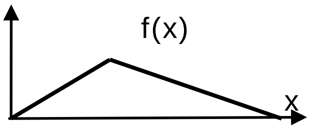
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι **Κατατακτήριες 2022**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 *(4 μονάδες)*

α) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να σκιαγραφηθούν, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τα γραφήματα της οριακής και της μέσης τιμής:



$$Mf(x) = f'(x), \quad Af(x) = f(x)/x$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) + \alpha x$ στο διάστημα: $0 \le x \le 1$, με θετικό: $\alpha > 0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό άκρο του διαστήματος: $x = 1$

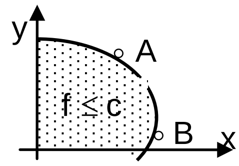
γ) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x = 1, y = 2)$ η 1^{η} και η 2^{η} παράγωγος της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $-4x + y + y^2 = 2$.

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $y(x+1) = 1$ και των θετικών ημιαξόνων.

2 *(4 μονάδες)*

α) Οι εξισώσεις: $\{xy^2 = s, 2x - y = t\}$ ορίζουν πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{s, t\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς t.

β) Η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει κάτω σταθμική την γραμμοσκιασμένη περιοχή του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθούν τα πρόσημα των μερικών παραγώγων f_x και f_y στα σημεία A και B.



γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x, y) = 2\ln(xy) - 2x - y$ στη θετική περιοχή $\{x \ge 0, y \ge 0\}$. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία της.

δ) Στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0, y \ge 0\}$, το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{f(x, y) = 4x + y \,\|\, g(x, y) = 2x^2 + y^2 = c\} \text{ με } c > 0$$

έχει την λύση:

$$\{x^* = 2\sqrt{c}/3, \; y^* = \sqrt{c}/3\}$$

1. Να βρεθεί η λύση γραφικά
2. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

3 *(1 μονάδα)*

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y και ο πληθυσμός L κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, βρέθηκαν να έχουν τις τιμές:

$\{Y_1 = 400, Y_2 = 600\}$ δισεκατομμύρια ευρώ, $\{L_1 = 10, L_2 = 12\}$ εκατομμύρια

αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εθνικού εισοδήματος, του πληθυσμού, και του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

4 *(1 μονάδα)*

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = 2\sqrt{X} + \sqrt{Y} \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη κατανάλωση: y/x, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: w/v. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.

ΤΕΛΟΣ

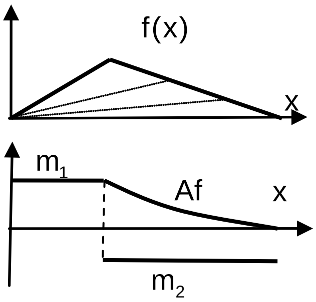
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι.Λύσεις   Κατατακτήριες 2022

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 *(4 μονάδες)*

α) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να σκιαγραφηθούν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τα γραφήματα της οριακής και της μέσης τιμής:

$Mf(x) = f'(x)$, $Af(x) = f(x)/x$



Λύση.

1. Η οριακή τιμή δίνεται από την παράγωγο, δηλαδή την κλίση της καμπύλης. Έχει σταθερή τιμή $m_1 > 0$ μέχρι την γωνία, και στη συνέχεια σταθερή τιμή $m_2 < 0$, με $|m_1| > |m_2|$

2. Η μέση τιμή δίνεται από την κλίση της ακτίνας. Συμπίπτει με την παράγωγο m_1 μέχρι την γωνία. Στη συνέχεια μικραίνει συνεχώς μέχρι την τιμή 0.

▲

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) + \alpha x$ στο διάστημα: $0 \le x \le 1$, με θετικό: $\alpha > 0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό άκρο του διαστήματος: $x = 1$

Λύση. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $\ln(1+x)$ και της κοίλης γραμμικής: αx.

Εναλλακτικά, είναι κοίλη διότι η 2η παράγωγος είναι αρνητική:

$$f(x) = \ln(1+x) + \alpha x \Rightarrow f'(x) = 1/(1+x) + \alpha \Rightarrow f''(x) = -1/(1+x)^2 < 0$$

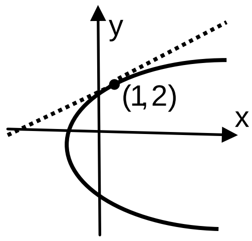
Ως κοίλη, θα έχει μέγιστο στο δεξιό σύνορο: $x = 1 \Leftrightarrow$ ικανοποιεί την συνθήκη:

$$f'(1) \ge 0 \Rightarrow 1/(1+1) + \alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge -1/2$$

Εφόσον το α είναι θετικό, το μέγιστο βρίσκεται πάντοτε στο δεξιό σύνορο. Εξάλλου η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα, διότι έχει γνήσια θετική παράγωγο στο διάστημα.

