Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$. Να γίνει το γράφημά της, και να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0=0$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)-\alpha x$ στο διάστημα: $0\le x\le 1$, με $\alpha>0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x=1$

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-2x$, στο διάστημα: $x\ge 0$. Να βρεθεί το σημείο ισοελαστικότητας, γραφικά και αναλυτικά.

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)^2 x=1$ και των θετικών ημιαξόνων.

2 *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w=w(z,t),\ z=z(x,y),\ y=y(x)\}$. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.

β) Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως.

1. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y
2. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.
3. Να γίνει το γράφημα της διανυσματικής παραγώγου.

γ) Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q=-2x^2-y^2+xy$, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή: $\tilde{Q}=\{-2x^2-y^2+xy \,||\, 2x-y=0\}$, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.

δ) Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης $\max\{(x+y)^2 \,||\, x^2+y^2=c\}$ έχει την λύση:

$$x^*=\sqrt{c/2},\ y^*=\sqrt{c/2}$$

Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

3 *(1 μονάδα)*

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E=QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon=-2$. Να εκτιμηθούν:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης

β) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου

γ) Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0=100$.

4 *(1 μονάδα)*

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C=X+Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V=2-X$ και $W=4-Y$ αντίστοιχα, όπου $\{W,V\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y)=VX+WY-C(X,Y)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος:

1. στην περίπτωση που επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών,
2. στην περίπτωση που επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

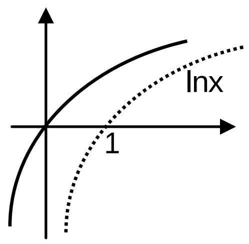
Πότε θα είναι το κέρδος μεγαλύτερο?

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 *(4 μονάδες)*



α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$**. Να γίνει το γράφημα, και:**

1. Να βρεθεί η γραμμική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0=0$

2. Να βρεθεί και η παραβολική της προσέγγιση στο ίδιο σημείο: $x_0=0$

<u>Λύση</u> Το γράφημά της $\ln(x+1)=\ln(x-(-1))$ είναι αυτό της $\ln x$

Μετατοπισμένο οριζοντίως κατά -1, δηλαδή κατά 1 προς τα αριστερά, οπότε διέρχεται από την αρχή του συστήματος. Έχουμε:

$$f(x)=\ln(x+1)\big|_{x=0}=\ln 1=0,\quad f'(x)=1/(x+1)\big|_{x=0}=1,\quad f''(x)=-1/(x+1)^2\big|_{x=0}=-1$$

1. $f_{\gamma\rho}(x)=f(0)+f'(0)x=0+1x=x$

2. $f_{\pi\alpha\rho}(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2=0+1x-\dfrac{1}{2}x^2=x-\dfrac{1}{2}x^2$

▲

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)-\alpha x$ **στο διάστημα:** $0\le x\le 1$**, με** $\alpha>0$**. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη, και να βρεθούν οι τιμές του** α **για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο δεξιό σύνορο:** $x=1$

<u>Λύση</u> Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $\ln(1+x)$ και της κοίλης γραμμικής: $-\alpha x$.

Εναλλακτικά, είναι κοίλη διότι η 2η παράγωγος είναι αρνητική:

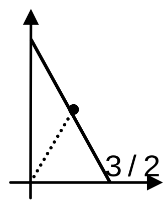
$$f(x)=\ln(1+x)-\alpha x\Rightarrow f'(x)=1/(1+x)-\alpha\Rightarrow f''(x)=-1/(1+x)^2<0$$

Ως κοίλη, θα έχει μέγιστο στο δεξιό σύνορο: $x=1\Leftrightarrow$ **ικανοποιεί:**

$$f'(1)\ge 0\Rightarrow 1/(1+1)-\alpha\ge 0\Rightarrow \alpha\le 1/2$$

▲

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-2x$**, στο διάστημα:** $x\ge 0$**. Να βρεθεί το σημείο ισοελαστικότητας, γραφικά και αναλυτικά.**



