Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης

Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Ανάλυση Χρηματαγορών και Κεφαλαιαγορών

Στέλιος Αρβανίτης

Γενικό Υπόδειγμα Αποτίμησης Χρηματοοικονομικών Τίτλων

3 Νοεμβρίου 2008

Οι παρούσες αφορούν στήν εξαγωγή υποδείγματος αποτίμησης χρηματοοικονομικών προϊόντων υπό αρκετά γενικές υποθέσεις. Με δεδομένες τις τελευταίες, η τιμή ενός τέτοιου προϊόντος εξαρτάται από την διάρκεια ζωής του (maturity), την απόδοση κατά την λήξη του, και την συνδιακύμανση αυτής με μια τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά την σχετική οριακή ωφέλεια απο την επένδυση σε αυτό στο παρόν (και άρα την μείωση της παροντικής κατανάλωσης), με την οριακή ωφέλεια απο την μελλοντική κατανάλωση εξαίτιας της μελλοντικής (αβέβαιης) απόδοσης αυτού.
Λέξεις Κλειδιά: Χρηματοοικονομικός Τίτλος, Απόδοση, Τιμολόγηση, Συνάρτηση Αναμενόμενης Ωφέλειας, Προτιμήσεις ως προς τον Κίνδυνο, Στοχαστικός Παράγοντας Προεξόφλησης (Stochastic Discount Factor-SDF).

- **Επιδίωξη**: Μας ενδιαφέρει να κατανοήσουμε την διαδικασία σχηματισμού της τιμής χρηματοοικονομικού τίτλου ο οποίος αποδίδει είτε/και σε τακτά, είτε/και σε άτακτα χρονικά διαστήματα, είτε/και κατά την λήξη της διάρκειας ζωής του,[1] χρηματικά πόσα (ή ισοδύναμα, μονάδες κατανάλωσης) στον αγοραστή του. Περιμένουμε, ότι η τιμή θα εξαρτάται από την διάρκεια ζωής, το ύψος της απόδοσης, αλλά και την *αβεβαιότητα* των προαναφερθησών αποδόσεων. Συνεπώς, τα παραπάνω τρία χαρακτηριστικά του εν λόγω τίτλου, συνιστούν *πλήρη περιγραφή* αυτού αναφορικά με την τιμολόγηση του.

[1] εφόσον αυτή είναι προκαθορισμένη.

- **Βασικές Προσεγγίσεις στην Τιμολόγηση**: Οι βασικές προσεγγίσεις στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών τίτλων συνίστανται στις α) *Απόλυτη Τιμολόγηση* (Absolute Pricing) βάσει της οποίας ο σχηματισμός των τιμών γίνεται αναφορικά με *θεμελιώδεις μακροοικονομικές πηγές αβεβαιότητας*, οι οποίες επηρεάζουν τις βασικές μακροοικονομικές μεταβλητές (π.χ., ανάμεσα στα άλλα, τα υποδείγματα CAPM και APT) και β) *Σχετική Τιμολόγηση* (Relative Pricing) βάσει της οποίας ο σχηματισμός των τιμών γίνεται αναφορικά με τις αποδόσεις (ή/και τιμές) άλλων χρηματοοικονομικών τίτλων (π.χ., ανάμεσα στα άλλα, τα υποδείγματα τιμολόγησης δικαιωμάτων όπως το υπόδειγμα των Black και Scholes). Παρατηρούμε, ότι αυτή η μέθοδος τιμολόγησης αν εφαρμοσθεί καθολικά, απαιτεί την ύπαρξη χρηματοοικονομικού τίτλου μοναδιαίας τιμής (numeraire asset) και δεν είναι δυνατόν να ξεδιαλύνει τους παράγοντες αβεβαιότητας που επηρεάζουν τον σχηματισμό της τιμής. Εντούτοις, είναι εξαιρετικά χρήσιμη όταν υπάρχουν σχέσεις υποκατάστασης μεταξύ τίτλων, όποτε και είναι δυνατή η αναγωγή της τιμής του ενός σε αυτή του άλλου. Το υπόδειγμα που θα αναπτυχθεί ενσωματώνει αμφότερες τις προσεγγίσεις.

- **Βασικό Υπόβαθρο**: Η τιμολόγηση στο υποδειγμα που θα αναπτυχθεί βασιζεται στην απόφαση του επενδυτή ως πρός τον καταμερισμό του τρέχοντος εισοδήματος του σε κατανάλωση και αποταμίευση (η οποία μπορεί να είναι και αρνητική - δανεισμός). Δεδομένου του ύψους της *αποφασισμένης* αποταμίευσης, ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο απο τίτλους που θα αγοράσει (ή πουλήσει αν είναι αρνητικός αποταμιευτής). Οι παραπάνω αποφάσεις, παίρνονται στα πλαίσια της μεγιστοποίησης της συνάρτησης αναμενόμενης χρησιμότητας (συνάρτηση ωφέλειας κατά Neymann-Morgestern), ως προς την διαχρονική κατανάλωση δεδομένου του διαχρονικού εισοδηματικού περιορισμού.[2] Έτσι ο επενδυτής έχει προτιμήσεις ως προς την κατανομή της κατανάλωσης του διαχρονικά, και αυτό που στην ουσία τον ενδιαφέρει είναι να διαλέξει την προτιμότερη ροή κατανάλωσης δεδομένου του περιορισμού. Η επένδυση σε αποδοτικούς χρηματοοικονομικούς τίτλους, τον αφορά μόνο στον βαθμό που του διαμορφώνει με θετική πιθανότητα κάποιο επίπεδο μελλοντικής κατανάλωσης. Η παραπάνω παρατήρηση μας οδηγεί στο ότι η αβεβαιότητα ως προς την μελλοντική απόδοση δεδομένου τίτλου, τον αφορά μόνο όταν η απόδοση αυτή συνδιακυμαίνεται με την μελλοντική του κατανάλωση. Αυτό σημαίνει ότι ενας τίτλος είναι κινδυνώδης για τον επενδυτή *μόνο όταν* η απόδοση του επηρεάζεται από (κάποιους από) τους παράγοντες μακροοικονομικής αβεβαιότητας που επηρεάζουν και την διαχρονική του

[2] Ο οποίος σχηματίζεται απο την εξογενή ανα περίοδο προικοδότηση του, την διαχρονική κατανάλωση και αποταμίευση του.

