ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Ιανουάριος 2022-23**

διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 (4 μονάδες)

α) Η συνάρτηση $y = y(x)$ **ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση:** $xy^2 + y = 3$ **.**

Να βρεθούν στο σημείο $(x = 2, y = 1)$

1. Η 1η παράγωγος 2. Η γραμμική προσέγγιση

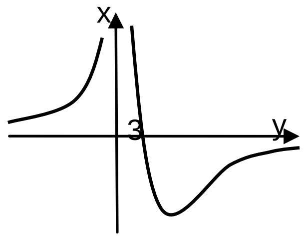
Λύση. Καταρχήν ελέγχουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση. $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$

1. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$(xy^2 + y)' = (3)' \Rightarrow (y^2 + x2yy') + y' = 0 \Rightarrow 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot y' + y' = 0 \Rightarrow 1 + 5y' = 0 \Rightarrow y' = -1/5$$

2. Η γραμμική προσέγγιση δίνεται από την παράσταση:

$$f_{\gamma\rho}(x) = y(2) + y'(2)(x-1) = 1 - \frac{1}{5}(x-2) = \frac{7-x}{5}$$



Παρατήρηση.

1. Μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση $y = y(x)$ λύνοντας αλγεβρικά ως προς y

$$xy^2 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4x(-3)}}{2x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12x}}{2x}$$

Πήραμε το θετικό πρόσημο για να ικανοποιείται στο σημείο.

2. Μπορούμε να βρούμε το γράφημα λύνοντας ως προς x: $xy^2 + y = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y}$,

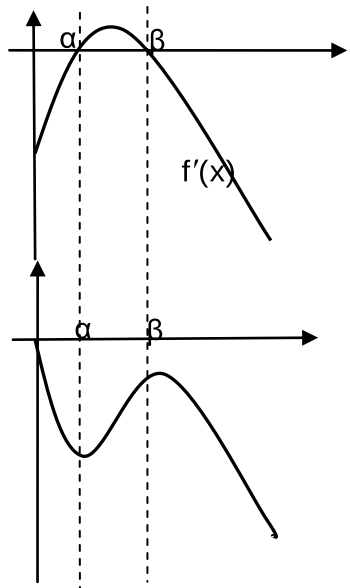
διαφορά των δύο υπερβολικών.

▲

β) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα.**

1. Να γίνει το γράφημα της $f(x)$ **με αρχική τιμή:** $f(0) = 0$

2. Να εντοπιστεί το σημείο μέγιστης τιμής της $f(x)$



Λύση

Αρχίζοντας με την τιμή: $f(0) = 0$, συνάρτηση $f(x)$ είναι φθίνουσα μέχρι το α διότι η παράγωγος είναι αρνητική, στη συνέχεια αύξουσα μέχρι το β διότι η παράγωγος είναι θετική, και μετά φθίνουσα διότι η παράγωγος είναι αρνητική. Υποψήφια για μέγιστη τιμή είναι τα σημεία: $\{0, \beta\}$ που είναι καταρχήν τοπικά μέγιστα. Η συνάρτηση $f(x)$ προκύπτει από την $f'(x)$ με ολοκλήρωση, και σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, έχουμε:

$$f(\beta) - f(0) = \int_0^\beta f'(x)dx = -E_1 + E_2$$, προσημασμένο εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Το «αρνητικό» εμβαδό E_1 μέχρι το α είναι μεγαλύτερο από το «θετικό» εμβαδό E_2 μεταξύ των $\{\alpha, \beta\}$, και επομένως:

$$-E_1 + E_2 < 0 \Rightarrow f(\beta) - f(0) < 0 \Rightarrow f(\beta) < f(0)$$

Επομένως $x = 0$ είναι το σημείο μέγιστης τιμής.

Παρατήρηση. Έχει και σημείο καμπής, από κυρτή σε κοίλη, στο σημείο ανάμεσα από τα $\{\alpha, \beta\}$ όπου αλλάζει η μονοτονία της $f'(x)$.

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = p\sqrt{x} - vx$ **στο διάστημα:** $0 \le x \le 2$**, με** $\{p > 0, v > 0\}$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\{p, v\}$ **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x = 2$

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης $p\sqrt{x}$ και της γραμμικής $-vx$.

Εναλλακτικά, η 2η παράγωγος είναι αρνητική:

$$f(x) = px^{1/2} - vx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}px^{-1/2} - v, \; f''(x) = -\frac{1}{4}px^{-3/2} < 0$$

2. Έχουμε πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (μέγιστο κοίλης), και το μέγιστο θα βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x = 2 \Leftrightarrow$

$$f'(2) \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}p2^{-1/2} - v \ge 0 \Rightarrow p \ge 2\sqrt{2}v$$, συνθήκη για μέγιστο στο δεξιό σύνορο

▲

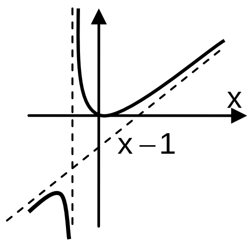
<u>δ)</u> Να βρεθεί μια παράγουσα της συνάρτησης: $\frac{x^2}{x+1}$

Λύση. Οι παράγουσες δίνονται από το αόριστο ολοκλήρωνα. Θα το υπολογίσουμε με δύο τρόπους:

1. Κάνουμε την διαίρεση της ρητής συνάρτησης, και μετά ολοκληρώνουμε:

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln|x+1|$$



2. Με αντικατάσταση: $v = x+1 \Rightarrow x = v-1$

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{(v-1)^2}{v}dv = \int \frac{v^2-2v+1}{v}dv = \int (v-2+\frac{1}{v})dv = \frac{1}{2}(v-2)^2 + \ln|v| = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln|x+1|$$

Κάθε άλλη παράγουσα προκύπτει προσθέτοντας μια σταθερά.

