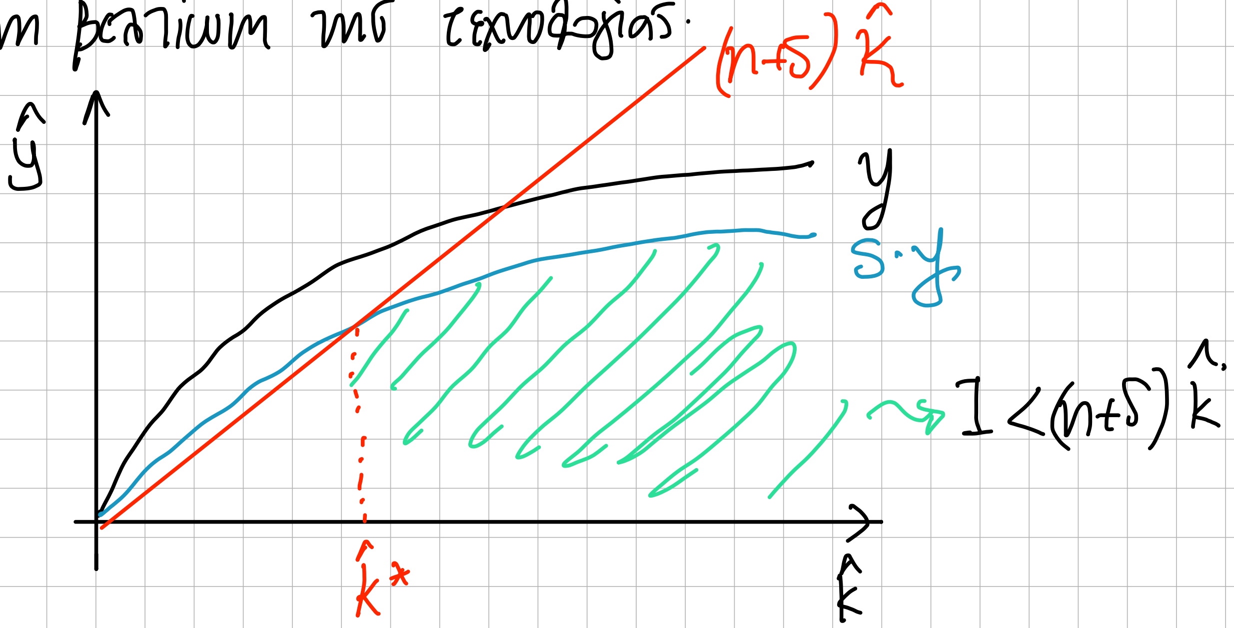
Ομάδα ασκήσεων 3, άσκηση 2

α) Σκεφθείτε τι συμβαίνει με την αύξηση του K, καθώς και τη βελτίωση της τεχνολογίας.

β)



• όταν $I < (n+\delta)\hat{k}$, τότε το $\hat{k}$ μειώνεται μέχρι το $\hat{k}^*$

Αντίθετα, όταν $I > (n+\delta)\hat{k}$, τότε το $\hat{k}$ αυξάνεται μέχρι το $\hat{k}^*$

Άσκηση 2

$$Y_t = K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}$$

α) αποδόσεις κλίμακας: είναι τύπου Cobb-Douglas, άρα

$\alpha + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow$ Σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Εναλλακτικά

$f(K,L) = K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}$. Έστω $\lambda > 1 \Leftrightarrow$

$f(\lambda K_t, \lambda L_t) = (\lambda K_t)^{1/2} \cdot (\lambda L_t)^{1/2} = \lambda Y_t$ (Σταθερές αποδόσεις κλίμακας)

β) Συνάρτηση παραγωγής ανά εργαζόμενο

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}}{L_t} = \frac{K_t^{1/2}}{L_t^{1/2}} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} = \hat{k}_t^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\hat{y}_t = \hat{k}_t^{1/2}}$$

Προσοχή

K_t: συνολικό κεφάλαιο

$\hat{k}_t$: κατά κεφαλήν κεφάλαιο

$\hat{y}_t$: κατά κεφαλήν εισόδημα

Y_t: συνολικό εισόδημα

γ) $\frac{\Delta L_t}{L_t} = n = 0$, $\frac{\Delta A_t}{A_t} = 0$

$\delta = 0{,}05$

$s_t = 0{,}2$

Κανόνας κίνησης κεφαλαίου (Law motion of capital)

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t \quad , \text{ όμως } I_t = S_t \text{ (γιατί; :))}$$

άρα $K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t$. Επόμενο βήμα να εκφράσω τα μεγέθη σε κ.κ (κατά κεφαλήν)

