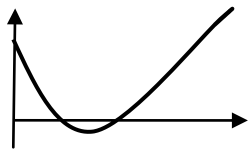
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Σεπτέμβριος 2021-22**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

<u>1</u> *(4 μονάδες)*



α) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα. Να γίνει το γράφημα της $f(x)$ και να εντοπιστεί το σημείο ελάχιστης τιμής της

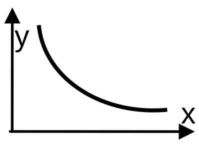
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + \alpha x$ στο διάστημα: $1 \le x \le 2$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x = 2$.

γ) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x = 1, y = 1)$ η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $-x + y + y^2 = 1$.

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)\sqrt{x} = 1$ και των θετικών ημιαξόνων.

<u>2</u> *(4 μονάδες)*

α) Να εκτιμηθεί η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = \sqrt{x}y$ αν οι τιμές των $\{x, y\}$ ελαττωθούν αμφότερες κατά 1%, από τις αρχικές τιμές $\{x = 1, y = 1\}$.



β) Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι $x -$ φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.

γ) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημείο της συνάρτησης:

$$f(x, y) = 4 + 2xy + x^2$$

δ) Το περιορισμένο στάσιμο της $f = 4x + y$ με τον περιορισμό $g = x^2 + y = 5$, είναι $(x = 2, y = 1)$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής
2. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

<u>3</u>*(1 μονάδες)*

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει συνεχώς με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$. Να εκτιμηθούν:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης

β) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου

γ) Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

<u>4</u>.*(1 μονάδες)*

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα $Q = 3K^{1/3}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p.

α) Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος Π^* ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{v, p\}$ και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης ως προς την κάθε παράμετρο.

β) Να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική και η αντίστοιχη κάτω σταθμική της παραπάνω συνάρτησης μέγιστου κέρδους.

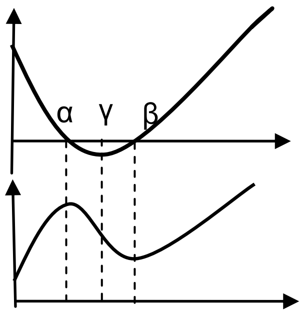
ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. ***Λύσεις*** **Σεπτέμβριος 2021-22**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

<u>1</u> *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα. Να γίνει το γράφημα της $f(x)$ και να εντοπιστεί το σημείο ελάχιστης τιμής της



<u>Λύση</u> .Αρχίζοντας με οιαδήποτε τιμή $f(0)$, η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα όπου η παράγωγος είναι θετική, φθίνουσα όπου είναι αρνητική. Βρίσκουμε έτσι το παραπλεύρως γράφημα, οπότε η ελάχιστη τιμή θα βρίσκεται σένα από τα σημεία $\{0,\beta\}$. Για να συγκρίνουμε τις τιμές, χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα:

$$f(\beta)-f(0)=\int_0^\beta f'(x)dx$$ =**προσημασμένο εμβαδόν** μεταξύ $f'(x)$ και $x-$ άξονα

Είναι γνήσια θετικό διότι το θετικό εμβαδόν μέχρι το α είναι γνήσια μεγαλύτερο από το αρνητικό εμβαδόν μεταξύ των $\{\alpha,\beta\}$, οπότε έχουμε:

$$f(\beta)-f(0)>0 \Rightarrow f(0)<f(\beta)$$

Επομένως $x=0$ είναι το σημείο ελάχιστης τιμής.

Παρατήρηση.

1. Ως προς την κυρτότητα είναι κοίλη μέχρι το γ που η παράγωγος είναι φθίνουσα και μετά κυρτή διότι η παράγωγος είναι αύξουσα. Το γ όπου αλλάζει γνήσια η κυρτότητα είναι σημείο καμπής.
2. Η συνάρτηση έχει δύο **τοπικά ελάχιστα**. Το αριστερό σύνορο 0 με θετική παράγωγο, και το στάσιμο β με αύξουσα παράγωγο. Είναι και τα υποψήφια για ολικό ελάχιστο.