Λύση Είναι φθίνουσα συνάρτηση με σημείο ισοελαστικότητας

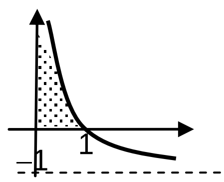
$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=-1\Rightarrow\frac{x(-2)}{3-2x}=-1\Rightarrow -2x=-3+2x\Rightarrow x=3/4$$

Γεωμετρικά βρίσκεται στο ενδιάμεσο σημείο του διαστήματος όπου **η ακτίνα και η εφαπτομένη έχουν την ίδια απόλυτη κλίση.**

▲

δ) Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)^2x=1$ **και των θετικών ημιαξόνων.**

<u>Λύση1</u> Η καμπύλη είναι υπερβολική με μετατόπιση προς τα κάτω κατά 1:



$$(y+1)^2x=1\Rightarrow(y+1)^2=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$$

Το εμβαδό δίνεται από το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1(x^{-1/2}-1)dx=2x^{1/2}\Big|_{x=0}^{1}-x\Big|_{x=0}^{1}\to[2-0]-[1-0]=1$$

<u>Λύση2</u> Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε ως προς x και να ολοκληρώσουμε ως προς y:

$$(y+1)^2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{(y+1)^2}$$

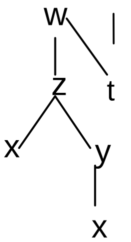
$$E=\int_0^{+\infty}(y+1)^{-2}dy=-(1+y)^{-1}\Big|_{y=0}^{+\infty}\to[-0]-[-1]=1$$

▲

2 *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε τη σύνθεση συναρτήσεων: $\{w = w(z,t),\ z = z(x,y),\ y = y(x)\}$ **. Να δοθεί το δέντρο εξάρτησης, και να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης.**

<u>**Λύση**</u> $\{w = w(z,t),\ z = z(x,y),\ y = y(x)\} \Rightarrow w = w(z(x,y(x)),y(x),t) = w(x,t)$



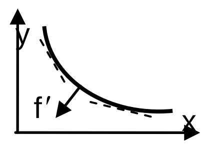
Έχουμε τελικά δύο ανεξάρτητες μεταβλητές:

1. Την x, με δύο διαδρομές και επομένως μερική παράγωγο με δύο προσθετικούς όρους
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad w_x(x,t) = w_z(z,t)z_x(x,y) + w_z(z,t)z_y(x,y)y'(x)$$
2. Την t, με μια διαδρομή και επομένως μερική παράγωγο με έναν προσθετικό όρο:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{ή} \quad w_t(x,t) = w_t(z,t)$$

Παρατήρηση. Διακρίνουμε τις δύο διαφορετικές συναρτήσεις, την αρχική $w(z,t)$ και την τελική που προκύπτει ως σύνθεση μετά τις αντικαταστάσεις: $w(x,t)$

▲

β) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$φθίνουσα, με ισοσταθμικές όπως στο σχήμα παραπλεύρως.



1. Να προσδιοριστεί η μονοτονία της ως προς y

2. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x.

3. Να γίνει το γράφημα της διανυσματικής παραγώγου.

<u>**Λύση**</u> Οι ισοσταθμικές: $f(x,y) = c$ έχουν αρνητική κλίση και επομένως οι μερικές παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο, σύμφωνα με τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} < 0 \Rightarrow \frac{f_x}{f_y} > 0$$
Δίνεται $f_x < 0$, οπότε θα έχουμε και $f_y < 0$, δηλαδή η f είναι επίσης $y-$φθίνουσα, όπως φαίνεται και από την κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου f' στο σχήμα.
Από το σχήμα επίσης διαπιστώνουμε ότι καθώς το x αυξάνει η **κλίση της ισοσταθμικής** είναι φθίνουσα στο μέτρο: $|y'(x)|\downarrow$, και επομένως η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Εξάλλου ικανοποιείται και το αναλυτικό κριτήριο ότι τα $\{y', y''\}$ έχουν αντίθετο πρόσημο: $\{y' < 0,\ y'' > 0\}$.