κατανάλωση. Έτσι αν η συνδιακύμανση αυτή είναι θετική, οπότε το περιουσιακό αυτό στοιχείο θα αποδίδει λίγο όταν και η κατανάλωση είναι μικρή, η τίμη που θα είναι διατεθειμένος να πληρώσει θα είναι μικρότερη από την περίπτωση αρνητικής συνδιακύμανσης, οπότε και η απόδοση θα είναι μεγάλη όταν η κατανάλωση θα είναι μικρή.[3] Παρατηρούμε τέλος την δυνατότητα διαμόρφωσης χαρτοφυλακίου μηδενικής συνδιακύμασης και συνεπώς απόλυτης αντιστάθμισης ως προς τον κίνδυνο (hedging), εφόσον ο επενδυτής είναι δυνατόν να αγοράσει πληθώρα από τίτλους που ενέχουν μόνο ιδιοσυγκρατικό κίνδυνο. Με αυτό τον τρόπο ο παραπάνω θα αντισταθμιστεί πλήρως (Νόμοι Μεγάλων Αριθμών). Προφανώς αναγκαία προϋπόθεση προκειμένου να είναι εφικτό το παραπάνω, είναι η ύπαρξη μηδενικού κόστους συναλλαγών.

➥ **Η συνάρτηση ωφέλειας**: Υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμη t, ο επενδυτής μεγιστοποιεί συνάρτηση ωφέλειας της μορφής

$$u_t = E\left(u\left(c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, ...\right)/\mathcal{I}_t\right)$$

όπου το $E\left(\cdot/\mathcal{I}_t\right)$ συμβολίζει την δεσμευμένη αναμενόμενη (conditional expectation) ως προς το σύνολο $\mathcal{I}_t$, το οποίο τυπικά περιλαμβάνει πληροφορία για *παρούσες και παρελθούσες* τιμές της κατανάλωσης, χρηματοοικονομικών τίτλων, μακροοικονομικών μεταβλητών και γενικότερα οποιασδήποτε μεταβλητής είναι δυνατόν να βοηθήσει τον επενδυτή να προβλέψει, ενώ $u\left(\cdot\right)$ αποτελεί την γενική μορφή της συνάρτησης και c_i συμβολίζει την κατανάλωση κατά την χρονική στιγμή i. Η αναμενόμενη μορφή της συνάρτησης ωφέλειας, σηματοδοτεί ότι ο επενδυτής ενδιαφέρεται για την *αναμενόμενη ωφέλεια της ροής κατανάλωσης* και όχι για την ωφέλεια της *αναμενόμενης κατανάλωσης*. Αν η $u\left(\cdot\right)$ είναι κοίλη, ισχύει ότι $E\left(u\left(\cdot\right)/\mathcal{I}_t\right) \leq u\left(E\left(\cdot\right)/\mathcal{I}_t\right)$, κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο επενδυτής είναι δυνατόν να απορρίψει ροές κατανάλωσης με μεγαλύτερη αναμενόμενη τίμη, επειδή έχουν και μεγαλύτερη διακύμανση απο ανάλογες με μικρότερη αναμενόμενη τιμή αλλά και με μικρότερη διακύμανση.[4] Στην περίπτωση αυτή ο επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο (risk averter). Μάλιστα, όσο πιο κοίλη ειναι η συνάρτηση τόσο μεγαλύτερη είναι η αποστροφή. Στο υπόδειγμά μας, χάριν ευκολίας, θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι χρονικά *διαχωρίσιμη* (time separable) όποτε είναι της

[3] Η οποία αποτελεί ακριβώς την συγκυρία στην οποία ο επενδυτής *χρειάζεται* μεγάλη απόδοση.

[4] Κάτι το οποίο με την σειρά του σημαίνει ότι θα πρέπει να αμοιφθεί προκειμένου να αναλάβει κινδυνώδεις τίτλους.

μορφής

$$u_t = E\left(\sum_{i=0,1,2,\cdots} \beta^i u\left(c_{t+i}\right)/\mathcal{I}_t\right) = u\left(c_t\right) + E\left(\sum_{i=1,2,\cdots} \beta^i u\left(c_{t+i}\right)/\mathcal{I}_t\right)$$

όπου ο β ονομάζεται συντελεστής χρονικής προτίμησης, ο οποίος συνοψίζει το κατά πόσο ενδιαφέρεται *σήμερα* ο επενδυτής για την μελλοντική του κατανάλωση, σε σχέση με την παροντική. Έτσι για παράδειγμα, χαμηλότερο β σε σχέση με υψηλότερο, σημαίνει ότι ενδιαφέρεται περισσότερο για το παρόν απο ότι για το μέλλον. Παρατηρήστε ότι δεδομένου του $\mathcal{I}_t$, το $u\left(c_t\right)$ παύει να είναι τυχαία μεταβλητή αφού έχει συμβεί, και έτσι μπορεί να βγαίνει απο την αναμενόμενη τιμή. Επιπλέον, χωρίς απώλεια γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι ο συνολικός χρόνος αποτελείται απο δύο χρονικές στιγμές, τις t και $t+1$.[5] Έτσι η συνάρτηση ωφέλειας γίνεται τελικά

$$u_t = u\left(c_t\right) + E\left(\beta u\left(c_{t+1}\right)/\mathcal{I}_t\right)$$

