Το Θεώρημα παραγωγισιμότητας των δυναμοσειρών είναι δυνατόν να τις κάνει χρήσιμες σε διαδικασίες εύρεσης λύσεων συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Η σχετική μεθοδολογία εύρεσης λύσεων, την οποία θα ονομάζουμε μέθοδο των δυναμοσειρών, συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

1. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης που έχουν την μορφή δυναμοσειράς (π.χ. με κέντρο το 0). Αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά τέτοιες λύσεις θα έχουν μη τετριμμένο διάστημα σύγκλισης (γιατί;). Το να βρούμε αυτές τις λύσεις ισοδυναμεί με το να βρούμε τους συντελεστές αυτών των δυναμοσειρών.
2. Εκμεταλλευόμενοι το παραπάνω και τα όσα γνωρίζουμε για την μορφή των παραγώγων παραγωγίσιμων δυναμοσειρων, τις αντικαθιστούμε στην μορφή της εξίσωσης, οπότε παίρνουμε ισότητα δυναμοσειρών με το ίδιο κέντρο (γιατί;) για κάθε σημείο στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης τέτοιων λύσεων (γιατί;).
3. Τα όσα γνωρίζουμε για την ισότητα δυναμοσειρών με το ίδιο κέντρο μαζί με το παραπάνω, συνεπάγονται σύστημα αριθμήσιμου πλήθους από αναδρομικές σχέσεις, λύνοντας το οποίο αποκτούμε τους συντελεστές που προσδιορίζουν τις παραπάνω λύσεις (εφόσον υπάρχουν). Δεν θα έχουμε από τις παραπάνω σχέσεις πληροφορία για τόσους συντελεστές όσες και οι σταθερές που θα προέκυπταν με το αν λύναμε την εξίσωση με ολοκλήρωση (δηλ. όση και η τάξη της εξίσωσης;). Για αυτές μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης (το οποίο διάστημα σύγκλισης θα πρέπει να είναι μη τετριμμένο αλλίως η εν λόγω λύση δεν έχει νόημα) ή να τις αναγνωρίσουμε εφόσον είναι εφικτό.

Παράδειγμα [Γραμμική Δ.Ε. 1ης Τάξης - Σταθεροί Συντελεστές κ' Όρος]

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο γενικό παράδειγμα εξίσωσης της μορφής

$$[*] \quad y' = \alpha y + \beta \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Αυτή ονομάζεται γραμμική [επειδή μπορεί να τεθεί σε μορφή $\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}(1, -\alpha) = \beta$], με σταθερούς συντελεστές $(1, -\alpha)$ [επειδή αυτοί είναι σταθερές συναρτήσεις του x] και σταθερό όρο β [επειδή επίσης είναι σταθερή συνάρτηση του x]. Παρατηρούμε ότι αν $\alpha = 0$ ή/και $\beta = 0$ η παραπάνω είναι δυνατόν να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών και απευθείας ολοκλήρωση. Ο χωρισμός μεταβλητών είναι μη εφικτός όταν δεν ισχύει το παραπάνω. Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα μεθοδολογία έχουμε τα εξής:

A. Περίπτωση $a \neq 0$

(1) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν λύσεις της μορφής $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

[προφανώς με μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης]. Ο προσδιορισμός τέτοιων λύσεων ταυτίζεται στον προσδιορισμό της ακολουθίας των συντελεστών (a_i).

(2) Από το θεώρημα της παραγωγισιμότητας και το 1 θα έχουμε για οποιαδήποτε τέτοια λύση ότι για κάθε x στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισής της θα ικανοποιεί ισοδύναμα με την [*] την

$$[**] \quad \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i = a\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i + \beta = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i x^i \quad \text{όπου}$$

$$\beta_i = \begin{cases} a a_0 + \beta, & i=0 \\ a a_i, & i>0 \end{cases}$$

(3) Από τα όσα γνωρίζουμε για την ισότητα δυναμοσειρών το [**] είναι ισοδύναμο με το παρακάτω σύστημα από αριθμήσιμου πλήθους εξισώσεων ως προς τα a_i, $i\in\mathbb{N}$

$$(i+1)a_{i+1} = \beta_i \quad \forall i\in\mathbb{N} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = a a_0 + \beta \\ 2a_2 = a a_1 \\ 3a_3 = a a_2 \\ \vdots \\ (i+1)a_{i+1} = a a_i \quad (i>0) \\ \vdots \end{cases}$$