▲

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+\alpha x$ στο διάστημα: $1\le x\le 2$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x=2$.

Λύση. Είναι κοίλη ως άθροισμα της γνωστής κοίλης: $\ln x$ και της κοίλης γραμμικής: αx.

Εναλλακτικά, είναι κοίλη διότι η 2η παράγωγος είναι αρνητική:

$$f(x)=\ln x+\alpha x \Rightarrow f'(x)=1/x+\alpha \Rightarrow f''(x)=-1/x^2<0$$

Έχουμε πρόβλημα **Κυρτού Προγραμματισμού** για μέγιστο κοίλης. **Ως κοίλη, θα έχει μέγιστο στο δεξιό σύνορο: $x=2 \Leftrightarrow$ ικανοποιεί: $f'(2)\ge 0$**

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$f'(2)=1/2+\alpha\ge 0 \Rightarrow \alpha\ge -1/2$$

▲

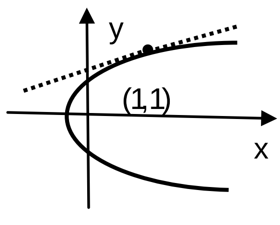
γ) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x=1, y=1)$ η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y=y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $-x+y+y^2=1$.

Λύση. Ελέγχουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο παραγωγίζοντας στην εξίσωση πλεγμένα ως προς x:

$$(-x+y+y^2)'=(1)' \Rightarrow -1+y'+2yy'=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2y+1}=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{3}$$, **πρώτη παράγωγος,** θετική



Για την δεύτερη παράγωγο παραγωγίζουμε πάλι πλεγμένα ως προς x και αντικαθιστούμε από τα παραπάνω:

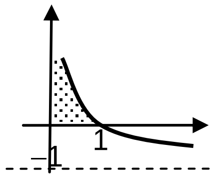
$$(-1+y'+2yy')'=0' \Rightarrow 0+y''+2y'y'+2yy''=0$$

$$\Rightarrow y''+2(1/3)^2+2y''=0 \Rightarrow y''=-2/27$$, **δεύτερη παράγωγος,** αρνητική

Όπως φαίνεται και στο γράφημα, στο συγκεκριμένο σημείο η συνάρτηση $y=y(x)$ είναι αύξουσα κοίλη . Γραφικά η εξίσωση παριστάνει παραβολή ως προς τον κατακόρυφο άξονα:

$$-x+y+y^2=1 \Rightarrow x=y^2+y-1$$ ▲

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)\sqrt{x}=1$ και των θετικών ημιαξόνων.



Λύση. Η καμπύλη είναι υπερβολική με μετατόπιση προς τα κάτω κατά -1:

$$(y+1)x^{1/2}=1 \Rightarrow y=x^{-1/2}-1$$

Το εμβαδό δίνεται από το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1 (x^{-1/2}-1)dx = 2x^{1/2}\Big|_{x=0}^{1} - x\Big|_{x=0}^{1} \to [2-0]-[1-0]\to 1$$

▲

2 *(4 μονάδες)*

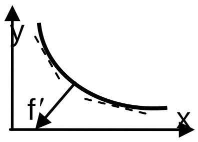
α) Να εκτιμηθεί η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x}y$ αν οι τιμές των $\{x,y\}$ ελαττωθούν αμφότερες κατά 1%, από τις αρχικές τιμές $\{x=1,y=1\}$.

Λύση. Η συνάρτηση είναι τύπου C-D (Cobb-Douglas): $f(x,y)=x^{1/2}y$ βαθμού $1/2+1=3/2$. Επομένως έχει ελαστικότητα κλίμακας $\varepsilon_r=3/2=1.5$, και (ανεξάρτητα των αρχικών τιμών) **οριακά** θα μεταβληθεί κατά:

$$\%df=1.5(-1\%)=-1.5\%$$

▲

β). Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.