➥ **Ο Διαχρονικός Εισοδηματικός Περιορισμός**: Υποθέτουμε επίσης ότι τα κόστη συναλλαγών είναι μηδενικά, καθώς και ότι ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει (ή/και να πουλήσει) οποιαδήποτε ποσότητα του τίτλου χωρίς να επηρεάσει την τιμή. Το παραπάνω σημαίνει ότι η τιμή του τίτλου είναι δεδομένη για κάθε μεμονωμένο επενδυτή, συνεπώς βρισκόμαστε στα πλαίσια του *τέλειου ανταγωνισμού*. Άν στην αρχή της χρονικής στιγμής $t+i$ ο επενδυτής είναι προικοδοτημένος με $y_{t+i}, i=0,1$ μονάδες κατανάλωσης (ή νομισματικές μονάδες), ενώ είναι ελεύθερος να αγοράσει (ή να πουλήσει) όσες μονάδες του χρηματοοικονομικού τίτλου στην τιμή p_t ανά μονάδα, ο οποίος θα του προσφέρει στην περίοδο $t+1$ την (αβέβαια) ανα μονάδα απόδοση x_{t+1}, τότε ο διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμος του δίνεται απο

$$c_t = y_t - p_t\xi$$

για την περίοδο t, και

$$c_{t+1} = y_{t+1} + x_{t+1}\xi$$

για την περίοδο $t+1$, όπου ξ είναι ο αριθμός των μονάδων του τίτλου που θα αγοράσει (ή θα πουλήσει) στην τιμή p_t. Έτσι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης διαμορφώνεται ως

$$max_\xi\left[u\left(c_t\right) + E\left(\beta u\left(c_{t+1}\right)/\mathcal{I}_t\right)\right]$$

δεδομένου

$$c_t = y_t - p_t\xi$$

[5] Αργότερα θα χαλαρώσουμε αυτόν τον περιορισμό.

και

$$c_{t+1} = y_{t+1} + x_{t+1}\xi$$

ή αντικαθιστώντας

$$max_{\xi}\left[u\left(y_t - p_t\xi\right) + E\left(\beta u\left(y_{t+1} + x_{t+1}\xi\right)/\mathcal{I}_t\right)\right]$$

- **Συνθήκες Πρώτης Ταξης - Συνθήκη Τιμολόγησης**: Οι συνθήκες πρώτης τάξης του προηγούμενου προβλήματος, εφόσον είναι δυνατόν να μεταθέτουμε την ολοκλήρωση με την παραγώγιση,[6] διαμορφώνονται ως

$$u'\left(c_t\right)\frac{\partial\left(y_t - p_t\xi\right)}{\partial\xi} + E\left(\beta u'\left(c_{t+1}\right)\frac{\partial\left(x_{t+1}\xi\right)}{\partial\xi}/\mathcal{I}_t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-u'\left(c_t\right)p_t + E\left(\beta u'\left(c_{t+1}\right)x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right) = 0$$

συνεπώς καταλήγουμε στην σχέση

$$\boxed{p_t = E\left(\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)\ (1)}$$

Θυμηθείτε ότι το $u'\left(c_t\right)$ δεδομένου του $\mathcal{I}_t$ δεν είναι τυχαία μεταβλητή επειδή εξαρτάται μόνο απο το c_t το οποίο περιλαμβάνεται στο $\mathcal{I}_t$. Η (1) αποτελεί την βασική συνθήκη τιμολόγησης. Θα πρεπει να γίνει κατανοητό, ότι *δεν* έχουμε υποθέσει ότι ο επενδυτής είναι αντιπροσωπευτικός, ούτε ότι όλοι οι συμμετέχοντες στο χρηματοοικονομικό σύστημα έχουν τις ίδιες προτιμήσεις ως πρός την κατανάλωση. Αυτό που έχουμε υποθέσει, είναι ότι όλοι εχουν προτιμήσεις ως πρός την κατανάλωση και η (1) μας λέει ότι εφόσον όλοι συμπεριφέρονται ως μεγιστοποιητές της ωφελειάς τους, τότε στο μέγιστο θα πρέπει να προσαρμόζουν την κατανάλωσή τους έτσι ώστε να ισχύει αυτή η σχέση. Έτσι, εφόσον το χρηματοοικονομικό σύστημα ισορροπεί όταν όλοι έχουν μεγιστοποιήσει την ωφέλεια τους δεδομένων των τιμών (ανταγωνιστική ισορροπία), τότε σε αυτήν την ισορροπία οι τιμές των χρηματοοικονομικών τίτλων θα αντανακλούν την (1). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας μόνο την συνθηκη πρώτης τάξης του προβλήματος μεγιστοποίησης,[7] συνδέσαμε την τιμή του δεδομένου τίτλου, με την απόδοση του κατά την λήξη του, και την κατανάλωση.

- **Στοχαστικός Παράγοντας Προεξόφλησης**: Αν θέσουμε ως $m_{t,t+1} = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$, τότε η (1) διαμορφώνεται ως

[6]και άρα να αλλάζουμε την σειρά της παραγώγου και της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής, κάτι που απο υπόθεση μας επιτρέπεται για τις θεωρούμενες $u(\cdot)$.