το οποίο είναι δυνατόν να λυθεί αναδρομικά. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις επαρκούν για τον προσδιορισμό όλων των ζητούμενων συντελεστών πλην ενός, το οποίο σχετίζεται προφανώς με την σταθερά ολοκλήρωσης που αποκτούμε από διαδικασίες ολοκλήρωσης και με το γεγονός του μηδενισμού των σταθερών συναρτήσεων από την σταθεροποίηση πρώτης τάξης. Έτσι θέτουμε $a_0=c$ (Εξηγήστε το αν θα άλλαζε το αποτέλεσμα αν είχαμε επιλέξει οποιοδήποτε άλλο μέρος της ακολουθίας των ζητούμενων συντελεστών.)

Οπότε αποκτούμε

(μπορείτε να το επιβεβαιώσετε επαγωγικά)

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= c\\
a_1 &= \alpha c + \beta\\
a_2 &= \frac{1}{2}\alpha^2 c + \frac{1}{2}\alpha\beta\\
a_3 &= \frac{1}{2\cdot 3}\alpha^3 c + \frac{1}{2}\alpha^2\beta\\
&\vdots\\
a_i &= \frac{1}{i!}\alpha^i c + \frac{1}{i!}\alpha^{i-1}\beta \quad (i>0)\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \underset{(\Longleftarrow)}{\alpha\neq 0}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{0!}\alpha^0 c^* - \frac{\beta}{\alpha}\\
a_1 &= \frac{1}{1!}\alpha c^*\\
a_2 &= \frac{1}{2!}\alpha^2 c^*\\
&\vdots\\
a_i &= \frac{1}{i!}\alpha^i c^* \quad (i>0)\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \quad a_i = \begin{cases} \frac{1}{0!}\alpha^0 c^* - \beta/\alpha, & i=0\\ \frac{1}{i!}\alpha^i c^*, & i>0 \end{cases}$$

όπου $c^* = c + \frac{\beta}{\alpha}$. Επομένως οι εν λόγω λύσεις είναι οι

$$y(x) = \frac{1}{0!}\alpha^0 c^* - \frac{\beta}{\alpha} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha^i}{i!}c^* x^i$$
$$= -\frac{\beta}{\alpha} + c^*\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha x)^i}{i!} = c^* e^{\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}$$

από όσα γνωρίζουμε για την αναπαράσταση της εκθετικής συνάρτησης από δυναμοσειρά.

Β. Περίπτωση $\alpha=0$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για την περίπτωση που $\alpha=0$, έχουμε υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

$$[*] \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i = \beta = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i x^i \quad \text{όπου } \beta_i = \begin{cases} \beta & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

Το οποίο εξαιτίας της ισότητας δυναμοσειρών ισοδυναμεί με

$$\begin{cases} a_1 = \beta \\ 2a_2 = 0 \\ \vdots \\ k a_k = 0 \quad (k>0) \\ \vdots \end{cases}$$

από το οποίο προκύπτει

$$\begin{cases} a_1 = \beta \\ a_k = 0 & k>1 \end{cases}$$

ενώ από την απροσδιοριστία του a_0 προκύπτει ότι $a_0 = C$. Συνεπώς προκύπτουν λύσεις της μορφής $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i = \begin{cases} C, & i=0 \\ \beta, & i=1 \\ 0, & i>1 \end{cases}$

οπότε $y(x) = C + \beta x$ όπως περιμέναμε. □

Παρατηρήσεις:

1. με τον παραπάνω τον τρόπο αποφεύγονται διαδικασίες ολοκλήρωσης της εξίσωσης με τις συμπαρομαρτούσες δυσκολίες τουλάχιστον για την εύρεση λύσεων που αναπαρίστανται από δυναμοσειρές.