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} = \frac{sY_t}{L_t} - \frac{\delta K_t}{L_t}$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{K_t}{L_t} - \frac{\delta K_t}{L_t} + \frac{sY_t}{L_t} \Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{L_t} = \hat{k}_t - \delta \hat{k}_t + s\hat{y}_t \Leftrightarrow$$

$$\frac{K_{t+1} \cdot L_{t+1}}{L_t \cdot L_{t+1}} = \hat{k}_t - \delta \hat{k}_t + s\hat{y}_t \Leftrightarrow$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \cdot 1^{(*)} = \hat{k}_t - \delta \hat{k}_t + s\hat{y}_t \Leftrightarrow$$

$$\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t - \delta \hat{k}_t + s\hat{y}_t \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Delta \hat{k}_t = s\hat{y}_t - \delta \hat{k}_t}$$

(*) δίσει.

$$\frac{\Delta L_t}{L_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$L_{t+1} = L_t$$

<u>Προσοχή</u>: Στο Σημείο Σταθερής κατάστασης ισχύει ότι:

$$\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*, \quad \Delta\hat{k} = 0$$

Άρα η Σχ.Δ γίνεται:

$$\Delta\hat{k}^* = s\hat{y}^* - \delta\hat{k}^* \Leftrightarrow s\hat{y}^* = \delta\hat{k}^* \Leftrightarrow$$

φ.

$$s\cdot\hat{k}^{*1/2} = \delta\cdot\hat{k}^* \Rightarrow \hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0,2}{0,05}\right)^2 = 16.$$

$$\hat{y}^* = \hat{k}^{*1/2} = 4, \quad c^* = (1-s)\cdot\hat{y}^* = 0,8\cdot 4 = 3,2$$

<u>ρυθμός μεγέθυνσης κεφαλαίου ανά εργάτη</u> $\frac{\Delta\hat{k}_t}{\hat{k}_t} = ;$

<u>Τι ξέρω;</u> $\hat{k}_t = \frac{k_t}{L_t} \Rightarrow k_t = \hat{k}_t L_t \Leftrightarrow$

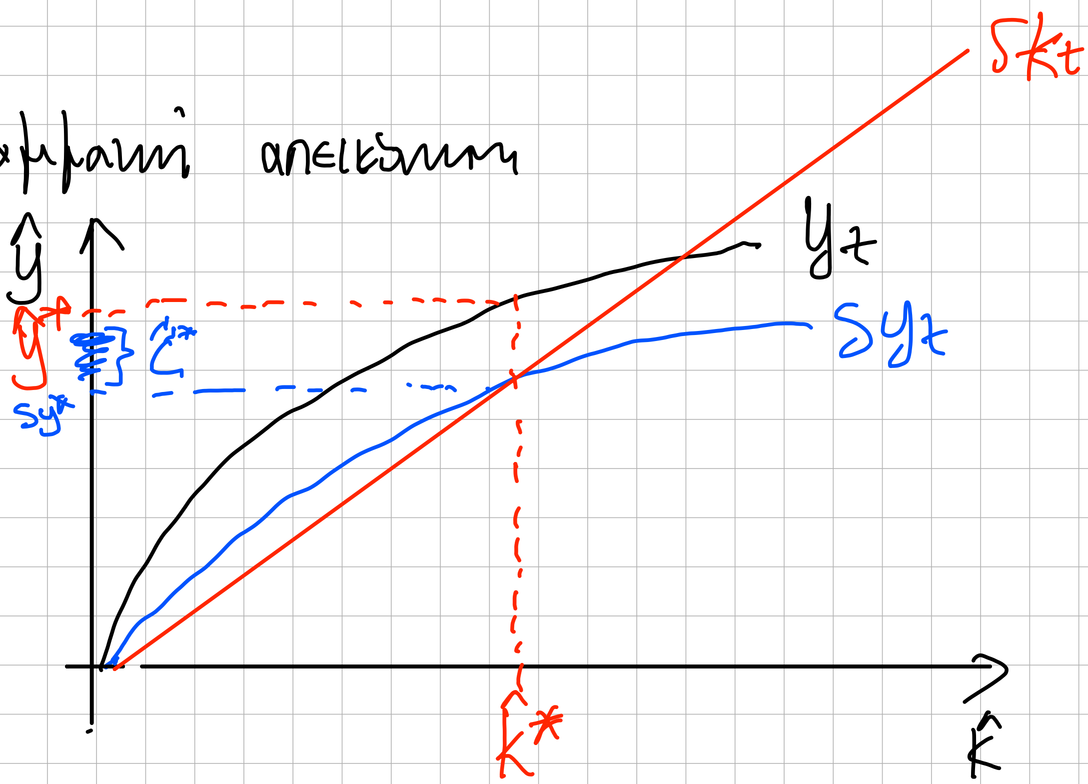
$$\frac{\Delta k_t}{k_t} = \frac{\Delta\hat{k}_t}{\hat{k}_t} + \cancel{\frac{\Delta L_t}{L_t}} \rightarrow 0$$

όμως $\frac{\Delta L_t}{L_t} = n = 0$

Άρα $\frac{\Delta \hat{k}_t}{\hat{k}_t} = \frac{\Delta k_t}{k_t}$.