▲

γ) Να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η τετραγωνική μορφή: $Q = -2x^2 - y^2 + xy$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας. Επίσης να χαρακτηριστεί ως προς το πρόσημο η περιορισμένη τετραγωνική μορφή:** $\tilde{Q} = \{-2x^2 - y^2 + xy \,||\, 2x - y = 0\}$**, και να δοθεί ο αντίστοιχος πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας.**

<u>**Λύση**</u> Η τετραγωνική μορφή έχει τα χαρακτηριστικά:
$$Q = \alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\beta xy \Rightarrow \{\alpha = -2 < 0,\ \gamma = -1 < 0\},\ \beta = 1/2, \{\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 2 - 1/4 = 7/4 > 0\}$$
Συμπεραίνουμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή έχει γνήσια αρνητικές τιμές για όλα τα $(x,y) \neq (0,0)$.

Κάθε περιορισμός της θα είναι επίσης αρνητικά ορισμένος, και επομένως η δοθείσα περιορισμένη τετραγωνική μορφή θα είναι επίσης αρνητικά ορισμένη.
Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε από τον περιορισμό, βρίσκουμε:
$$\{2x - y = 0:\ y = 2x\} \Rightarrow Q = -2x^2 - (2x)^2 + x(2x) = -4x^2 < 0$$
Οι αντίστοιχοι συμμετρικοί πίνακες είναι:

$$S=\begin{pmatrix}-2 & 1/2\\ 1/2 & -1\end{pmatrix},\ \tilde{S}=\left(\begin{array}{c|cc}0 & 2 & -1\\ \hline 2 & -2 & 1/2\\ -1 & 1/2 & -1\end{array}\right)\ \ \textbf{με}\ \ \tilde{\Delta}=\left|\tilde{S}\right|=-2(2-1/4)-1(1-2)=11/2>0$$

▲

δ) Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης $\max\{(x+y)^2 \,\|\, x^2+y^2=c\}$ **έχει την λύση:**

$x^* = \sqrt{c/2},\ y^* = \sqrt{c/2}$

Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

<u>Λύση</u> Όλα θα είναι συναρτήσεις της παραμέτρου c . Ο πολλαπλασιαστής ως συνάρτηση του c, δίνεται από την σχέση:

$\lambda=\dfrac{f_x}{g_x}=\dfrac{2(x^*+y^*)}{2x^*}=2$ ή ισοδύναμα: $\lambda=\dfrac{f_y}{g_y}=\dfrac{2(x^*+y^*)}{2y^*}=2$, σταθερός

Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ως συνάρτηση του c είναι:

$f^*(c)=(x^*+y^*)^2=(2\sqrt{c/2})^2=2c$

Επαληθεύεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης μέγιστης τιμής ισούται με τον πολλαπλασιαστή:

$f^{*\prime}(c)=(2c)'=2=\lambda$

Δηλαδή, αν αυξήσουμε το c κατά 1 μονάδα, η μέγιστη τιμή θα αυξηθεί κατά 2 μονάδες, **οριακά.**

3 *(1 μονάδα)*

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E=QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon=-2$. Να εκτιμηθούν:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης

β) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου

γ) Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0=100$.

<u>Λύση</u> Εφόσον οι ρυθμοί είναι **ποσοστιαίοι (σχετικοί)**, βρίσκουμε:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ζήτησης ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με τον ρυθμό μεταβολής της τιμής που είναι -1%:

$\{Q=Q(P),\ P=P(t)\}\Rightarrow \dfrac{\%dQ}{dt}=\dfrac{\%dQ}{\%dP}\dfrac{\%dP}{dt}=(-2)(-1\%)=2\%$, αυξάνει

β) Ο ρυθμός μεταβολής του εσόδου: $E=PQ$ ισούται με το άθροισμα των ρυθμών μεταβολής των όρων:

$\dfrac{\%dE}{dt}=\dfrac{\%dQ}{dt}+\dfrac{\%dP}{dt}=2-1=1\%$

Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο αυξάνει με ρυθμό 1% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r=0.01$. Επομένως το έσοδο μετά από 10 έτη θα είναι:

$E=E_0e^{rt}=100e^{(0.01)10}=100e^{0.1}\approx 100[1+(0.1)+(0.1)^2/2]=110.5$

Στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού.