[7]η ικανοποίηση της οποίας μας εγγυάται το μέγιστο εξαιτίας της φύσης των συναρτήσεων ωφέλειας.

$$\boxed{p_t = E\left(m_{t,t+1}x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)\ (2)}$$

Η τυχαία μεταβλητή $m_{t,t+1}$ (εξηγήστε γιατί είναι τυχαία μεταβλητή), ονομάζεται στοχαστικός παράγοντας προεξόφλησης (Stochastic Discount Factor - SDF) καθώς η τιμή του τίτλου εκφράζεται ως η αναμενόμενη παρούσα αξία της απόδοσης του προεξοφλημένη ως προς τον SDF. Εφόσον λοιπόν υποθέσουμε ότι υπάρχει στην οικονομία, *μοναδικός και με πιθανότητα 1 θετικός* SDF, τότε οι χρηματοοικονομικοί τίτλοι θα αποτιμούνται μέσω αυτού από την (2), καθώς όλοι οι επενδυτές μέσω της μεγιστοποίητικής συμπεριφοράς τους, θα προσαρμόζουν την βέλτιστη κατανάλωση τους έτσι ώστε να ισχύει ότι $m_{t,t+1} = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$. Στο ζήτημα της ύπαρξης και της μοναδικότητας, θετικού με πιθανότητα 1 SDF θα αναφερθούμε εν συντομία αργότερα.

➥ **Μονάδες Μέτρησης**: Τα παραπάνω είναι δυνατόν να είναι εκφρασμένα είτε σε μονάδες κατανάλωσης (πραγματικά μεγέθη), είτε σε νομισματικές μονάδες (ονομαστικά μεγέθη). Απλώς παρατηρήστε ότι η μετατροπή απο τα μέν στα δε, δεν αλλάζει στην ουσία της την σχέση (2). Π.χ. αν τα μεγέθη είναι εκφρασμένα σε νομισματικές μονάδες, τότε αν με Π_i συμβολίσουμε τον δείκτη τιμών καταναλωτή την περίοδο i, η μετατροπή τους σε πραγματικές θα συνεπάγεται από την (2)

$$\frac{p_t}{\Pi_t} = E\left(m_{t,t+1}\frac{\Pi_{t+1}}{\Pi_t}\frac{x_{t+1}}{\Pi_{t+1}}/\mathcal{I}_t\right)$$

που συνεπάγεται με την σειρά της

$$\frac{p_t}{\Pi_t} = E\left(m^*_{t,t+1}\frac{x_{t+1}}{\Pi_{t+1}}/\mathcal{I}_t\right)$$

όπου $m^*_{t,t+1} = m_{t,t+1}\frac{\Pi_{t+1}}{\Pi_t}$ που δεν είναι τίποτε άλλο απο τον SDF εκφρασμένο σε μονάδες κατανάλωσης. Το παραπάνω σημαίνει ότι μπορούμε απλώς να αλλάζουμε μονάδες αλλάζοντας κατάλληλα και τον SDF χωρίς να αλλάζει επι της ουσίας η (2).

➥ **Εφαρμογή - Το Ασφαλές Επιτόκιο**: Ας υποθέσουμε την ύπαρξη χρηματοοικο νομικού τίτλου για τον οποίο ισχύει ότι για την *θετική* απόδοση του την χρονική στιγμή $t+1$, x_{t+1} δεν υπάρχει αβεβαιότητα. Τότε απο την (2) θα έχουμε ότι

$$p_t = E\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right)x_{t+1}$$

και συνεπώς εφόσον η απόδοση είναι με βεβαιότητα θετική, ενώ ο SDF είναι με πιθανότητα 1 θετικός, η τίμη p_t θα είναι με πιθανότητα 1 θετική, οπότε με πιθανότητα 1

$$1 = E\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) \frac{x_{t+1}}{p_t}$$

Ο λόγος $R^s_{t,t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t}$ αποτελεί την ανά μονάδα τιμής, ασφαλή απόδοση του υποτιθέμενου τίτλου, δηλαδή το ασφαλές επιτόκιο ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t και $t+1$. Αυτό μας δείχνει ότι το τελευταίο προσδιορίζεται από

$$R^f_{t,t+1} = \frac{1}{E\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right)}$$

Αν για παράδειγμα για κάποιον επενδυτή ισχύει ότι $u\left(c\right) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, όπου $\gamma > 0$ και ότι έχουμε πραγματικά μεγέθη, τότε χρησιμοποιώτας την (1) και την τελευταία σχέση έχουμε

$$R^f_{t,t+1} = \frac{1}{\beta E\left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{\gamma} / \mathcal{I}_t\right]}$$

Αν επιπροσθέτως υποθέσουμε ότι δεν έχουμε αβεβαιότητα τότε το παραπάνω θα γίνει

$$R^f_{t,t+1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}$$

κάτι απο το οποίο είναι εύκολο να συνάγουμε τα εξής:

- Τα πραγματικά επιτόκια εξαρτώνται αρνητικά απο το β. Όσο πιο ανυπόμονος είναι ο επενδυτής ως πρός την παροντική κατανάλωση, τόσο μεγαλύτερα επιτόκια θα χρειαστεί προκειμένου να πεισθεί να θυσιάσει κατανάλωση στο παρόν προκειμένης κατανάλωσης στο μέλλον.

- Τα πραγματικά επιτόκια σχετίζονται θετικά με τον αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης. Όταν τα πρώτα είναι υψηλά, συμφέρει τον επενδυτή να θυσιάζει κατανάλωση στο παρόν για μεγαλύτερη κατανάλωση στο μέλλον.

- Τα πραγματικά επιτόκια σχετίζονται θετικά με το γ στην περίπτωση που $\frac{c_{t+1}}{c_t} > 1$. Παρατηρήστε ότι $u''\left(c\right) = -\gamma c^{-\gamma-1}$ και ότι καθώς $\gamma \uparrow \infty$ η δεύτερη παράγωγος μειώνεται άρα η συνάρτηση ωφέλειας γίνεται όλο και πιο κοίλη. Συνεπώς, ο επενδύτης αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο και άρα χρειάζεται μεγαλύτερα επιτόκια προκειμένου να πεισθεί να επενδύσει. Όταν, $c_{t+1} = c_t$, οπότε ο επενδυτής έχει επιλέξει μια τελείως ομαλή διαχρονική ροή κατανάλωσης είναι αδιάφορος ως πρός τα προσφερόμενα επιτόκια, ενώ όταν $c_{t+1} < c_t$, ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να δεχθεί και μειωμένες αποδόσεις προκειμένου να βελτιώσει την μελλοντική του κατανάλωση.

