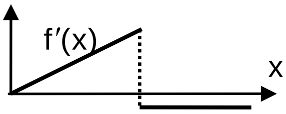
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι **Ιανουάριος 2021-22**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. *(4 μονάδες)*



α) Να γίνει το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ με αρχική τιμή $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.

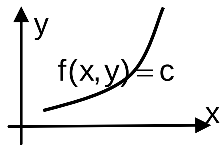
β) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x=2, y=1)$ η 1η και η 2η παράγωγος της συνάρτησης $x=x(y)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $4x+x^2+y^2=13$.

γ) Οι μεταβλητές $\{x,y\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $x\sqrt{y}=2$. Να βρεθεί η ελαστικότητα του y ως προς x.

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(x+1)(y+1)=2$ και των θετικών ημιαξόνων.

2 *(4 μονάδες)*

α) Το σύστημα εξισώσεων: $\{x+y=u, x^2-y=-v\}$ ορίζει πλεγμένα τα $\{x,y\}$ ως συναρτήσεις των $\{u,v\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς v.



β) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$αύξουσα και έχει ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς y και να σκιαγραφηθεί η κάτω σταθμική περιοχή.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=1-6x+x^2+y^2-4xy$.

Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της. Τι μορφή έχει η ισοσταθμική που διέρχεται από το στάσιμο σημείο?

δ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί αναλυτικά και γραφικά το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=x+y$, με τον περιορισμό: $g(x,y)=x^2y=4$, στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0, y\geq 0\}$.

Εφαρμογές

3 *(1 μονάδες)*

α) Σε μια οικονομία αυξάνουν συνεχώς το εθνικό εισόδημα Y με ετήσιο ρυθμό 6%, και ο πληθυσμός L με ετήσιο ρυθμό 4%. Να βρεθεί ο ετήσιος ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν εισοδήματος $y=Y/L$ και να εκτιμηθεί σε πόσο χρόνο θα αυξηθεί κατά 50%

4 *(1 μονάδες)*

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X,Y) με συνάρτηση κόστους: $C(X,Y)=1+\sqrt{X}+\sqrt{Y}$.

α) Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι ομογενής ή ομοθετική.

β) Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

γ) Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης εσόδου:

$$\max\{R=2X+Y \,||\, C=1+\sqrt{X}+\sqrt{Y}\leq 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

ΤΕΛΟΣ

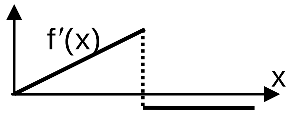
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι **Ιανουάριος 2021-22**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

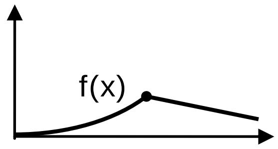
Α Μέρος

1. *(4 μονάδες)*

α) Να γίνει το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ με αρχική τιμή $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.



Λύση. Η συνάρτηση $f(x)$ θα είναι:



1. Αύξουσα κυρτή μέχρι την γωνία, διότι η παράγωγος είναι θετική αύξουσα. Ειδικότερα θα είναι παραβολική, διότι η παράγωγος είναι γραμμική. Επίσης θα αρχίζει με μηδενική κλίση, διότι η παράγωγος αρχίζει με μηδενική τιμή.
2. Φθίνουσα γραμμική μετά την γωνία, διότι η παράγωγος είναι σταθερή αρνητική
3. Η τελική τιμή θα είναι θετική διότι το προσημασμένο εμβαδό είναι θετικό

▲

γ) Να υπολογιστεί στο σημείο $(x=2, y=1)$ η 1η και η 2η παράγωγος της συνάρτησης $x=x(y)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $4x+x^2+y^2=13$.

Λύση. Αφού επαληθεύσουμε ότι οι τιμές ικανοποιούν την εξίσωση, παραγωγίζουμε πλεγμένα 2 φορές **ως προς** y και **μετά** αντικαθιστούμε τις δοθείσες τιμές:

$$4x+x^2+y^2=13 \Rightarrow \begin{cases} 4x'+2xx'+2y=0 \\ 4x''+(2x'x'+2xx'')+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x'+4x'+2=0 \\ 4x''+2(x')^2+4x''+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x'+2=0 \\ 8x''+2(x')^2+2=0 \end{cases}$$

Η 1η εξίσωση δίνει: $x'=-1/4$, και στη συνέχεια η 2η εξίσωση δίνει:

$$8x''+2(x')^2+2=0 \Rightarrow 4x''=-(-1/4)^2-1 \Rightarrow x''=-\frac{17}{64}$$

▲

γ) Οι μεταβλητές $\{x,y\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $x\sqrt{y}=2$. Να βρεθεί η ελαστικότητα του y ως προς x.