Παρατήρηση.

1. Δίνουμε και το γράφημα της αρχικής συνάρτησης. Έχει δύο ασύμπτωτες, την πλάγια $x-1$, και την κατακόρυφη στο -1.

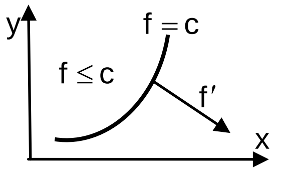
2. Η διαίρεση μπορεί να γίνει και με την γνωστή αλγοριθμική διαδικασία:

$$\frac{x^2}{x+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \underline{\left| \; x+1 \right.} \\ -(x^2+x) & \quad x-1 \\ \quad -x & \\ \quad -(x+1) & \\ \qquad 1 & \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$$

▲

<u>2</u> (4 μονάδες)

α) Η συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι κυρτή και έχει την ισοσταθμική του παραπλεύρως σχήματος. Να προσδιοριστεί η κάτω σταθμική και να γίνει το γράφημα της διανυσματικής παραγώγου**



<u>Λύση.</u> Εφόσον είναι κυρτή θα είναι και οιονεί κυρτή, δηλαδή θα έχει κυρτή την κάτω σταθμική, όπως στο γράφημα. Η διανυσματική παράγωγος θα κατευθύνεται στην αντίθετη κατεύθυνση προς την πάνω σταθμική, όπως στο γράφημα.

Παρατήρηση. Από την κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση είναι:

$x-$αύξουσα διότι έχει $f_x > 0$, $y-$φθίνουσα διότι έχει $f_y < 0$. ▲

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=(1-x)(1-y)$

1. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της

2. Να βρεθεί η παραβολική προσέγγιση στο στάσιμο σημείο.

Λύση.

1. Οι συνθήκες στασιμότητας μας δίνουν το στάσιμο:

$$\{f_x=-(1-y)=0,\ f_y=-(1-x)=0\}\Rightarrow\{x=1,y=1\}$$

$$\{f_{xx}=0,\ f_{yy}=0,\ f_{xy}=1\}\Rightarrow \Delta_f=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0\cdot0-1^2=-1<0$$

Έχει αρνητική διακρίνουσα και επομένως είναι σαγματικό. Ειδικότερα δεν είναι ακρότατο.

2. Η συνάρτηση είναι παραβολική (πολυωνυμική δευτέρου βαθμού), οπότε η παραβολική προσέγγιση συμπίπτει με την συνάρτηση:

$$f_{\pi\alpha\rho}(x,y)=f(x,y)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$$

Παρατήρηση. Πράγματι έχουμε:

$$f_{\pi\alpha\rho}(x,y)=0+0(x-1)+0(y-1)+\frac{1}{2}[0(x-1)^2+0(y-1)^2+2\cdot1(x-1)(y-1)]=(x-1)(y-1)$$

▲

γ) Το σημείο $\{x=1,y=2\}$ **είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης:** $f(x,y)=xy$**, με τον περιορισμό:** $g(x,y)=2x+y=4$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge0,\ y\ge0\}$**.**

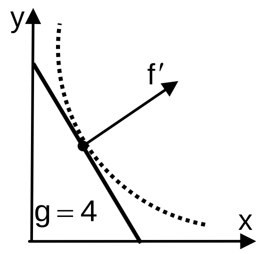
1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, και αναλυτικά και γραφικά

Λύση.

1. Ο πολλαπλασιαστής Lagrange δίνεται από τον λόγο:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{y}{2}=\frac{2}{2}=1$$



2. Η συνάρτηση Lagrange γράφεται:

$$L=f+\lambda(c-g)=xy+1(4-2x-y)=4-2x-y+xy\Rightarrow\{L_x=-2+y,\ L_y=-1+x\}$$

Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης Lagrange στο σημείο είναι αρνητικά ορισμένος διότι έχει ορίζουσα θετική:

$$\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2(0-1)+1(2-0)=4>0$$

Επομένως το σημείο είναι **(γνήσιο) περιορισμένο τοπικό μέγιστο.** Γραφικά διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι γνήσιο περιορισμένο **ολικό μέγιστο,** διότι ο περιορισμός $g=2x+y=4$, βρίσκεται εξολοκλήρου στην κάτω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης.