Όμοια εργάζομαι αν ρωτάει το $\frac{\Delta \hat{y}_t}{\hat{y}_t}$ κτλ.

διαγραμματική απεικόνιση



δ) Αν το s γίνει $s_2 = 30\%$

$$\Rightarrow \quad k^{*\prime} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{0{,}3}{0{,}05}\right)^2 = 36$$

$$\hat{y}^{*\prime} = \left(\hat{k}^*\right)^{1/2} = 6, \quad c = (1-s)\hat{y}^* = 4{,}2.$$

Άσκηση 3

α) κίνητρο για αύξηση της αποταμίευσης → $\hat{k}_2^* > \hat{k}_1^*$

(σύγκλιση σε ισορροπία πιο δεξιά στο παρακάτω διάγραμμα)

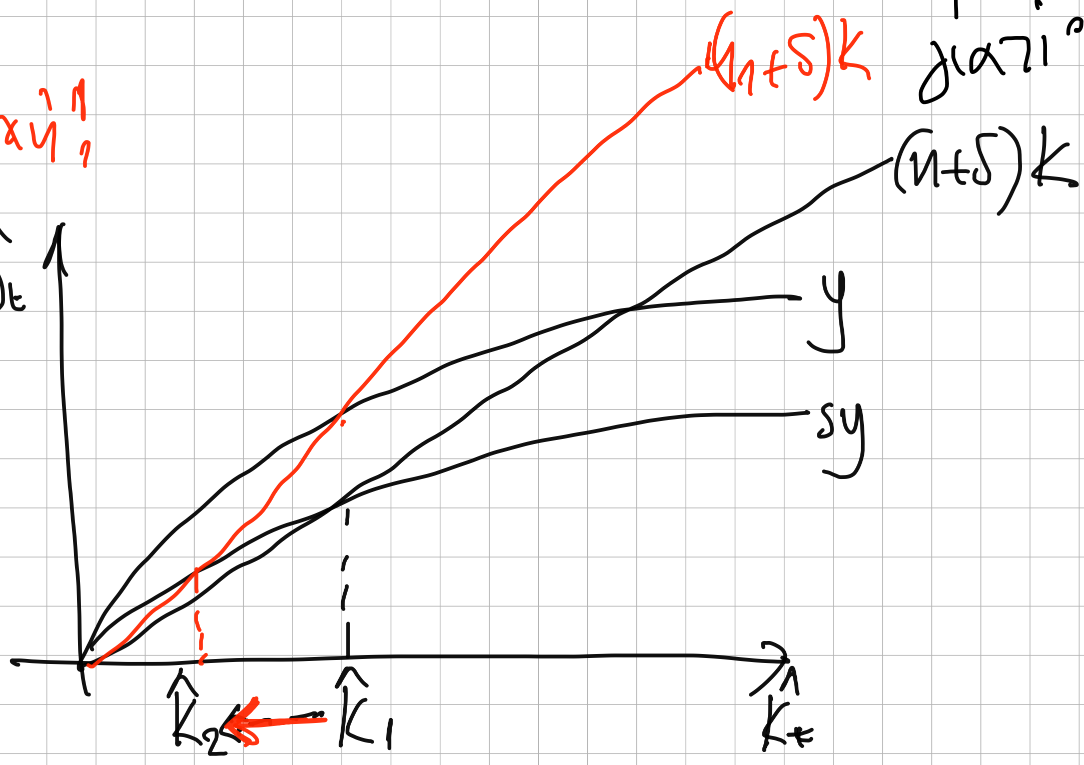
– Επίσης μειώνει την κατανάλωση $\hat{c}_2^* < \hat{c}_1$, κ.ο.κ.

β) αύξηση συμμετοχής γυναικών στο ανθρώπινο δυναμικό

προφανώς $L_2 > L_1 \Rightarrow \hat{k}_{t_2} < \hat{k}_{t_1}$

γιατί;

Προσοχή!



Μεταβολή του n, θα αλλάξει την κλίση της ευθείας απόσβεσης ⇒ ΝΕΟ σημείο ισορροπίας!