Λύση. Λύνοντας ως προς y βρίσκουμε συνάρτηση δύναμη:

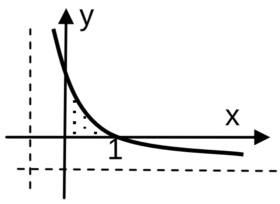
$$x\sqrt{y}=2 \Rightarrow \sqrt{y}=2/x \Rightarrow y=4/x^2 \Rightarrow y=4x^{-2} \quad \text{για } x>0$$

Επομένως η ζητούμενη ελαστικότητα είναι: $E_x y=-2$.

Δηλαδή, αν το x αυξηθεί κατά 1%, τότε (οριακά) το y θα πρέπει να μειωθεί κατά 2%, ώστε να διατηρηθεί σταθερό το μέγεθος: $x\sqrt{y}=2$

▲

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(x+1)(y+1)=2$ και των θετικών ημιαξόνων.



Λύση.

$$(x+1)(y+1)=2 \Rightarrow y=\frac{2}{x+1}-1$$

Το γράφημα είναι η υπερβολική καμπύλη $xy=1$, μετατοπισμένη κατακόρυφα **και** οριζοντίως κατά -1, οπότε έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο στο $x=-1$, και οριζόντια ασύμπτωτο στο $y=-1$. Κόβει τους δύο άξονες όπως στο σχήμα. Το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από το $x-$ολοκλήρωμα:

$$y=\frac{2}{x+1}-1 \Rightarrow E=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dy=2\ln(x+1)-x\Big|_0^1=2\ln 2-1$$

▲

2 *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε ότι το σύστημα εξισώσεων: $\{x+y=u,\ x^2-y=-v\}$ **ορίζει πλεγμένα τα** $\{x,y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{u,v\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

Λύση1. Γράφουμε τις εξισώσεις στην κανονική μορφή, και χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης με Ιακωβιανές ορίζουσες, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,u,v)=x+y-u=0 \\ g(x,y,u,v)=x^2-y+v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_v & f_y \\ g_v & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{vmatrix}}=-\frac{-1}{-1-2x}=-\frac{1}{1+2x}$$

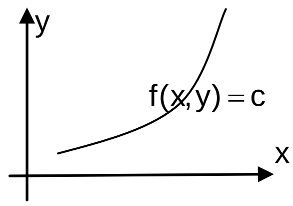
Λύση2. Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς v για σταθερό u, και λύνουμε αλγεβρικά ως προς x_v:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u \\ x^2-y=-v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_v+y_v=0 \\ 2xx_v-y_v=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_v+2xx_v=-1 \Rightarrow x_v=-\frac{1}{1+2x}$$

(Προσθέσαμε τις δύο εξισώσεις κατά μέρη για να απαλλαγούμε από το y_v)

▲

(β). Μια συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι** $x-$**αύξουσαα και έχει ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς** y **και να σκιαγραφηθεί η κάτω σταθμική περιοχή.**



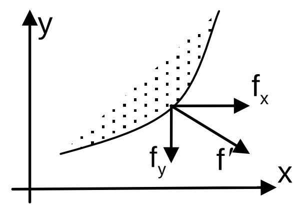
Λύση. Έχουμε $f_x>0$.

Η ισοσταθμική έχει θετική κλίση, και επομένως οι μερικές παράγωγοι θα έχουν αντίθετο πρόσημο λόγω του τύπου πλεγμένης παραγώγισης:

$$f(x,y)=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}>0 \Rightarrow \frac{f_x}{f_y}<0 \Rightarrow f_y>0$$

Επομένως η συνάρτηση είναι $y-$φθίνουσα.

Δηλαδή η συνάρτηση αυξάνει προς τα κάτω δεξιά οπότε η κάτω σταθμική θα βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση.



