτηση $\iff \exists\, L \in \mathbb{R}$:
$L \leq f(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff L \leq x_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff x_n \in [L, +\infty) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff$
$\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$.

β. φραγμένη αν είναι ταυτόχρονα φραγμένη από πάνω κ' από κάτω.
$\iff \exists\, L, M \in \mathbb{R}$: $L \leq x_n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n, \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$, κ.ο.κ.

Παραδείγματα:

1. Κάθε σταθερή ακολουθία είναι φραγμένη αφού η f που την ορίζει αποδίδει μόνο μία τιμή,
$(c, c, \ldots, c, \ldots)$
$\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = c$

2. Κάθε εναλλάσσουσα ακολουθία είναι φραγμένη αφού η f που την ορίζει αποδίδει μόνο δύο τιμές,
$(c, d, c, d, \ldots)$
$\sup x_n = \max(c, d)$, $\inf x_n = \min(c, d)$

3. η $(0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ μη φραγμένη αφού δεν είναι φραγμένη από πάνω (αν ήταν θα υπήρχε $M \in \mathbb{R}$ $x_n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \iff \mathbb{N} \subseteq (-\infty, M]$ άτοπο). Είναι όμως φραγμένη από κάτω - γιατί;

αντιπαράδειγμα

$0 = \min\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf x_n$

4. η $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/(n+1), \ldots)$ είναι φραγμένη αφού $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

$1 = \max\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$

Άσκηση. Ελέγξτε το ζήτημα της φραγής και για τα υπόλοιπα παραδείγματα πραγματικών ακολουθιών που έχουμε δει.

Βοηθητικά αποτελέσματα για να διαπιστώνουμε το αν μια πραγματική ακολουθία είναι φραγμένη:

Λήμμα 1 [απόλυτες τιμές]. Η (x_n) φραγμένη ανν $\exists\, C \geq 0$:

(*) $\quad |x_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (Χρήσιμο στο να μη χρειάζεται να διαπιστώνουμε τα α κ' α'. $C :=$ απόλυτο φράγμα)

Απόδειξη. ($B \Rightarrow \exists C$)

Έστω ότι η (x_n) φραγμένη $\Leftrightarrow \exists\, L, M \in \mathbb{R} : L \leq x_n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |x_n| \leq \max(|L|, |M|) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $C := \max(|L|, |M|)$.

($\exists C \Rightarrow B$)

Έστω ότι ισχύει το (*). Τότε $|x_n| \leq C \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$-C \leq x_n \leq C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $L = -C$, $M = C$. ∎

Λήμμα 2 [Φραγή - Σύγκριση] Έστω ότι η (y_n) φραγμένη και (x_n) τέτοια ώστε $|x_n| \leq |y_n| \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε κ' η (x_n) φραγμένη. (Χρήσιμο στο να διαπιστώνουμε την φραγή μέσω σύγκρισης με βοηθητική ακολουθία που ήδη γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένη)

Απόδειξη. Η (y_n) φραγμένη $\overset{\lambda.1}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, C_y > 0$:

$|y_n| \leq C_y$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης

$|x_n| \leq |y_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$|x_n| \leq |y_n| \leq C_y \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ κ'} \Rightarrow |x_n| \leq C_y \ \forall n \in \mathbb{N}$$

συνεπώς το C_y είναι απόλυτο φράγμα κ' για την (x_n). Το αποτέλεσμα έπεται από το λήμμα 1. ∎

Λήμμα 3 [Σχεδόν - Παντού φραγή] Έστω ότι για την (x_n), $\exists\, C^* > 0$:

(*) $|x_n| \leq C^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων. Τότε η (x_n) είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αν το πλήθος των όρων για το οποίο δεν ισχύει το (*) είναι μηδέν τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από το λήμμα 1. Έστω ότι το πλήθος των όρων είναι $k > 0$. Έστω ότι οι όροι αυτοί είναι οι $x_{n(1)}, x_{n(2)}, \dots, x_{n(k)}$. Τότε το

$C :=$ $\max(C^*, |x_{n(1)}|, |x_{n(2)}|, \dots, |x_{n(k)}|) \in \mathbb{R}$ επειδή το σύνολο

$A = \{C^*, |x_{n(1)}|, |x_{n(2)}|, \dots, |x_{n(k)}|\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένο $\rightarrow$ k+1 όροι

(έχει k+1 όρους). Άρα τότε $|x_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ∎

↳ "μεγαλώσαμε" το C^* κατάλληλα ώστε να καλύπτει όλους τους όρους.

* Δηλαδή η σχεδόν παντού φράση είναι ισοδύναμη με την φράση - μπορούμε να δείχνουμε την φράση "δείχνοντας" πεπερασμένα κομμάτια των ακολουθιών.