2. Είναι δυνατό να χρειάζεται περαιτέρω προσπάθεια προκειμένου να βρούμε λύσεις οι οποίες δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως δυναμοσειρές (στην περίπτωση που μελετήσαμε δεν υπάρχουν τέτοιες-το γιατί είναι προφανές τουλάχιστον στην περίπτωση που α=0). Παρόλα αυτά η εύρεση των παραπάνω λύσεων μπορεί σε διάφορα προβλήματα να είναι επαρκής ή να παρουσιάζει από μόνη της ενδιαφέρον.

Εφαρμογή Παραδείγματος [Δυναμική Ευστάθεια Αγοράς]

Έστω αγορά που λειτουργεί σε συνεχή χρόνο ο οποίος αναπαρίσταται από το $\mathbb{R}$. Σε κάθε χρονική στιγμή $t\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την τιμή p:

Ζήτησης $D(p) = c_1 - c_2 P$

Προσφοράς $S(p) = c_3 + c_4 P$, $c_i > 0$, $i=1,\dots,4$, $c_1 > c_3$.

A. Να βρεθεί η τιμή ισορροπίας p^e

Εφόσον υπάρχει η p^e ορίζεται από την $D(p^e) = S(p^e)$

$\Leftrightarrow c_1 - c_2 p^e = c_3 + c_4 p^e \Leftrightarrow p^e = \frac{c_1 - c_3}{c_2 + c_4}$.

Επομένως η p^e υπάρχει και είναι μοναδική. Από τα παραπάνω τίποτα δεν εγγυάται ότι η p^e θα προκύψει στην εν λόγω αγορά σε κάποια χρονική στιγμή.

B. Έστω ότι η διαχρονική εξέλιξη της τιμής, δηλαδή η τιμή που επικρατεί ως συνάρτηση του χρόνου t, ικανοποιεί την σχέση, έστω ότι $k>0$,

$p' = k(D(p) - S(p))$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Επίσης γίνεται γνωστό ότι στην χρονική στιγμή t_0 η τιμή είναι η $P_0 > 0$, δηλαδή $P(t_0) = P_0$. Να βρεθεί η διαχρονική εξέλιξη της τιμής.

Παρατήρηση. Οι παραπάνω σχέσεις συγκροτούν το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών, $\begin{cases} P' = k(D(p) - S(p)) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$.

Η ζητούμενη $P(t)$ θα αποτελεί λύση του παραπάνω, εφόσον αυτό έχει λύση, ενώ ελλείψει οποιασδήποτε άλλης πληροφορίας για αυτή, προκύπτκαι να είναι προσδιορίσιμη θα πρέπει να είναι και η μοναδική λύση του ΠΑΤ. Παρατηρούμε ότι η σχέση $p' = k(D(p) - S(p))$, επειδή το $k>0$ αποτελεί μία εξασφάλιση, του ότι όταν υπάρχει υπερβάλλουσα ζήτηση η τιμή θα τείνει να αυξηθεί κ.ο.κ.

Αντικαθιστώντας τις μορφές των $D(p), S(p)$ στην παραπάνω διαφορική σχέση έχουμε $p' = k(c_1 - c_2 p - c_3 - c_4 p) \Leftrightarrow$

$$p' = -k(c_2+c_4)p + k(c_1 - c_3).$$

Κάνοντας τις εξής τακτικές συμβόλων $x \to t$, $y \to p$, $\alpha = -k(c_2+c_4)$, $\beta = k(c_1-c_3)$ παρατηρούμε ότι πρόκειται για Δ.Ε. 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό όρο (κάτι που οφείλεται στις γραμμικές μορφές της διαφορικής σχέσης, της D και της P, καθώς και στο ότι οι συντελεστές τους k, c_i $i=1,\dots,4$ είναι ανεξάρτητοι του t.)