▲

(γ). Θεωρούμε την τετραγωνική συνάρτηση: $f(x,y)=1-6x+x^2+y^2-4xy$**. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της. Τι μορφή έχει η ισοσταθμική που διέρχεται από το στάσιμο σημείο?**

Λύση. Βρίσκουμε το στάσιμο:

$$\left.\begin{array}{l} f_x=-6+2x-4y=0 \\ f_y=2y-4x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6+2x-4y=0 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \end{array}\right\}$$

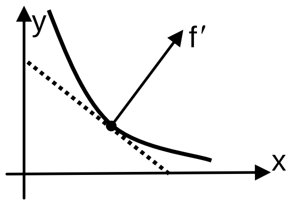
Υπολογίζουμε και τον Εσσιανό πίνακα:

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx}=2 & f_{xy}=-4 \\ f_{yx}=-4 & f_{yy}=2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=|H|=2\cdot 2-(-4)^2=-12<0$$

Συμπεραίνουμε ότι το στάσιμο δεν είναι ακρότατο. Είναι σαγματικό και η αντίστοιχη ισοσταθμική αποτελείται από δύο τεμνόμενες ευθείες.

▲

(δ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί αναλυτικά και γραφικά το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=x+y$**, με τον περιορισμό:** $g(x,y)=x^2y=4$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$**.**



Λύση. Οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} f_xg_y-f_yg_x &= x^2-2xy=0 \\ g=x^2y &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{y=1,\ x=2\}: \text{μοναδικό στάσιμο}$$

με πολλαπλασιαστή Lagrange και συνάρτηση Lagrange:

$$\lambda = f_x/g_x = 1/2xy = 1/4\,,\quad L=f+\lambda[c-g]=x+y+[4-x^2y]/4$$

Ο πλαισιωμένος εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος διότι η πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα είναι γνήσια αρνητική:

$$\tilde{\Delta}_L = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2xy & x^2 \\ 2xy & -y/2 & -x/2 \\ x^2 & -x/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1/2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4(0+4)+4(-4+2) = -24 < 0$$

Επομένως το σημείο είναι περιορισμένο γνήσιο τοπικό ελάχιστο. Από το γράφημα διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι περιορισμένο γνήσιο ολικό ελάχιστο διότι ο περιορισμός βρίσκεται στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης.

▲.

Μέρος Β

3.*(1 μονάδες)*

α) Σε μια οικονομία αυξάνει συνεχώς το εθνικό εισόδημα Y με ετήσιο ρυθμό 6%, και ο πληθυσμός L με ετήσιο ρυθμό 4%. Να βρεθεί ο ετήσιος ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν εισοδήματος $y = Y/L$ και να εκτιμηθεί σε πόσο χρόνο θα αυξηθεί κατά 50%

Λύση. Ο ποσοστιαίος (σχετικός) ρυθμός μεταβολής του λόγου ισούται με τη διαφορά των δύο ρυθμών:

$$\frac{\%dy}{dt} = \frac{\%dY}{dt} - \frac{\%dL}{dt} = 6 - 4 = 2\% \text{ ετησίως}$$

Επομένως αυξάνει εκθετικά με σχετικό ρυθμό $r = 2/100 = 0.02$:

$$y = y_0 \exp(rt) = y_0 \exp(0.02t)$$

Θα αυξηθεί κατά 50% μετά από χρόνο τ που δίνεται από την σχέση:

$$(3/2)y_0 = y_0 \exp(0.02\tau) \Rightarrow 3/2 = \exp(0.02\tau) \Rightarrow 0.02\tau = \ln(3/2) \Rightarrow \tau = 50\ln(3/2) \text{ χρόνια}$$

▲

4.*(1 μονάδες)*

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X, Y) με συνάρτηση κόστους: $C(X,Y) = 1 + \sqrt{X} + \sqrt{Y}$.

α). Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι ομογενής ή ομοθετική.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

γ). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης του εσόδου:

$$\max\{R = 2X + Y \,\|\, C = 1 + \sqrt{X} + \sqrt{Y} \le 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

Λύση.

α). Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ομογενής βαθμού 0 ενώ η συνάρτηση $\sqrt{X} + \sqrt{Y}$ είναι ομογενής βαθμού $1/2$. Επομένως η $C(X,Y)$ δεν είναι ομογενής ως άθροισμα ομογενών συναρτήσεων διαφορετικού βαθμού. Είναι όμως ομοθετική ως (αύξουσα) συνάρτηση ομογενούς:

$$C = 1 + H \quad \text{όπου: } H(X,Y) = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$$

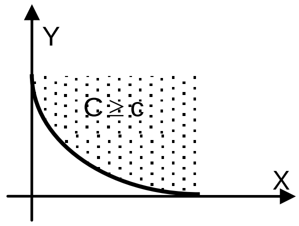
β). Προκύπτει ειδικά από την τελευταία σχέση ότι οι ισοσταθμικές της C είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της H. Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής

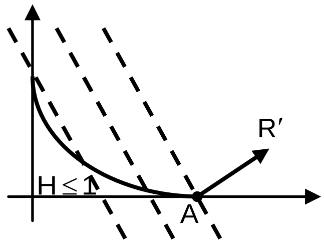
$$x^\alpha + y^\alpha \quad \text{με } \alpha < 1$$

και οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα του πρώτου από τα παρακάτω δύο γραφήματα, με τις πάνω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής C. Συμπεραίνουμε ότι, όπως και η H:

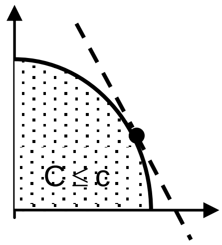
*Η C είναι οιονεί κοίλη και ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κόστους **δεν είναι κανονική** ως προς την κυρτότητα.*

γ). Τέλος όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα παρακάτω, λόγω της παραπάνω μη κανονικότητας, η λύση του προβλήματος είναι **συνοριακή** στο κάτω σύνορο $A:(X=1, Y=0)$, όπου η μεγαλύτερη ισοσταθμική της $R = 2X + Y$ συναντάει την περιοχή $C \le 2 \Rightarrow H \le 1$. Δηλαδή παράγεται **μόνο το πρώτο προιόν** που δίνει «σχετικά» μεγαλύτερο έσοδο ανά μονάδα κόστους.





Παρατήρηση. Σε αντίθεση με την παραπάνω, οι κανονικές συναρτήσεις κόστους είναι οιονεί κυρτές με αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των παραγόμενων προιόντων, όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Δηλαδή σε μια κανονική συνάρτηση κόστους ισχύουν τα εξής:



1. Οι ενδιάμεσες ποσότητες παραγωγής έχουν μικρότερο κόστος από τις ακραίες. Επομένως για ελάχιστο κόστος η λύση είναι **συνήθως** ενδιάμεση όπως στο σχήμα,
2. Για σταθερό κόστος κάθε αύξηση στην παραγωγή του ενός προιόντος απαιτεί όλο και μεγαλύτερη μείωση στην παραγωγή του άλλου.

▲

ΤΕΛΟΣ

Β Μέρος

3.*(1 μονάδες)*

Σε μια οικονομία με εθνικό εισόδημα Y, ο πληθυσμός L αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 2%. Να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$ αν το εθνικό εισόδημα Y αυξάνει με ρυθμό 3%

β) Ο ελάχιστος ρυθμός αύξησης του εθνικού εισοδήματος Y που θα επιτρέψει στο κατά κεφαλή εισόδημα $y = Y/L$ να διπλασιαστεί σε 20 χρόνια.

Λύση. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του λόγου δίνεται από την διαφορά των ποσοστιαίων ρυθμών μεταβολής των δύο όρων. Επομένως:

α) Το κατά κεφαλή εισόδημα θα μεταβάλλεται με ρυθμό $3\% - 2\% = 1\%$, δηλαδή θα αυξάνει με ετήσιο ρυθμό 1%.

β) Γενικότερα, αν το εθνικό εισόδημα αυξάνει με ρυθμό $x\%$, τότε το κατά κεφαλή εισόδημα θα αυξάνει με ρυθμό $(x-2)\%$, δηλαδή με συντελεστή:

$$r_y = (x-2)/100$$

Αν y_0 είναι το αρχικό κατά κεφαλή εισόδημα, τότε μετά από 20 χρόνια θα είναι:

$$y_{10} = y_0 e^{r_y 20}$$

οπότε θα είναι διπλάσιο του αρχικού αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$y_{10} = 2y_0 \Rightarrow y_0 e^{r_y 20} = 2y_0 \Rightarrow r_y = (\ln 2)/20$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε για το x:

$$(x-2)/100 = (\ln 2)/20 \Rightarrow x = 2 + 5\ln 2$$

Δηλαδή το εθνικό εισόδημα πρέπει να αυξάνει με ρυθμό τουλάχιστον $5\ln 2 \approx 3.5\%$ μεγαλύτερο από τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού.