➥ **Προσαρμογή στον Κίνδυνο**: Αν θυμηθούμε ότι η δεσμευμένη συνδιακύμανση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών (έστω x και y) ορίζεται ως $Cov\left(x, y/\mathcal{I}_t\right) = E\left(xy/\mathcal{I}_t\right) - E\left(x/\mathcal{I}_t\right) E\left(y/\mathcal{I}_t\right)$ τότε και η (2) διαμορφώνεται ως

$$p_t = E\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) E\left(x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right) + Cov\left(m_{t,t+1}, x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)$$

Γνωρίζουμε όμως απο την προηγούμενη ενότητα ότι $E\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) = \frac{1}{R^f_{t,t+1}}$ και άρα τελικά έχουμε

$$\boxed{p_t = \frac{E(x_{t+1}/\mathcal{I}_t)}{R^f_{t,t+1}} + Cov\left(m_{t,t+1}, x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right) \ (3)}$$

Ο όρος $\frac{E(x_{t+1}/\mathcal{I}_t)}{R^f_{t,t+1}}$ αποτελεί στην ουσία την παρούσα αξία της αναμενόμενης στον χρόνο t απόδοσης του τίτλου στον χρόνο $t+1$. Ο δεύτερος όρος $Cov\left(m_{t,t+1}, x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)$, μπορεί απο προηγουμένως να γραφεί $Cov\left(\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, x_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)$ και αποτελεί προσαρμογή στον κίνδυνο. Θυμηθείτε, ότι από τις ιδιότητες της συνάρτησης ωφέλειας, η οριακή ωφέλεια είναι θετική, ενώ η παράγωγος αυτής αρνητική (φθίνουσα οριακή ωφέλεια). Αυτό σημαίνει ότι όταν αυξάνεται ο λόγος $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ φθίνει ο λόγος $\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$. Έτσι αν η απόδοση του τίτλου συσχετίζεται θετικά με την μεταβολή της κατανάλωσης, η συνδιακύμανση της απόδοσης με τον SDF θα είναι αρνητική, κάτι το οποίο σημαίνει ότι η τιμή του τίτλου θα είναι μικρότερη της αναμενόμενης παρούσας αξίας. Αυτό θα συμβαίνει επειδή, όπως σημειώσαμε στην αρχή, στην περίπτωση θετικής συνδιακύμανσης μεταξύ κατανάλωσης και απόδοσης, σε περιόδους χαμηλής κατανάλωσης θα υπάρχει με θετική πιθανότητα και χαμηλή απόδοση. Συνεπώς η απόδοση του τίτλου δεν θα είναι ικανή να αναπληρώσει την απώλεια της κατανάλωσης, και έτσι η τιμή του θα πρέπει να μειωθεί προκειμένου να αγορασθεί. Τα αντίθετα θα συμβούν στην περίπτωση της αρνητικής συνδιακύμανσης μεταξύ κατανάλωσης και απόδοσης, οπότε ο τίτλος θα αναπληρώνει την κατανάλωση σε περιόδους χαμηλής κατανάλωσης με θετική πιθανότητα.

➥ **Συστηματικός - Ιδιοσυγκρατικός Κίνδυνος**: Σημειώνουμε απο τα παραπάνω, ότι αυτό που ενδιαφέρει τον επενδυτή είναι η *συνδιακύμανση* της απόδοσης με τον SDF, και όχι απο μόνη της η διακύμανση της απόδοσης, επειδή αυτό που τον απασχολεί είναι το μέρος της αβεβαιότητας της απόδοσης που οφείλεται στους ίδιους παράγοντες στους οποιούς οφείλεται και η αβεβαιότητα της κατανάλωσης. Αυτό σημαίνει ότι οποιεσδήποτε πηγές αβεβαιότητας επηρεάζουν την απόδοση αλλά όχι την κατανάλωση (ιδιοσυγκρατικός κίνδυνος) *δεν* τιμολογούνται ως προς την προσαρμογή στον κίνδυνο, εκ κατασκευής του υποδείγματος. Ας προσπαθήσουμε να το δείξουμε αυτό με ένα απλό παράδειγμα. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ότι η απόδοση του τίτλου x_{t+1} θα δίνεται από

$$x_{t+1} = \lambda m_{t,t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

όπου $\lambda \in \mathcal{R}$ και $Cov\left(m_{t,t+1}, \varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right) = 0$. Δηλαδή, η απόδοση αποτελεί γραμμικό συνδυασμό του SDF και μιάς τυχαίας μεταβλητής *ορθογώνιας*, δεδομένου του $\mathcal{I}_t$, ως προς αυτόν. Ο κίνδυνος που αναπαριστά η ε_{t+1}, ονομάζεται ιδιοσυγκρατικός, ενώ είναι εύκολο να δούμε ότι

$$p_t = \frac{E\left(\lambda m_{t,t+1} + \varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)}{R^f_{t,t+1}} + Cov\left[m_{t,t+1}, \left(\lambda m_{t,t+1} + \varepsilon_{t+1}\right)/\mathcal{I}_t\right] =$$

$$\lambda E^2\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) + \lambda Var\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) + \frac{E\left(\varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)}{R^f_{t,t+1}} =$$

$$\lambda\left[E^2\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right) + Var\left(m_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right)\right] + \frac{E\left(\varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)}{R^f_{t,t+1}}$$