▲

γ) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x = 1, y = 2)$ η 1^η και η 2^η παράγωγος της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $-4x + y + y^2 = 2$.



Λύση. Ελέγχουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση.

Για την 1^η παράγωγο παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x:

$$(-4x + y + y^2)' = (2)' \Rightarrow -4 + y' + 2yy' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{2y+1} = \frac{4}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow y' = \frac{4}{5}$$

Για την 2^η παράγωγο, παραγωγίζουμε εκ νέου πλεγμένα ως προς x:

$$(-4 + y' + 2yy')' = 0 \Rightarrow y'' + 2y'y' + 2yy'' = 0 \Rightarrow (1 + 2 \cdot 2)y'' + 2(y')^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5y'' = -4(4/5)^2 \Rightarrow y'' = -32/125$$

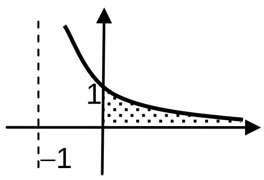
Πράγματι, στο σημείο η συνάρτηση $y = y(x)$ είναι αύξουσα και κοίλη: $\{y' > 0,\ y'' < 0\}$

.
▲

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $y(x+1) = 1$ και των θετικών ημιαξόνων.

Λύση. Η καμπύλη είναι υπερβολική με μετατόπιση προς τα αριστερά κατά -1:

$$y(x+1) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x+1}$$



Το εμβαδό είναι άπειρο διότι δίνεται από το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα που δεν συγκλίνει:

$$E = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1)\Big|_{x=0}^{+\infty} \to (+\infty - 0) \to +\infty$$

▲

2 *(4 μονάδες)*

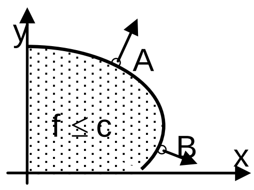
α) Οι εξισώσεις: $\{xy^2 = s, 2x - y = t\}$ **ορίζουν πλεγμένα τα** $\{x, y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{s, t\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** t **χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.**

<u>Λύση.</u>

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,s,t) = xy^2 - s = 0 \\ g(x,y,s,t) = 2x - y - t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\begin{vmatrix} f_t & f_y \\ g_t & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2xy \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{2xy}{-y^2 - 4xy} = \frac{2x}{y + 4x}$$

▲

(β) Η συνάρτηση $f(x, y)$ **έχει κάτω σταθμική την γραμμοσκιασμένη περιοχή του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθούν τα πρόσημα των μερικών παραγώγων** f_x **και** f_y **στα σημεία** A **και** B**.**



<u>Λύση.</u> Οι διανυσματικές κλίσεις $f' = (f_x, f_y)$ στα αντίστοιχα σημεία είναι κάθετες στην ισοσταθμική: $f = c$ και κατευθύνονται προς την πάνω σταθμική: $f \geq c$. Από το γράφημα βρίσκουμε τα παρακάτω για τα πρόσημα των μερικών παραγώγων:

$$A : \{f_x > 0,\ f_y > 0\}, \quad B : \{f_x > 0,\ f_y < 0\}$$

▲

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x, y) = 2\ln(xy) - 2x - y$ **στη θετική περιοχή** $\{x \geq 0, y \geq 0\}$**. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν ως ακρότατα τα στάσιμα σημεία της.**

<u>Λύση.</u> Βρίσκουμε μόνο ένα στάσιμο σημείο:

$$f(x,y) = 2\ln(xy) - 2x - y = 2\ln x + 2\ln y - 2x - y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x = 2/x - 2 = 0 \\ f_y = 2/y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^* = 1,\ y^* = 2)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον Εσσιανό πίνακα της δεύτερης παραγώγου:

$$f_{xx} = -2/x^2,\ f_{yy} = -2/y^2,\ f_{xy} = 0 \Rightarrow H_f = \begin{bmatrix} -2/x^2 & 0 \\ 0 & -2/y^2 \end{bmatrix}$$

Ο Εσσιανός πίνακας είναι παντού αρνητικά ορισμένος:

$$f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0\ \ \&\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4/x^2y^2 > 0\,.$$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια κοίλη και το στάσιμο είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

▲

δ) Στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$**, το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:**

$$\max\{f(x,y) = 4x + y \,\|\, g(x,y) = 2x^2 + y^2 = c\} \text{ με } c > 0$$

έχει την λύση:

$$\{x^* = 2\sqrt{c}/3,\ y^* = \sqrt{c}/3\}$$

1. Να βρεθεί η λύση γραφικά

2. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

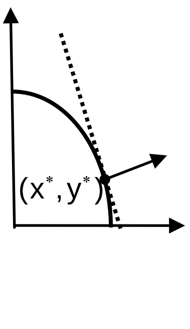
<u>Λύση.</u> Ως συναρτήσεις του περιορισμού c, ο πολλαπλασιαστής ισούται με την παράγωγο του μέγιστου της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{4}{4x^*} = \frac{3}{2\sqrt{c}}, \quad f^* = f(x^*, y^*) = 4x^* + y^* = 4\frac{2\sqrt{c}}{3} + \frac{\sqrt{c}}{3} = 3\sqrt{c}$$

Επαληθεύεται η σχέση:

$$f^{*\prime}(c) = \lambda(c)$$

Παραπλεύρως δίνουμε και το γράφημα της λύσης.