Άσκηση 4

$\delta = 0{,}04$ (4%) $K_{1950} = 12$, $L_{1950} = 1$

$n = 0{,}01$

$s = 0{,}2$

$\alpha = 1/2$

α) $Y_t = K_t^{a} \cdot L_t^{(1-a)} \Rightarrow Y_t = K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2} \Leftrightarrow$

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{1/2} \cdot L_t^{1/2}}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\hat{y}_t = \hat{k}_t^{1/2}}$$

$$\hat{y}_{1950} = \left(\frac{K_{1900}}{L_{1900}}\right)^{1/2} = \sqrt{12} = 3{,}46$$

$$\hat{C}_t = (1-s)\hat{y}_t \Rightarrow \hat{C}_{1900} = 0{,}8 \cdot 3{,}46 = 2{,}8$$

$$\hat{I}_t = s \cdot \hat{y}_t \Rightarrow \hat{I}_{1950} = 0{,}2 \cdot 3{,}46 = 0{,}69$$

b) Steady state (ss)

$$\Delta \hat{k}_t = s\,\hat{y}_t - (n+\delta)\hat{k}_t$$

$\Delta \hat{k}_t = 0$ στο ss $\Rightarrow$ $\quad s\hat{y}^* = (n+\delta)\hat{k}^* \Leftrightarrow$

$$s\cdot \hat{k}^{*1/2} = (n+\delta)\hat{k}^* \Rightarrow s = (n+\delta)\cdot\frac{\hat{k}^*}{\hat{k}^{1/2}} \Rightarrow (\hat{k}^*)^{1/2} = \frac{s}{n+\delta}$$

$$\Rightarrow \hat{k}^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\hat{k}^* = 16}$$

$$\boxed{y^* = \sqrt{16} = 4}\ , \qquad \hat{c}^* = (1-s)\cdot\hat{y}^* = 0{,}8\cdot 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{c}^* = 3{,}2}$$

Δείξε ότι $\quad \hat{y}^* > \hat{y}_{1950}$

$\hat{k}^* > \hat{k}_{1950}$

$\hat{c}^* > \hat{c}^{1950}.$

Ρυθμοί Μεγέθυνσης

- $\hat{k}_t = \frac{K_t}{L_t} \Rightarrow \cancelto{=0}{\frac{\Delta \hat{k}_t}{\hat{k}_t}} = \frac{\Delta K_t}{K_t} - \frac{\Delta L_t}{L_t} \Leftrightarrow$

$$\frac{\Delta K}{K_t} = \frac{\Delta L_t}{L_t} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta K_t}{K_t} = n = 0{,}01}$$

- $\hat{y}_t = \frac{Y_t}{L_t} \Rightarrow \frac{\Delta \hat{y}_t}{\hat{y}_t} = \frac{\Delta Y_t}{Y_t} - \frac{\Delta L_t}{L_t} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = n = 0{,}01}$$

- $\hat{C}_t = \frac{C_t}{L_t} \Rightarrow \ \ldots \ \boxed{\frac{\Delta C_t}{C_t} = n = 0{,}01}$

γ) golden rule of capital:

! $\hat{k}^{*} \to \max \hat{c}$!

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_t &= \hat{y}_t - \hat{i}_t \\ \hat{i}^{*} &= (n+\delta)\hat{k}^{*} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{c}^{*} = \hat{y}^{*} - (n+\delta)\hat{k}^{*}$$

$$k_{gold}: \quad \frac{d\hat{c}^{*}}{d\hat{k}} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{y}^{*}}{d\hat{k}} - (n+\delta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \hat{k}^{\alpha-1} - (n+\delta)\hat{k} = 0 \Leftrightarrow$$

$$k^{gold} = \left[\left(\frac{1}{n+\delta}\right)\frac{1}{\alpha}\right]^{2} \Rightarrow k^{gold} = \left[\frac{1}{0{,}01+0{,}04} \cdot \frac{1}{2}\right]^{2} =$$

$\Rightarrow \hat{k}_{gold} = 100$ ($\hat{k}_{gold} > \hat{k}^{*}$, Ισχύει πάντα ?)

για να πάμε στο $\hat{K}_{gold}$, πρέπει κατι να αλλάξει

την αύξηση του S:

$$s'\hat{K}_{gold} = (n+\delta)\hat{K}_{gold} \Rightarrow s' = \frac{(0{,}01+0{,}04)\cdot 100}{100^{1/2}} =$$

$$\Rightarrow s' = 0{,}5$$

Άσκηση 5

Χώρα Β

$\delta = 0{,}04$

$n = 0{,}01$

$s = 0{,}16$

$\alpha = 1/2$

$K^{B}_{1950} = 3$

$L^{B}_{1950} = 1$