Λύση. Οι ισοσταθμικές: $f(x,y)=c$ έχουν αρνητική κλίση και επομένως οι μερικές παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο, διότι:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}<0 \Rightarrow \frac{f_x}{f_y}>0$$

Δίνεται $f_x<0$, οπότε θα έχουμε και $f_y<0$, δηλαδή η f είναι επίσης $y-$φθίνουσα, όπως φαίνεται και από την κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου f' στο σχήμα.

Από το σχήμα επίσης διαπιστώνουμε ότι καθώς το x αυξάνει η κλίση της ισοσταθμικής είναι φθίνουσα στο μέτρο: $|y'(x)|\downarrow$, και επομένως η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Εξάλλου ικανοποιείται και το αναλυτικό κριτήριο ότι τα $\{y',y''\}$ έχουν αντίθετο πρόσημο: $\{y'<0,\ y''>0\}$.

▲

γ).Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημείο της συνάρτησης:

$$f(x,y)=4+2xy+x^2$$

Λύση. Υπολογίζουμε τις παραγώγους και τον Εσσιανό πίνακα:

$$f(x,y)=4+2xy+x^2 \Rightarrow \{f_x=2y+2x,\ f_y=2x\} \Rightarrow H_f=\begin{Bmatrix} f_{xx}=2, & f_{xy}=2 \\ f_{yx}=2, & f_{yy}=0 \end{Bmatrix}$$

Βρίσκουμε το μοναδικό στάσιμο σημείο:

$$\{f_x=2y+2x=0, f_y=2x\} \Rightarrow \{x=0,y=0\}$$

Η Εσσιανή $2^η$ παράγωγος είναι αόριστη, διότι ικανοποιεί:

$$|H_f|=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\cdot 0-2^2=-4<0$$

Επομένως το στάσιμο είναι σαγματικό. Ειδικότερα δεν είναι ακρότατο.

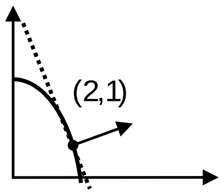
▲

δ). Το περιορισμένο στάσιμο της $f = 4x + y$ **με τον περιορισμό** $g = x^2 + y = 5$**, είναι** $(x = 2, y = 1)$**.**

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής

2. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

Λύση.



1. Για τον πολλαπλασιαστή βρίσκουμε:

$$\lambda = f_x / g_x = 4/2x = 4/4 = 1$$

2. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική αύξουσα: $f = 4x + y$, και ο περιορισμός: $x^2 + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x^2$ βρίσκεται εξολοκλήρου στην κάτω σταθμική της. Γραφικά διαπιστώνουμε ότι η λύση δίνει *περιορισμένο γνήσιο ολικό μέγιστο.* Για τον αναλυτικό χαρακτηρισμό υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης Lagrange:

$$L = f + \lambda(c - g) = 4x + y + \lambda(5 - x^2 - y) \Rightarrow \left.\begin{matrix} L_x = 4 - 2\lambda x \\ L_y = 1 - \lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} L_{xx} = -2\lambda & L_{xy} = 0 \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = 0 \end{matrix}\right\}, \ \tilde{H}_L = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 1 \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

με $\left|\tilde{H}_L\right| = 1\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -2\lambda & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda = 2 > 0$, (αναπτύξαμε ως προς την τρίτη γραμμή)

Είναι θετική και επομένως το σημείο χαρακτηρίζεται ως *περιορισμένο γνήσιο τοπικό μέγιστο*.