Επομένως το ΠΑΤ παίρνει την μορφή

$$\begin{cases} p' = -k(c_2+c_4)p + k(c_1-c_3) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα οι λύσεις της ΔΕ είναι της μορφής

$$p(t) = c\exp(-k(c_2+c_4)t) - \frac{k(c_1-c_3)}{-k(c_2+c_4)}$$

$$= c\exp(-k(c_2+c_4)t) + p^e.$$

Το ΠΑΤ θα ικανοποιείται από αυτές που ικανοποιούν και την συνθήκη $P(t_0) = P_0$. Επομένως

$$\left.\begin{aligned} p(t_0) &= c\exp(-k(c_2+c_4)t) + p^e \\ p(t_0) &= p_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = (p_0 - p_e)\exp(k(c_2+c_4)t_0)$$

και συνεπώς το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση την

$$P(t) = (P_0 - P_e)\exp\left(-k(c_2+c_4)(t-t_0)\right) + p^e$$

που αποτελεί και την ζητούμενη διαχρονική εξέλιξη της τιμής.

Γ. Ποιά η σχέση της $P(t)$ με την P^e για όποιο t;

i. $P_0=P^e$, οπότε $P(t)=P^e$ $\forall t\in\mathbb{R}$ το οποίο μας υποδηλώνει ότι σε ένα συγκεκριμένο υπόβαθρο αν η αγορά ισορροπεί έστω και για μία στιγμή, τότε βρίσκεται πάντα σε ισορροπία.

ii. $P_0\neq P^e$, οπότε $P(t)\neq P^e$ $\forall t\in\mathbb{R}$, αφού στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι $(P_0-P^e)\exp(-\kappa(c_2+c_4)(t-t_0))+P^e=P^e$

$$\Leftrightarrow \exp(-\kappa(c_2+c_4)(t-t_0))=0$$ που είναι

αδύνατο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση η αγορά δεν βρίσκεται ποτέ σε ισορροπία. Παρόλα αυτά επειδή $\kappa, c_2, c_4>0 \Rightarrow$ $\lim_{t\to+\infty}\exp(-\kappa(c_2+c_4)(t-t_0))=0$ (γιατί;) και επομένως

$\lim_{t\to+\infty}P(t)=P^e$, το οποίο σημαίνει ότι η αγορά

καθώς ο χρόνος περνάει θα τείνει προς την ισορροπία (Προφανώς το ίδιο θα συμβαίνει επίσης και όταν $P_0=P^e$ οπότε $P(t)=P^e$ $\forall t\in\mathbb{R}$). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται δυναμική ευστάθεια της αγοράς.

Παρατηρήσεις:

1. Σε αυτή την εφαρμογή δεν μας απασχόλησε το πως είναι δυνατόν οι υποθέσεις που κάνουμε αναφορικά με τις συναρτήσεις προσφοράς, ζήτησης και το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών που περιγράφει την διαχρονική εξέλιξη της τιμής να προκύπτουν από την διαχρονική συμπεριφορά προτιμήσεων, τεχνολογίας, κ.ο.κ. αλλά παρατηρήσαμε ότι οι εν λόγω υποθέσεις είναι διαισθητικά εύλογες.

2. Γενικεύσεις της μορφής του προβλήματος που μπορούν να επίσης να προκύπτουν από διαισθητικά εύλογους συλλογισμούς (π.χ. μη γραμμική μορφή των συναρτήσεων προσφοράς ή/και ζήτησης, πολυπλοκότερη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την διαχρονική εξέλιξη της τιμής, κ.ο.κ.) είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε διαφορετικές και πιο πολύπλοκες ιδιότητες από τις παραπάνω. $\square$

Περαιτέρω Παράδειγμα: Γραμμική Εξίσωση 1ης Τάξης με σταθερούς συντελεστές και Περίπτωση γραμμικού όρου.

Να λυθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών η εξίσωση

$$y' = \alpha y + Bx \quad [**], \quad \alpha \neq 0$$

εφόσον είναι γνωστό ότι κάθε λύση της αναπαρίσταται από δυναμοσειρά με κέντρο το 0.