▲

3 *(1 μονάδα)*

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y και ο πληθυσμός L κατά τα έτη $\{t_1 = 2000,\ t_2 = 2010\}$, βρέθηκαν να έχουν τις τιμές:

$\{Y_1 = 400,\ Y_2 = 600\}$ **δισεκατομμύρια ευρώ**

$\{L_1 = 10,\ L_2 = 12\}$ **εκατομμύρια**

αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εθνικού εισοδήματος, του πληθυσμού, και του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y / L$.

__**Λύση.**__ Θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω απλούς εκτιμητές:

$$r_Y \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta t} = \frac{(Y_2 - Y_1)/Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{200/500}{10} = \frac{2}{50} = 0.04 \Rightarrow \%r_Y = 100 r_Y = 4\%$$

$$r_L \approx \frac{\Delta L / L}{\Delta t} = \frac{(L_2 - L_1)/L_1}{t_2 - t_1} = \frac{2/10}{10} = \frac{2}{100} = 0.02 \Rightarrow \%r_l = 100 r_L = 2\%$$

$$y = Y / L \Rightarrow r_y = r_Y - r_L \approx 0.04 - 0.02 = 0.02 \Rightarrow \%r_y = 100 r_y = 2\%$$

Μεταβάλλονται με ρυθμό $\{4\%, 2\%, 2\%\}$ ετησίως, αντίστοιχα.

▲

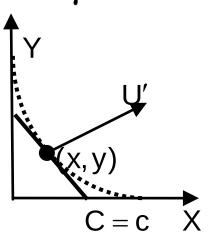
4 *(1 μονάδα)*

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}} \{U = \sqrt{X} + 2\sqrt{Y} \parallel C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στην κατανάλωση: y / x, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών τους: w / v. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.



__**Λύση**__

α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη, για οιεσδήποτε μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών.

β) Η λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\frac{U_X}{U_Y} = \frac{C_X}{C_Y}\right\} \Rightarrow \left.\frac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}} = \frac{v}{w}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = 4\frac{v^2}{w^2} = 4\left(\frac{w}{v}\right)^{-2}$$

Διαπιστώσαμε ότι ο λόγος συμμετοχής των αγαθών στην κατανάλωση εξαρτάται μόνο από τον λόγο των αντίστοιχων μοναδιαίων τιμών τους. Η ελαστικότητα της εξάρτησης δίνεται από την δύναμη -2 , οπότε έχουμε:

$$\%d\left(\frac{y}{x}\right) = -2\%d\left(\frac{w}{v}\right) \qquad \text{ή ισοδύναμα: } \%d(y) - \%d(x) = -2(\%dw - \%dv)$$

Δηλαδή:

Αν ο λόγος των τιμών αυξηθεί κατά κάποιο ποσοστό, ο λόγος της συμμετοχής των αντίστοιχων αγαθών θα ελαττωθεί κατά το διπλάσιο ποσοστό, οριακά.

Οριακά η ποσοστιαία μεταβολή ενός λόγου ισούται με την διαφορά της ποσοστιαίας μεταβολής του παρονομαστή από αυτή του αριθμητή.

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε πρώτα την πλήρη λύση και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον ζητούμενο λόγο:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U_X}{U_Y}=\dfrac{C_X}{C_Y} \\ C=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}}=\dfrac{v}{w} \\ vX+wY=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{Y}}{2\sqrt{X}}=\dfrac{v}{w} \\ vX+wY=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Y=4v^2X/w^2 \\ vX+4v^2X/w=c \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{x=\frac{cw}{vw+4v^2},\ y=\frac{4cv}{4vw+w^2}\right\} \text{ είναι η λύση}$$

Για τον λόγο συμμετοχής των δύο αγαθών στη κατανάλωση, βρίσκουμε πάλι:

$$\frac{y}{x}=\frac{\dfrac{4cv}{(4v+w)w}}{\dfrac{cw}{v(w+4v)}}=\frac{4cvv}{cww}=4\frac{v^2}{w^2}=4\left(\frac{w}{v}\right)^{-2}$$

ΤΕΛΟΣ