▲

<u>3</u>*(1 μονάδες)*

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$**, όπου** P **είναι η μοναδιαία τιμή του και** Q **η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει συνεχώς με ρυθμό** 1% **ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι** $\varepsilon = -2$**. Να εκτιμηθούν:**

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης

β) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου

γ) Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 **ετών αν το τωρινό έσοδο είναι** $E_0 = 100$**.**

<u>Λύση</u> Εφόσον οι ρυθμοί είναι **ποσοστιαίοι (σχετικοί)**, βρίσκουμε:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ζήτησης ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με τον ρυθμό μεταβολής της τιμής που δίνεται 1%:

$$\frac{\%dQ}{dt} = \frac{\%dQ}{\%dP}\frac{\%dP}{dt} = (-2)(1\%) = -2\%$$, ελαττώνεται

β) Ο ρυθμός μεταβολής **γινομένου** $E = PQ$ ισούται με το άθροισμα των ρυθμών μεταβολής των όρων:

$$\frac{\%dE}{dt} = \frac{\%dQ}{dt} + \frac{\%dP}{dt} = -2 + 1 = -1\%$$, ελαττώνεται

Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο μεταβάλλεται με ποσοστιαίο ρυθμό -1% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = -1/100 = -0.01$.

γ) Επομένως το έσοδο μετά από 10 έτη θα είναι:

$$E = E_0 e^{rt} = 100e^{(-0.01)10} = 100e^{-0.1} \approx 100[1 - (0.1) + (0.1)^2/2] = 90.5$$

Στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού.

▲

4. *(1 μονάδες)*

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα $Q = 3K^{1/3}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p.

α) Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος Π^* ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{v, p\}$ και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης ως προς την κάθε παράμετρο.

β) Να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική και η αντίστοιχη κάτω σταθμική της παραπάνω συνάρτησης μέγιστου κέρδους.

Λύση.

α) Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi(K) = R(K) - C(K) = pQ(K) - vK = 3pK^{1/3} - vK$$

είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi'(K) = p / K^{-2/3} - v = 0 \Rightarrow K^{-2/3} = (v/p) \Rightarrow K^* = (v/p)^{-3/2} = p^{3/2} / v^{3/2}$$

Το μέγιστο κέρδος είναι:

$$\Pi^* = \Pi(K^*) = 3pK^{*1/3} - vK^* = 3p\frac{p^{1/2}}{v^{1/2}} - v\frac{p^{3/2}}{v^{3/2}} = 2\frac{p^{3/2}}{v^{1/2}} = 2p^{3/2}v^{-1/2}$$

Ως συνάρτηση των παραμέτρων είναι:

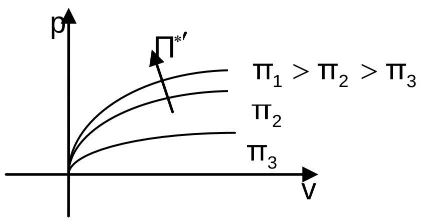
p – αύξουσα κυρτή ως θετική δύναμη μεγαλύτερη της μονάδος

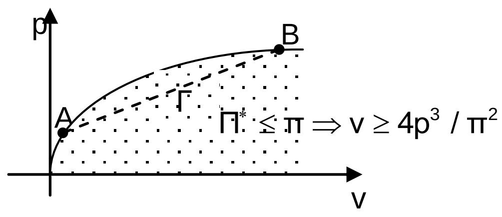
v – φθίνουσα κυρτή ως αρνητική δύναμη

Δηλαδή το μέγιστο κέρδος **αυξάνει με αύξοντα ρυθμό** όταν αυξάνει η τιμή του προιόντος ή όταν ελαττώνεται το κόστος του συντελεστή

Παρατήρηση. Για μεταβολές αμφότερων των παραμέτρων θα πρέπει να υπολογίσουμε τον εσσιανό πίνακα:

β) Κάτω σταθμική: $\Pi^* = 2\frac{p^{3/2}}{v^{1/2}} \le \pi \Rightarrow v \ge 4p^3 / \pi^2$, κυρτή περιοχή ως εσωτερικό θετικής δύναμης





Δηλαδή, ακραίοι συνδυασμοί $\{A, B\}$ τιμής του προιόντος και κόστους του συντελεστή είναι περισσότερο κερδοφόροι από ενδιάμεσους συνδυασμούς Γ. Έχουμε:

$\Pi^*(A) = \Pi^*(B) = \pi$, αλλά $\Pi^*(\Gamma) < \pi$

▲

ΤΕΛΟΣ