▲

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=x/(x+y)$

1. Να διαπιστωθεί ότι είναι ομογενής

2. Να εκτιμηθεί η μεταβολή της αν αμφότερα τα $\{x,y\}$**, ελαττωθούν κατά** 1%

Λύση.

1. Η $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+y/x}$, είναι ομογενής βαθμού 0, διότι είναι συνάρτηση του y/x

Εναλλακτικά, διότι ικανοποιεί:

$$f(tx,ty)=\frac{tx}{tx+ty}=\frac{x}{x+y}=f(x,y)$$

2. Δεν θα μεταβληθεί διότι, ως ομογενής μηδενικού βαθμού, έχει μηδενική ελαστικότητα κλίμακας.
Παρατήρηση. Μεταβολή **αμφοτέρων** κατά -1%, αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με $t=0{,}99$ ▲.

<u>**3**</u> (1 μονάδα)

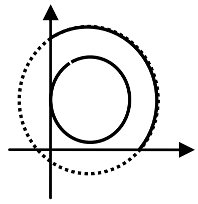
Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 3 - X$ και $W = 5 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{W, V\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X, Y) = VX + WY - C(X, Y)$.

1. Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

2. Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος:

<u>**Λύση**</u>

1. $\Pi = (3 - X)X + (5 - Y)Y - (X + Y) = 2X + 4Y - X^2 - Y^2$



Είναι παραβολική συνάρτηση με **κυκλικές** ισοσταθμικές που έχουν όλες το κέντρο τους στο στάσιμο σημείο. **Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή**:

$$\Pi_X = 2 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1, \quad \Pi_Y = 4 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 2$$

Παρατήρηση. Το ίδιο βρίσκουμε με την διαδικασία συμπλήρωσης τετραγώνων:

$$2X + 4Y - X^2 - Y^2 = -(x^2 - 2 \cdot 1x + 1 - 1) - (y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 5$$

2 Η συνάρτηση κέρδους είναι **παραβολική κοίλη**.

α) Αν επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών τότε, ως κοίλη συνάρτηση, το μέγιστο κέρδος θα βρίσκεται στο παραπάνω στάσιμο (βρίσκεται στην θετική περιοχή), που μας δίνει και την βέλτιστη κατανάλωση:

$$\max\{\Pi = 2X + 4Y - X^2 - Y^2 \,\|\, X \geq 0, Y \geq 0\} \Rightarrow \{x = 1, y = 3\}.$$

Οι βέλτιστες μοναδιαίες τιμές, και το κέρδος, είναι αντίστοιχα:

$$\{v = 3 - 1 = 2, \ w = 5 - 2 = 3\} \quad \pi = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (1 + 2) = 5$$

▲

<u>**4**</u> (1 μονάδα)

Θεωρούμε τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις ζήτησης-προσφοράς, αντίστοιχα:

$$\{D: 2P + Q = 3, \ S: P - Q = 1\}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές ισορροπίας αναλυτικά και γραφικά

2. Στις τιμές ισορροπίας να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ελαστικότητες

3. Να υπολογιστεί το συνολικό πλεόνασμα (TS)

<u>**Λύση**</u>

1. Βρίσκουμε τις τιμές ισορροπίας λύνοντας το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} D: 2P + Q = 3 \\ S: P - Q = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{p = 4/3, \ q = 1/3\}$$

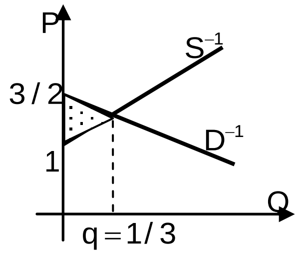
2. Βρίσκουμε τις συναρτήσεις-ζήτησης προσφοράς και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ελαστικότητες:

$$\left.\begin{matrix} D: 2P + Q = 3 \\ S: P - Q = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D: Q = 3 - 2P \\ S: Q = -1 + P \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} E_D = PQ'/Q = (4/3)(-2)/(1/3) = -8 \\ E_S = PQ'/Q = (4/3)(+1)/(1/3) = 4 \end{matrix}\right\}$$

Παρατήρηση. Αμφότερα ελαστικά, η ζήτηση με διπλάσια ελαστικότητα από την προσφορά, διότι στις ίδιες τιμές έχει διπλάσια παράγωγο.

3. Βρίσκουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις ζήτησης-προσφοράς:

$$\left.\begin{matrix} D: 2P + Q = 3 \\ S: P - Q = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D^{-1}: P = 3/2 - Q/2 \\ S^{-1}: P = 1 + Q \end{matrix}\right\}$$



και υπολογίζουμε το συνολικό πλεόνασμα με το ολοκλήρωμα:

$$TS = \int_0^q [D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q)]dQ = \int_0^{1/3} [(3/2 - Q/2) - (1 + Q)]dQ$$

$$= \int_0^{1/3} (1/2 - 3Q/2)dQ$$

$$= Q/2 - 3Q^2/4 \Big|_0^{1/3} = 1/6 - 3/36 = 3/36 = 1/12$$

Παρατήρηση. Όπως φαίνεται και στο γράφημα, δίνεται από το εμβαδό τριγώνου με βάση 1/2 και ύψος 1/3.

ΤΕΛΟΣ