Εφαρμογή Δυναμοσειρών στην Θεωρία Πιθανοτήτων:

Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις και Αναπαράσταση Κατανομής από τις Ροπές της.

Το παρακάτω αποτελεί εισαγωγική εφαρμογή των δυναμοσειρών στην θεωρία πιθανοτήτων.

Υπενθυμίζεται ότι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση, που ορίζεται σε κατάλληλη συλλογή από υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (είναι δηλαδή συνολοσυνάρτηση) που ικανοποιεί κάποιες περαιτέρω ιδιότητες - συμβατές με την διαίσθησή μας για την έννοια της μέτρησης, και όταν υπολογισθεί σε όποιο από αυτά αποδίδει μια έννοια μεγέθους του.

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας του πεδίου ορισμού της, για την περιγραφή οποιασδήποτε τέτοιας κατανομής δεν χρησιμοποιείται συνήθως ο ορισμός της, αλλά αναπαρίσταται από πιο οικεία αντικείμενα όπως η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής, cdf (υπάρχει πάντα και είναι μοναδική), ή η συνάρτηση πυκνότητας, pdf (δεν υπάρχει πάντα και μπορεί να μην είναι μοναδική), κ.ο.κ.

Οι ροπές μιας κατανομής πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$, αποτελούν ολοκληρώματα κατάλληλων πολυωνυμικών συναρτήσεων ως προς την $\mathbb{P}$, δηλ. έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P} = \dots \quad , \quad k=0,1,\dots$$

όπου τα αποτελεσματικά στον ορισμό υπολογίζονται την έννοια που δίνεται στην παραπάνω διαδικασία ολοκλήρωσης. Για κάθε $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}(X^0)=1$, αλλά υπάρχουν $\mathbb{P}$ και k, για τα οποία $\mathbb{E}(X^k)$ δεν υπάρχει επειδή το ανάλογο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. Όταν για κάποιο $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}(X^k)\in\mathbb{R}$ $\forall k=0,1,2,\dots$ τότε είναι καλώς ορισμένη η πραγματική ακολουθία των ροπών της $\mathbb{P}$

$(\mathbb{E}(X^0), \mathbb{E}(X^1), \mathbb{E}(X^2), \dots, \mathbb{E}(X^n), \dots)$.

Ερώτηση. Όταν η παραπάνω είναι καλώς ορισμένη, πότε αναπαριστά την $\mathbb{P}$;
(πότε είναι δηλαδή δυνατόν αν γνωρίζουμε μόνο την ακολουθία να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η κατανομή;)

Παράδειγμα 1. Έστω $y \in \mathbb{R}$. Ως εκφυλισμένη κατανομή στο y ορίζεται η $\mathbb{P}$ που έχει $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & y \notin A \\ 1, & y \in A \end{cases}$. Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι για αυτή έχουμε $\mathbb{E}(X^k) = y^k$, $k = 0, 1, \dots$ οπότε η ακολουθία των ροπών είναι η $(1, y, y^2, \dots, y^n, \dots)$.

Παράδειγμα 2. Η τυπική κατανομή Cauchy είναι δυνατόν να οριστεί μέσω της συνάρτησης πυκνότητας της που είναι η $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Αποδεικνύεται ότι η $\mathbb{E}(X^k)$ δεν υπάρχει για την κατανομή όταν $k \geq 1$ επομένως η ακολουθία των ροπών δεν είναι καλώς ορισμένη.

Σχόλιο. Όταν για μία κατανομή $\mathbb{P}$ η ακολουθία των ροπών δεν είναι καλώς ορισμένη τότε "προφανώς" η κατανομή δεν αναπαρίσταται από αυτές. Αυτός όμως δεν είναι ο μόνος λόγος που η αναπαραστασιμότητα αυτή αποτυγχάνει. Την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα ξεκαθαρίζουν ο επόμενος ορισμός και θεώρημα.

Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Ως ροπογεννήτρια συνάρτηση αυτής (Moment generating function - mgf) ορίζεται η δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν

$$M(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!} t^i \quad (*)$$

Η M είναι καλώς ορισμένη όταν η $\mathbb{P}$ έχει καλώς ορισμένη ακολουθία ροπών ΚΑΙ η δυναμοσειρά στο $(*)$ έχει μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης. □

Θεώρημα. Η $\mathbb{P}$ θα καθορίζεται από την ακολουθία ροπών της ανν η M αυτής είναι καλώς ορισμένη. □

Σχόλια:

1. Έχουμε ότι $M(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ με $a_i = \mathbb{E}(X^i)$. $M(0)=\mathbb{E}(X^0)=1$ για όλα $\mathbb{P}$.
2. Για το καλώς ορισμένο δεν αρκεί να υπάρχουν όλες οι ροπές της $\mathbb{P}$. Θα πρέπει επίσης καθώς το k μεγαλώνει η $\mathbb{E}(X^k)$ να μην αυξάνεται με μεγάλη ταχύτητα ώστε να υπάρχουν και $t\neq 0$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει. Το θεώρημα συνεπάγεται ότι αν η $\mathbb{P}$ έχει όλες τις ροπές της αλλά μη καλώς ορισμένη M, τότε υπάρχει $\mathbb{P}^* \neq \mathbb{P}$ με τις ίδιες ακριβώς ροπές!
3. Όταν η M καλώς ορισμένη τότε εφόσον ισχύει η εναλλαγή μεταθεσιμότητας ορίων έχουμε
$$M(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X^i t^i}{i!}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!}\right) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$$
που αποτελεί και τον εναλλακτικό ορισμό της M.
4. Όταν η M καλώς ορισμένη τότε από ότι γνωρίζουμε για την παραγωγισιμότητα δυναμοσειρών $M(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^{(i)}(0)}{i!} t^i$, οπότε $M^{(i)}(0) := \mathbb{E}(X^i)$.

Επομένως είναι δυνατή η εύρεση των ροπών από την παραγώγιση της M, που είναι υπολογιστικά αποδοτικότερη! Επίσης σε αυτή την περίπτωση η M αναπαριστά την $\mathbb{P}$ (γιατί;). □

Στα παρακάτω παραδείγματα θα έχουμε περιπτώσεις κατανομών οι οποίες αναπαρίστανται από τις ροπές τους. Θα το δείχνουμε βρίσκοντας κάθε φορά την M και αναγνωρίζοντάς την ως συνάρτηση ορισμένη σε t πέρα του μηδενός (γιατί;).

Παραδείγματα

Α. Παράδειγμα 1.

Έχουμε ότι $M(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^i}{i!}t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ty)^i}{i!} = \exp(ty)$

καλώς ορισμένη $\forall t\in\mathbb{R}$. □

Β. Έστω ότι η $\mathbb{P}$ είναι η συνεχής ομοιόμορφη [$Unif_{[0,1]}$] που μπορεί να οριστεί μέσω συνάρτησης πυκνότητας της

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,1]\\ 1, & x\in[0,1]\end{cases}$$

Ισχύει ότι $\mathbb{E}(X^k)=\frac{1}{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$ οπότε

$$M(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)}\frac{1}{i!}t^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}t^i \quad (**)$$

Παρατηρούμε ότι όταν $t\neq 0$, $(**)=\frac{t}{t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}t^i=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}t^{i+1}$

$$\overset{j=i+1}{=}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j\overset{\pm 1}{=}\frac{1}{t}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}t^j-1\right)=\frac{1}{t}(e^t-1).$$ Επομένως η M καλώς ορισμένη

$\forall t\in\mathbb{R}$ (γιατί;) και εξαιτίας της συνέχειας των δυναμοσειρών έχουμε

$$1=\lim_{t\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i=\lim_{t\to 0}M(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^t-1).$$ Επομένως

$\forall t\in\mathbb{R}$ έχουμε $M(t)=\frac{1}{t}(e^t-1)$. □

Γ. Έστω ότι η $\mathbb{P}$ είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ ($Exp(\lambda)$) που είναι δυνατόν να οριστεί από συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases},$$

ενώ ισχύει ότι $\mathbb{E}(X^k)=\frac{k!}{\lambda^k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Έχουμε ότι $$M(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(X^i)}{i!}t^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!}{\lambda^i}\frac{1}{i!}t^i=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^i\overset{\text{γεωμ. σ.}}{=}\frac{1}{1-t/\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

αν $|t/\lambda|=|t|/\lambda<1$. Επομένως εδώ η M καλώς ορισμένη όχι σε όλο το $\mathbb{R}$ αλλά στο $(-\lambda,\lambda)$ το οποίο όμως είναι οπωσδήποτε επαρκές προκειμένου να ισχύει το Θεώρημα όσο μικρό και αν είναι το λ. □

Ασκήσεις.

1. Για την κατανομή Bernoulli με παράμετρο $q\in(0,1)$ έχουμε ότι ορίζεται από

$$\mathbb{P}(A)=\begin{cases} 0, & 0,1\notin A \\ q, & 0\notin A,\ 1\in A \\ 1-q, & 0\in A,\ 1\notin A \\ 1, & 0,1\in A \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να εξαχθεί ότι $\mathbb{E}(X^k) = 0^k(1-q) + 1^k q = \begin{cases} 1 & k=0 \\ q & k>0 \end{cases}.$

Να βρεθεί η M και να απαντηθεί το ερώτημα για την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$.

2. Για την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ δίνεται ότι $M(t)=\exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$. Να βρεθούν οι ροπές της $N(0,1)$.

3. Για την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda>0$ ($Poiss(\lambda)$) δίνεται ότι $M(t) = \exp\left(\lambda(e^t-1)\right)$. Να βρεθούν οι ροπές της $Poiss(\lambda)$.