Λύση. Η παραπάνω διαφέρει από την αρχική περίπτωση στο ότι ο όρος δεν είναι σταθερός αλλά η γραμμική συνάρτηση Bx. Επίσης εξαιτίας της συμφώνησης δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για το αν υπάρχουν λύσεις που δεν έχουν την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το 0. Στην ουσία δηλαδή μας δίνεται ότι οι λύσεις είναι της μορφής $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ και πρέπει να προσδιορίσουμε τις δυνατές (α_i). Από τα παραπάνω έχουμε

$$[**] \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1} x^i = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i + Bx \quad (\text{για ποιά } x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i$$

όπου $\beta_i = \begin{cases} \alpha\alpha_i & i \neq 1 \\ \alpha\alpha_1 + B & i = 1 \end{cases}$ οπότε και από την ισότητα δυναμοσειρών αποκτούμε το ακόλουθο σύστημα από αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_0 = \alpha\alpha_0 \\ 2\alpha_2 = \beta_1 = \alpha\alpha_1 + B \\ 3\alpha_3 = \beta_2 = \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \kappa\alpha_\kappa = \beta_{\kappa-1} = \alpha\alpha_{\kappa-1} \quad (\kappa > 2) \\ \vdots \end{cases}$$

το οποίο αφήνει απροσδιόριστο έναν συντελεστή, έστω το a_0, οπότε θέτουμε $a_0 = C \in \mathbb{R}$ και λύνοντας αναδρομικά έχουμε

$$\begin{cases} a_0 = C \\ a_1 = \alpha C \\ a_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 C + \frac{1}{2} B \\ a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\alpha^3 C + \frac{1}{2\cdot 3}\alpha B \\ a_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\alpha^4 C + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\alpha^2 B \\ \vdots \\ a_k = \frac{1}{k!}\alpha^k C + \frac{1}{k!}\alpha^{k-2} B \quad (k>2) \\ \vdots \end{cases}$$

Επομένως οι λύσεις έχουν την μορφή $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} C x^i +$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha^{i-2}}{i!} B x^i = C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!} + \frac{B}{\alpha^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!}$$

$$= C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!} + \frac{B}{\alpha^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!} - \frac{B}{\alpha^2}\frac{(\alpha x)^0}{0!} - \frac{B}{\alpha^2}\frac{(\alpha x)^1}{1!}$$

και εξαιτίας των όσων γνωρίζουμε για την αναπαράσταση της εκθετικής συνάρτησης από δυναμοσειρά το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$y(x) = C e^{\alpha x} + \frac{B}{\alpha^2} e^{\alpha x} - \frac{B}{\alpha^2} - \frac{B}{\alpha} x$$

$$= C^* e^{\alpha x} - \frac{B}{\alpha^2} - \frac{B}{\alpha} x,$$

όπου $C^* = C + \frac{B}{\alpha^2} \in \mathbb{R}$. [Επαληθεύστε ότι οι παραπάνω ικανοποιούν πράγματι την [**]].

Ασκήσεις.

Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω Δ.Ε. με την μέθοδο των δυναμοσειρών εφόσον μας δίνεται ότι αυτές αναπαρίστανται ως δυναμοσειρές με κέντρο το μηδέν:

1. Η προηγούμενη για $\alpha = 0$.
2. $xy' = y + B$
3. $xy^2 = y + x$
4. $y' = x^2 y + B$
5. $xy' = xy + B \quad (B \neq 0)$
6. $a_2 y'' + a_1 y' = a_0 y + B \quad (a_2 \neq 0)$

   (αυτή είναι μια εξίσωση δεύτερης τάξης αφού 2 είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην σχέση. Πόσοι συντελεστές θα παραμένουν απροσδιόριστοι από το ανάλογο σύστημα αναδρομικών σχέσεων; Γιατί; Πως θα άλλαζε η απάντηση σας αν η τάξη της εξίσωσης ήταν $k > 0$;)
7. $y'' = ay + \beta x$
8. $y'' = xy + B \quad (B \neq 0)$
9. $y''' = y + B \quad (B \neq 0)$