Όταν $\varepsilon \in (0,1)$ να βρεθεί η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^i}{i+1}\varepsilon^{i+1}$.

1. Έχουμε ότι $\forall x \in (-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq (-1,1)$, $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, επομένως $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} x^i dx$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{1-x} dx \overset{\substack{v=1-x \\ -dv=dx}}{=} -\int_{1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{v} dv = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{1}{v} dv \overset{1+\varepsilon,\,1-\varepsilon>0}{=} \ln v \Big|_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} = \ln|1+\varepsilon| - \ln|1-\varepsilon| = \ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

2. Επίσης από την θεωρία ολοκλήρωσης δυναμοσειρών και εξαιτίας της επιλογής του ε

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} x^i dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^i dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{i+1} - (-\varepsilon)^{i+1}}{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{i+1} - (-1)^{i+1}\varepsilon^{i+1}}{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^i\right)}{i+1}\varepsilon^{i+1}.$$

3. Συνδυάζοντας τα 1 και 2 έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^i}{i+1}\varepsilon^{i+1} = \ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $\forall \varepsilon \in (0,1)$.

$\square$

Σχόλιο: Το παραπάνω μας δείχνει το πως η γνώση της συμπεριφοράς μιας δυναμοσειράς (εδώ της γεωμετρικής) μαζί με την θεωρία ολοκλήρωσης δυναμοσειρών μας επιτρέπουν να βρούμε σειρά που φαινομενικά δεν φαίνεται να προκύπτει από την αρχική δυναμοσειρά.