και τελικά

$$p_t = \lambda\left[E\left(m^2_{t,t+1}/\mathcal{I}_t\right)\right] + \frac{E\left(\varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right)}{R^f_{t,t+1}}$$

το οποίο σημαίνει ότι η ιδιοσυγκρατική αβεβαιότητα, η οποία θα μετράται από την διακύμανση του ε_{t+1} **δεν επηρεάζει** την τιμή του τίτλου. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος της μηδενικής συνδιακύμανσης του ε_{t+1} και μεθερμηνεύεται από το ότι ο επενδυτής είναι αδιάφορος για την **ιδιοσυγκρατική διακύμανση** (βλέπε την προηγούμενη γραμμή) καθώς αυτή δεν επηρεάζει την μελλοντική του κατανάλωση. Επίσης στην περίπτωση που $E\left(\varepsilon_{t+1}/\mathcal{I}_t\right) < 0$ και το $\lambda < 0$ τότε η τιμή γίνεται αρνητική, το οποίο εκφράζει το ότι ο τίτλος έχει αρνητικές αναμενόμενες αποδόσεις.

➥ **Άσκηση - Ομολογία Μηδενικού Τοκομεριδίου Διάρκειας Μίας Περιόδου**: Έστω χρηματοοικονομικός τίτλος ο οποίος κατά την αγορά του την περίοδο t υπόσχεται την καταβολή μιας νομισματικής ή μονάδας κατανάλωσης (πραγματική ομολογία) στο τέλος της περιόδου $t+1$.

Ο παραπάνω θα ονομάζεται Ομολογία Μηδενικού Τοκομεριδίου (Zero-Coupon Bond) και θα αποτιμάται ως εξής (χρησιμοποιώντας την (2))

$$p_t = E\left(m_{t,t+1}\right) = \frac{1}{R^f_{t,t+1}}$$

Δηλαδή η τιμή θα ισούται με το αντίστροφο του ασφαλούς επιτοκίου για την δεδομένη περίοδο. Το παράδειγμα αυτό μας πληροφορεί, ότι ακόμη και αν δέν υπάρχει στην οικονομία απολύτως ασφαλής χρηματοοικονομικός τίτλος, το ασφαλές επιτόκιο μπορεί να *προσεγγιστεί* απο τις τιμές αυτού του είδους των ομολογιών.

➥ **Γενίκευση σε Περισσότερες Περιόδους**: Τα παραπάνω γενικεύονται εύκολα αν θεωρήσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του επενδύτη σε περισσότερες των δύο περιόδων (ας θεωρήσουμε n περιόδους όπου το n είναι δυνατόν να είναι και άπειρο).[8] Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής θα πρέπει και πάλι να αποφασίσει πόσες μονάδες απο τον τίτλο, διάρκειας ζωής n χρονικών περιόδων, θα αγοράσει την χρονική στιγμή t, δεδομένου ότι ο τίτλος υπόσχεται την (αβέβαια) πληρωμή x_{t+i} μονάδων (νομισματικών ή κατανάλωσης) την χρονική στιγμή $t+i$, $\forall i = 1, ..., n$. Έτσι το πρόβλημα μεγιστοποίησης που αντιμετωπίζει διαμορφώνεται ως εξής

$$max_\xi \left[u\left(c_t\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^i u\left(c_{t+i}\right)/\mathcal{I}_t\right)\right]$$

δεδομένου

$$c_t = y_t - p_t\xi$$

και

$$c_{t+i} = y_{t+i} + x_{t+i}\xi, \forall i = 1, ..., n$$

Εξάγωντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως προηγουμένως, τις συνθήκες πρώτης τάξης και λύνοντας ως πρός την τιμή έχουμε

$$\boxed{p_t = E\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^i \frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)} x_{t+i}/\mathcal{I}_t\right) \ (4)}$$

Οπού και πάλι θέτοντας $m_{t,t+i} = \beta^i \frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)}$, δηλάδη τον SDF ως πρός την iοστή περίοδο έχουμε

$$\boxed{p_t = E\left(\sum_{i=1}^{n} m_{t,t+i} x_{t+i}/\mathcal{I}_t\right) \ (5)}$$

[8]Παρόλο που κάτι τέτοιο φαίνεται όχι ιδιαίτερα πραγματιστικό, εντούτοις μας δίνει την δυνατότητα να *προσεγγίζουμε* λύσεις χρησιμοποιώντας όρια.

Παρατηρούμε εύκολα ότι $\frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_t)} = \frac{u'(c_{t+i})}{u'(c_{t+i-1})}\frac{u'(c_{t+i-1})}{u'(c_{t+i-2})}\cdots\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$, κάτι το οποίο μας δείχνει ότι $m_{t,t+i} = m_{t,t+1}m_{t+1,t+2}\cdots m_{t+i-1,t+i}$. Έτσι η (5) γίνεται

$$\boxed{p_t = E\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{i} m_{t+j-1,t+j}\right] x_{t+i}/\mathcal{I}_t\right) \ (6)}$$

Από το παραπάνω έχουμε ότι το ασφαλές επιτόκιο απο την περίοδο t ως την $t+n$ θα προκύπτει μέσω του ίδιου συλλογισμού από τον τίτλο που εφόσον υπάρχει θα αποδίδει με βεβαιότητα στην περίοδο $t+n$, x_{t+n} και συνεπώς

$$1 = E\left(m_{t,t+n}/\mathcal{I}_t\right)\frac{x_{t+n}}{p_t} \Rightarrow$$

$$1 = E\left(m_{t,t+n}/\mathcal{I}_t\right)R^f_{t,t+n} \Rightarrow$$

$$R^f_{t,t+n} = \frac{1}{E\left(m_{t,t+n}/\mathcal{I}_t\right)} \Rightarrow$$

$$R^f_{t,t+n} = \frac{1}{E\left(\prod_{i=1}^{n} m_{t+i-1,t+i}/\mathcal{I}_t\right)}$$

