ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Α. Διακριτός Χρόνος

$$\gamma_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = \frac{X_{t+1}}{X_t} - 1$$

Έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής Χ παραμένει διαχρονικά σταθερός:

$$\gamma_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = \gamma, \quad \forall t$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή Χ έχει εκθετική συμπεριφορά:

$$\frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = \gamma \Leftrightarrow X_{t+1} = (1+\gamma)X_t$$

$$t = 0: \quad X_1 = (1+\gamma)X_0$$

$$t = 1: \quad X_2 = (1+\gamma)X_1 = (1+\gamma)^2 X_0$$

$$t = 2: \quad X_3 = (1+\gamma)X_2 = (1+\gamma)^3 X_0$$

κ.ο.κ

Συνεπώς

$$X_t = (1+\gamma)^t X_0$$

(Ουσιαστικά αυτή είναι η λύση της πρωτοβάθμιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών που ορίζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής Χ)

Λογαριθμίζουμε:

$$\ln X_t = t\ln(1+\gamma) + \ln X_0$$

Παρατηρείστε ότι για τιμές του γ κοντά στο μηδέν (γραμμική προσέγγιση Taylor γύρω από το σημείο γ=0):

$$\ln(1+\gamma) \cong \gamma$$

Άρα

$$\ln X_t \cong \ln X_0 + \gamma t$$

Συνεπώς αν η μεταβλητή Χ συμπεριφέρεται εκθετικά, ο λογάριθμός της έχει γραμμική συμπεριφορά και η κλίση ισούται με τον ρυθμό μεγέθυνσης.

B. Συνεχής Χρόνος

$$g_t = \frac{\frac{dX}{dt}}{X}$$

Έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής Χ παραμένει διαχρονικά σταθερός:

$$g_t = \frac{\frac{dX}{dt}}{X} = g, \quad \forall t$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή Χ έχει εκθετική συμπεριφορά:

$$\frac{\frac{dX}{dt}}{X} = g \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = gX \Leftrightarrow \frac{1}{X}dX = gdt \Leftrightarrow \int \frac{1}{X}dX = \int gdt \Leftrightarrow \ln X_t = gt + C \Leftrightarrow X_t = e^{gt}e^{C}$$

Παρατηρείστε ότι για t=0,

$$X_0 = e^{C}$$

Συνεπώς

$$X_t = X_0 e^{gt}$$

(Ουσιαστικά αυτή είναι η λύση της πρωτοβάθμιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που ορίζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής X)

Λογαριθμίζουμε:

$$\ln X_t = \ln X_0 + gt$$

Συνεπώς αν η μεταβλητή X συμπεριφέρεται εκθετικά, ο λογάριθμός της έχει γραμμική συμπεριφορά και η κλίση ισούται με τον ρυθμό μεγέθυνσης.

B1. Ρυθμός μεταβολής γινομένου δύο μεταβλητών

$$\frac{\frac{d(xy)}{dt}}{xy} = \frac{1}{xy}\left[\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}\right] = \frac{\frac{dx}{dt}}{x} + \frac{\frac{dy}{dt}}{y}$$

Εναλλακτικά:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \Leftrightarrow \frac{d\ln(xy)}{dt} = \frac{d\ln x}{dt} + \frac{d\ln y}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$$

B1. Ρυθμός μεταβολής λόγου δύο μεταβλητών

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\left[\frac{\frac{dx}{dt}y - x\frac{dy}{dt}}{y^2}\right] = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\left[\frac{\frac{dx}{dt}y - x\frac{dy}{dt}}{y^2}\right] = \frac{\frac{dx}{dt}}{x} - \frac{\frac{dy}{dt}}{y}$$

Εναλλακτικά:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \Leftrightarrow \frac{d\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{dt} = \frac{d\ln x}{dt} - \frac{d\ln y}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$$