▲

4 *(1 μονάδα)*

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ **αντίστοιχα, με συνολικό κόστος** $C = X + Y$**, και εξισώσεις ζήτησης:** $V = 2 - X$ **και** $W = 4 - Y$ **αντίστοιχα, όπου** $\{W, V\}$ **είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:** $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$**.**

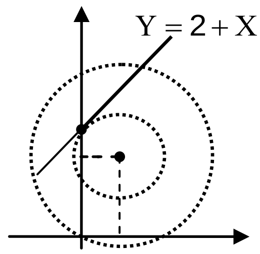
α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος:

1. στην περίπτωση που επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών,

2. στην περίπτωση που επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

Πότε θα είναι το κέρδος μεγαλύτερο?



<u>Λύση</u>

α) $\Pi = (2 - X)X + (4 - Y)Y - (X + Y) = X + 3Y - X^2 - Y^2$

Είναι παραβολική συνάρτηση με κυκλικές ισοσταθμικές που έχουν όλες το κέντρο τους στο στάσιμο σημείο:

$\Pi_X = 1 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1/2$

$\Pi_Y = 3 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 3/2$

Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή. Το κέντρο μπορεί να βρεθεί και με συμπλήρωση τετραγώνων. Η συνάρτηση κέρδους είναι **παραβολική κοίλη**.

$$\Pi = -(X^2 - X) - (Y^2 - 3Y) = -[X^2 - 2(1/2)X + 1/4 - 1/4] - [Y^2 - 3(3/2)Y + 9/4 - 9/4]$$
$$= 10/4 - (X - 1/2)^2 - (Y - 3/2)^2$$

β1) Αν επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών τότε το μέγιστο κέρδος βρίσκεται στο παραπάνω στάσιμο (εφόσον βρίσκεται στην θετική περιοχή), που μας δίνει και την βέλτιστη κατανάλωση, για μέγιστο κέρδος:

$$\max\{\Pi = X + 3Y - X^2 - Y^2 \,||\, X \ge 0, Y \ge 0\} \Rightarrow \{x = 1/2,\ y = 3/2\}.$$

Οι αντίστοιχες βέλτιστες μοναδιαίες τιμές για μέγιστο κέρδος, είναι:

$$\{v = 2 - 1/2 = 3/2,\ w = 4 - 3/2 = 5/2\}$$

β2). Αν δεν επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών, τότε θα έχουμε τον περιορισμό:

$$V = W \Rightarrow 2 - X = 4 - Y \Rightarrow Y = 2 + X$$

Αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε κέρδος:

$$\Pi = X + 3(2 + X) - X^2 - (2 + X)^2 = 2 - 2X^2$$

με μέγιστο στο $\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{y} = 2 + 0 = 2$, και την ενιαία τιμή:

$$\tilde{v} = 2 - 0 = 2,\ \tilde{w} = 4 - 2 = 2$$

Δηλαδή στην πράξη το προιόν **διατίθεται μόνο στη δεύτερη αγορά** με την παραπάνω τιμή.

Παρατήρηση. Το κέρδος θα είναι μικρότερο όταν επιβάλλεται ενιαία τιμή, διότι **κάθε περιορισμός μικραίνει το μέγιστο της συνάρτησης κέρδους**. Πράγματι, έχουμε μέγιστα κέρδη αντίστοιχα:

$$\pi = r - c = \left(\frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{5}{2}\right) - 2 = 4.5 - 2 = 2.5, \qquad \tilde{\pi} = \tilde{r} - \tilde{c} = (0 \cdot 2 + 2 \cdot 2) - 2 = 2$$

ΤΕΛΟΣ