Το οποίο στην περίπτωση μη ύπαρξης αβεβαιότητας γίνεται

$$R^f_{t,t+n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} m_{t+i-1,t+i}} = \prod_{i=1}^{n} R^f_{t+i-1,t+i}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας και πάλι τον ορισμό της δεσμευμένης συνδιακύμανσης και του ασφαλούς επιτοκίου έχουμε απο την (5)

$$\boxed{p_t = \sum_{i=1}^{n}\frac{E(x_{t+i}/\mathcal{I}_t)}{R^f_{t,t+i}} + \sum_{i=1}^{n} Cov\left(m_{t,t+i}, x_{t+i}/\mathcal{I}_t\right) \ (7)}$$

Τέλος μπορούμε να γενικεύσουμε όλα τα παραπάνω αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, εφ΄ όσον εξασφαλίσουμε ότι το $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} m_{t,t+i}x_{t+i}/\mathcal{I}_t\right)$ συγκλίνει.

➥ **Άσκηση - Αποτίμηση Μετοχής**: Έστω ότι ο υπό ανάλυση τίτλος είναι μετοχή, η οποία εφόσον αγορασθεί στην χρονική περίοδο t, υπόσχεται αβέβαιο μέρισμα d_{t+i}, $\forall i = 1, \cdots$. Από τα παραπάνω και εφόσον $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} m_{t,t+i}d_{t+i}/\mathcal{I}_t\right) < \infty$, η τιμή της μετοχής θα δίνεται

$$p_t = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{E\left(d_{t+i}/\mathcal{I}_t\right)}{R^f_{t,t+i}} + \sum_{i=1}^{\infty} Cov\left(m_{t,t+i}, d_{t+i}/\mathcal{I}_t\right)$$

➥ **Άσκηση - Ομολογία Μηδενικού Τοκομεριδίου**: Έστω ομολογία μηδενικού τοκομεριδίου η οποία κατά την αγορά του την περίοδο t υπόσχεται την καταβολή μιας νομισματικής ή μονάδας κατανάλωσης (πραγματική ομολογία) στο τέλος της περιόδου $t+n$. Θα αποτιμάται ως εξής

$$p_{t,n} = E\left(m_{t,t+n}\right) = \frac{1}{R^f_{t,t+n}}$$

Στήν περίπτωση μή ύπαρξης αβεβαιότητας, θα έχουμε από τα παραπάνω ότι

$$p_{t,n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} R^f_{t+i-1,t+i}} = \prod_{i=1}^{n} p_{t+i-1,t+i}$$

Δηλαδή η τιμή της θα ισούται με το γινόμενο των τιμών ομολογιών μηδενικού τοκομεριδίου διάρκειας μίας περιόδου, που καλύπτουν την διάρκεια ζωής της πρώτης.

➥ **Άσκηση - Διηνεκής Ομολογία**: Έστω ομολογία η οποία κατά την αγορά του την περίοδο t υπόσχεται την καταβολή μιας νομισματικής ή μονάδας κατανάλωσης (πραγματική ομολογία) στο τέλος της περιόδου $t+i$, $\forall i = 1, \cdots$. Η ομολογία θα ονομάζεται διηνεκής (perpetual annuity), και θα αποτιμάται ως εξής

$$p_{t,\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(m_{t,t+i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{R^f_{t,t+i}}$$

Και πάλι στην περίπτωση μή ύπαρξης αβεβαιότητας θα έχουμε από τα προηγούμενα ότι

$$p_{t,\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{t,t+i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} p_{t+j-1,t+j} \right)$$

Δηλαδή η τιμή της θα ισούται με το άθροισμα των τιμών ομολογιών μηδενικού τοκομεριδίου που καλύπτουν την άπειρη διάρκεια ζωής της πρώτης. Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, αν επιπροσθέτως $R^f_{t+j-1,t+j} = R^f$, $\forall j = 1, 2, \cdots$, δηλαδή το ασφαλές επιτόκιο ανάμεσα σε διαδοχικές περιόδους είναι διαχρονικά σταθερό τότε τα παραπάνω θα γίνουν

$$p_{t,\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(R^f\right)^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(R^f\right)^i} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R^f}} - 1 = \frac{1}{R^f - 1}$$

εφόσον $R^f > 1$,[9] κάτι το οποίο εξασφαλίζεται από μη αρνητικούς ρυθμούς μεγέθυνσης της κατανάλωσης.

[9]Θυμηθείτε ότι το R^f είναι εκ κατασκευής το ακαθάριστο επιτόκιο, ενώ το καθαρό θα δίνεται από το $\frac{x_{t+1} - p_t}{p_t} = R^f - 1$.

- ➥ **Γενικότητα του Υποδείγματος**: Σημειώνουμε, χωρίς να επεκταθούμε περαιτέρω, ότι το παραπάνω υπόδειγμα, ιδιαίτερα στην μορφή που δίνεται από την (2), αποτελεί γενίκευση των περισσοτέρων υποδειγμάτων αποτίμησης χρηματοοικονομικών τίτλων. Στην ουσία κάθε ένα από τα τελευταία αποτελεί εξειδίκευση των πηγών αβεβαιότητας της οικονομίας που διαμορφώνουν τον SDF.