▲

4.*(1 μονάδες)*

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα $Q=\sqrt{K}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος π ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{v,p\}$ και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, ομογένειας, κυρτότητας και οιονεί κυρτότητας αυτής της συνάρτησης. Να ερμηνευτούν οι παραπάνω ιδιότητες ιδιότητες, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της συνάρτησης μέγιστου κέρδους: $\pi(v,p)$.

Λύση. Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi(K)=R(K)-C(K)=pQ(K)-vK=p\sqrt{K}-vK$$

είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi'(K)=p/2\sqrt{K}-v=0\Rightarrow K^*=p^2/4v^2$$

Το μέγιστο κέρδος είναι:

$$\pi=\Pi(K^*)=p\sqrt{K^*}-vK^*=p\frac{p}{2v}-v\frac{p^2}{4v^2}=\frac{p^2}{4v}=p^2v^{-1}/4$$

Ως συνάρτηση των παραμέτρων είναι:

1. $p-$αύξουσα, $v-$φθίνουσα. Το μέγιστο κέρδος αυξάνει όταν αυξάνει η τιμή του προιόντος ή όταν μικραίνει το κόστος του συντελεστή
2. Ομογενής βαθμού 1. Αν η τιμή του προιόντος και το κόστος του συντελεστή αυξηθούν κατά το ίδιο ποσοστό, τότε το μέγιστο κέρδος θα αυξηθεί κατά το ίδιο αυτό ποσοστό.
3. $p-$κυρτή, $v-$κυρτή, $(v,p)-$κυρτή, διότι ο Εσσιανός πίνακας H_π είναι θετικά ημιορισμένος:

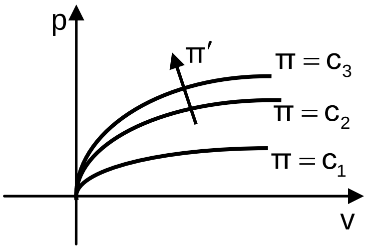
$$\{\pi_p=pv^{-1}/2,\ \pi_v=-p^2v^{-2}/4\},\ \{\pi_{pp}=v^{-1}/2,\ \pi_{vv}=p^2v^{-3}/4,\ \pi_{pv}=-pv^{-2}/2\}$$

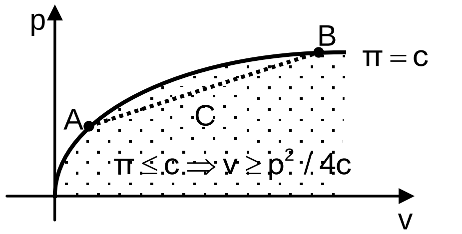
$$\Delta=\pi_{pp}\pi_{vv}-(\pi_{pv})^2=p^2v^{-4}-p^2v^{-4}=0$$

$$\Rightarrow\{\pi_{vv}>0,\ \pi_{pp}>0,\ \Delta=0\}\Rightarrow H_\pi\geq 0.$$

Καθώς η τιμή του προιόντος αυξάνει ή/και το κόστος του συντελεστή μικραίνει, το μέγιστο κέρδος αυξάνει με αύξοντα ρυθμό

4. $(v,p)-$οιονεί κυρτή, διότι είναι $(v,p)-$κυρτή. Εξάλλου οι κάτω σταθμικές περιοχές είναι κυρτές, όπως φαίνεται στο γράφημα, διότι δίνονται από το εσωτερικό παραβολών.





κάτω σταθμική: $\pi=\dfrac{p^2}{4v}\leq c\Rightarrow v$

Ακραίοι συνδυασμοί τιμής του προιόντος και κόστους του συντελεστή: $\{A,B\}$, είναι περισσότερο κερδοφόροι από ενδιάμεσους συνδυασμούς C. Έχουμε:

$\pi(A)=\pi(B)=c$, αλλά $\pi(C)<c$

Επίσης καθώς το v αυξάνει τότε για να διατηρηθεί σταθερή η κερδοφορία: $\pi=c$, θα πρέπει βέβαια και το p να αυξάνει αλλά με φθίνοντα ρυθμό, διότι:

$$\pi=\frac{p^2}{4v}=c\Rightarrow p=2\sqrt{c}\sqrt{v}$$

είναι αύξουσα κοίλη

▲

ΤΕΛΟΣ