- ➥ **Ύπαρξη - Μοναδικότητα - Σχεδόν Βέβαιη Θετικότητα του SDF**: Η παρούσα παράγραφος αφορά στις συνθήκες που εξασφαλίζουν κατάρχάς την ύπαρξη και μοναδικότητα του SDF που ικανοποιεί την (2) και άρα τιμολογεί οποιονδήποτε χρηματοοικονομικό τίτλο υπάρχει στην εξεταζόμενη οικονομία. Τα αποτελέσματα δίνονται χωρίς αποδείξεις. Ονομάζουμε $\mathcal{X}$, το σύνολο που αποτελείται από όλες τις αποδόσεις τίτλων που υπάρχουν στήν οικονομία. Αυτό θα είναι υποσύνολο του $\mathcal{R}^s$, όπου s είναι ο αριθμός των πηγών αβεβαιότητας που υφίστανται σε αυτήν και επηρεάζουν τις δυνατές διαχρονικές ροές κατανάλωσης των συμμετεχόντων σε αυτήν (ο αριθμός αυτός είναι δυνατόν να είναι και άπειρος). Θα έχουμε τον εξής ορισμό:

  Ορισμός 1 *Όταν $\mathcal{X} = \mathcal{R}^s$ τότε η αγορές ονομάζονται πλήρεις, στην περίπτωση που $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}^s$ θα ονομάζονται ατελείς.*

  Το παραπάνω ορίζει ως πληρότητα των αγορών την ύπαρξη για κάθε πηγή κινδύνου απόδοσης (και άρα τίτλου) που την αναπαριστά. Όταν υπάρχουν πηγές κινδύνου που δεν αναπαρίστανται από αποδόσεις, δηλαδή όταν δεν υπάρχει στην οικονομία *ικανός αριθμός* από τίτλους για την αναπαράσταση κάθε υπάρχοντος κινδύνου οι αγορές είναι ατελείς. Επίσης οι παρακάτω δύο υποθέσεις θα χαρακτηρίζουν τον $\mathcal{X}$.

  Υπόθεση 1 *Όταν $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ τότε και $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{X}$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}$.*

  Η παραπάνω ονομάζεται Υπόθεση Σχηματισμού Χαρτοφυλακίου (ΥΣΧ) και απλώς εξασφαλίζει ότι ο γραμμικός συνδυασμός *υπαρχουσών* αποδόσεων θα είναι *υπάρχουσα* απόδοση.

  Υπόθεση 2 $P\left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right] = \alpha_1 P\left[x_1\right] + \alpha_2 P\left[x_2\right], \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

  Η παραπάνω ονομάζεται Νόμος της Μίας Τιμής (ΝΜΤ) και εξασφαλίζει ότι η τιμολόγηση είναι μια γραμμική συνάρτηση, το οποίο σημαίνει ότι η τίμη γραμμικού συνδυασμού αποδόσεων (χαρτοφυλακίου) θα ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των τιμών. Αν δεν ίσχυε αυτό τότε θα υπήρχαν περιθώρια για ακίνδυνη κερδοσκοπία (arbitrage). Έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 *Αν ισχύουν οι (ΥΣΧ) και (ΝΜΤ), τότε υπάρχει μοναδικός SDF στο $\mathcal{X}$ έτσι ώστε να ισχύει η (2).*[10]

Όταν οι αγορές είναι πλήρεις, τότε είναι προφανές ότι υπάρχει μοναδικός SDF σε ολόκληρο το $\mathcal{R}^s$ που τιμολογεί κάθε χρηματοοικονομικό τίτλο. Όταν οι αγορές είναι ατελείς τότε είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι SDF που να ικανοποιούν την (2) εντούτοις αυτοί θα βρίσκονται στο κομμάτι του $\mathcal{R}^s$ που δεν ανήκει στο $\mathcal{X}$. Έχουμε τέλος την παρακάτω υπόθεση.

Υπόθεση 3 *Άν $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, και $x_1 \geq x_2$ με πιθανότητα 1, και $x_1 > x_2$ με θετική πιθανότητα τότε $P[x_1] > P[x_2]$ με πιθανότητα 1.*

Η παραπάνω ονομάζεται Μη Ύπαρξη Ευκαιριών Ακίνδυνης Κερδοσκοπίας (ΜΥΕΑΚ) και σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή η κατασκευή χαρτοφυλακίου που θα έχει θετική απόδοση με θετική πιθανότητα και μηδενικό κόστος απόκτησης. Δεδομένης της παραπάνω έχουμε

Θεώρημα 2 *Αν ισχύει η (ΜΥΕΑΚ) τότε υπάρχει θετικός SDF στο $\mathcal{X}$ έτσι ώστε να ισχύει η (2).*

Παρόλο που η απόδειξη του παραπάνω είναι, *προς το παρόν*, εκτός των ενδιαφερόντων μας, σημειώνουμε διαισθητικά, ότι αν δεν ίσχυε η (ΜΥΕΑΚ), τότε αν ίσχυε (2) θα είχαμε ότι

$$P[x_1] - P[x_2] = E\left(m_{t,t+1}[x_1 - x_2] / \mathcal{I}_t\right) \Rightarrow$$

$$0 = E\left(m_{t,t+1}[x_1 - x_2] / \mathcal{I}_t\right)$$

με πιθανότητα 1, κάτι το οποίο θα ίσχυε μόνο αν $m_{t,t+1} = 0$ με θετική πιθανότητα.[11] Έτσι δεδομένης της (2), η (ΜΥΕΑΚ) *εξασφαλίζει* ότι ο SDF είναι θετικός με πιθανότητα 1. Επιπλέον αν οι αγορές είναι πλήρεις τότε αυτός είναι και *μοναδικός*.

---

[10] ή γενικότερα η (6).

[11] Για την ακρίβεια ο SDF θα ήταν μηδέν τουλάχιστον στα ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει ότι $x_1 > x_2$, τα οποία συνιστούν εξ υποθέσεως σύνολο θετικής πιθανότητας.