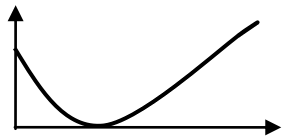
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι.
διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)



α) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα. Να γίνει το γράφημά της $f(x)$ με $f(0)=0$

β) Στο επίπεδο των (x,y) θεωρούμε τα δύο σημεία $A_0:(x_0=1, y_0=2)$, $A_1:(x_1=3, y_1=8)$

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία
2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στα 2/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px-\sqrt{x}$ για $0\le x\le 2$, με $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη
2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο $x=2$

δ) Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)=\min\{x,x^{-3/2}\}$ για $x\ge 0$, και του $x-$άξονα.

2. (4 μονάδες)

α) Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση στο σημείο (0,0) της συνάρτησης:

$$f(x,y)=(1+x)^2(1+y)$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=4x^{3/4}y^{1/4}$

1. Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής
2. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της αν τα $\{x,y\}$ ελαττωθούν αμφότερα κατά 2%.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=\alpha xy+\beta x+\gamma y$ με $\alpha\neq 0$. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της

δ) Το περιορισμένο στάσιμο της συνάρτησης $f=x^2+y^2$ με τον περιορισμό $g=2x+y=5$, είναι $(x=2,y=1)$. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής και να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

3. (1 μονάδα)

Θεωρούμε την συνάρτηση κόστους: $C=3Q-Q^2+Q^3/3$

1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να γίνουν τα γραφήματα του μέσου κόστους, του μέσου μεταβλητού, και του οριακού κόστους

4.(1 μονάδα)

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$$\min\{C=vK+wL \,||\, Q=\sqrt{K}+\sqrt{L}=q\}$$

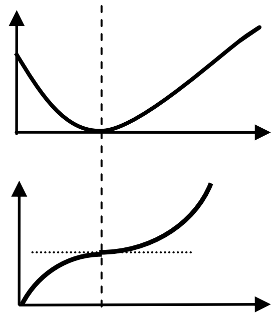
όπου $\{v,w\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας: $\{K,L\}$ αντίστοιχα.

1. Να γίνουν το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής.
2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K^*/L^* εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v/w, και ότι η αντίστοιχη εξάρτηση είναι φθίνουσα ελαστική.

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι.
διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)
Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα. Να γίνει το γράφημά της** $f(x)$ **με** $f(0)=0$



Λύση Η παράγωγος είναι γνήσια θετική εκτός ενός σημείου όπου είναι μηδενική και επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα. Στην αρχή κοίλη όπου η παράγωγος είναι φθίνουσα, και στη συνέχεια κυρτή όπου η παράγωγος είναι αύξουσα. Στο ελάχιστο της παραγώγου η συνάρτηση έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη διότι η παράγωγος είναι μηδενική.

▲

β) Στο επίπεδο των (x,y) **θεωρούμε τα δύο σημεία** $A_0:(x_0=1,\ y_0=2)$**,** $A_1:(x_1=3,\ y_1=8)$
1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία
2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στα 2/3 της απόστασης από το A_0 **στο** A_1
Λύση *(test A2, άσκηση11),(φροντιστήριο Α1, άσκηση 8)*

1. Η εξίσωση της ευθείας είναι: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\Rightarrow\frac{y-2}{x-1}=\frac{8-2}{3-1}\Rightarrow y-2=3(x-1)\Rightarrow 3x-y=1$

2. Το σημείο στα 2/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1, θα είναι ο συνδυασμός τους με συντελεστές:

$$(s_0=1/3,\ s_1=2/3)$$

Επομένως θα έχει τις συντεταγμένες:

$$x_{2/3}=s_0x_0+s_1x_1=\frac{1}{3}1+\frac{2}{3}3=\frac{7}{3},\quad y_{2/3}=s_0y_0+s_1y_1=\frac{1}{3}2+\frac{2}{3}8=\frac{18}{3}=6,$$

που ικανοποιούν την εξίσωση

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px-\sqrt{x}$ **για** $0\le x\le 2$
1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη
2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x=2$
Λύση *(testA2 άσκηση 2),*

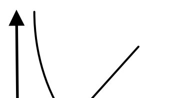
1. Η συνάρτηση είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής $-\sqrt{x}$ (αρνητική κοίλης) και της γραμμικής px. Εξάλλου, η 2η παράγωγος είναι θετική:

$$f(x)=px-x^{1/2}\Rightarrow f'(x)=p-\frac{1}{2}x^{-1/2},\ f''(x)=\frac{1}{4}x^{-3/2}>0$$

2. Το μέγιστο κυρτής είναι οπωσδήποτε συνοριακό: $\{0 \text{ ή } 2\}$. (Το στάσιμο, αν υπάρχει, είναι ελάχιστο) . Θα βρίσκεται στο δεξιό σύνορο $x=2\Leftrightarrow\ f(2)\ge f(0)\Rightarrow p2-\sqrt{2}\ge 0\Rightarrow p\ge\sqrt{2}/2$.

▲

δ) Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)=\min\{x,x^{-3/2}\}$ **για** $x\ge 0$**, και του** $x-$**άξονα.**
Λύση *(testA2, άσκηση17)*



Τέμνονται στο: $x=x^{-3/2}\Rightarrow x=1$

1. $f(x)=\begin{cases}x & \text{αν}\quad 0\le x\le 1\\ x^{-3/2} & \text{αν}\quad x\ge 1\end{cases}$

2. $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^{+\infty}x^{-3/2}dx=x^2/2\Big|_0^1-2x^{-1/2}\Big|_1^{\infty}=1/2-(0-2)=2.5$

▲

2. (4 μονάδες)

α) Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση στο σημείο (0,0) της συνάρτησης:

$$f(x,y) = (1+x)^2(1+y)$$

Λύση1. *(φροντιστήριο Β1, άσκηση4)*

$$f(x,y) = (1+x)^2(1+y) \Rightarrow f_x = 2(1+x)(1+y),\ f_y = (1+x)^2$$

$\{f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=2,\ f_y(0,0)=1\} \Rightarrow f_{\gamma\rho} = 1+2x+y$, είναι η γραμμική προσέγγιση

Λύση2. Εφόσον είναι πολυώνυμο, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις των (x,y), και κρατάμε μόνο τους όρους μέχρι 1$^{\eta\varsigma}$ τάξης:

$$f(x,y) = (1+x)^2(1+y) = (1+2x+x^2)(1+y) = 1+2x+x^2+y+2xy+x^2y \approx 1+2x+y$$

▲

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = 4x^{3/4}y^{1/4}$

1. Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής

2. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της αν τα $\{x,y\}$ ελαττωθούν αμφότερα κατά 2%.

Λύση. Είναι συνάρτηση Cobb-Douglas και επομένως ομογενής βαθμού ίσου με το άθροισμα των εκθετών, που είναι και η ελαστικότητα κλίμακας:

$$\varepsilon_r = (3/4) + (1/4) = 1$$

Είναι σταθερής απόδοσης κλίμακας και επομένως η τιμή της θα μεταβληθεί οριακά κατά το ίδιο ποσοστό, δηλαδή θα ελαττωθεί κατά 2%:

$$\%df = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\%dx) = \varepsilon_r(\%dx) = 1(-2\%) = -2\%$$

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y$ **με** $\alpha \neq 0$**. Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο σημείο της**

Λύση. *(Βιβλίο, κεφ2γ.3, σελ205)*

$$f(x,y) = \alpha xy + \beta x + \gamma y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x = \alpha y + \beta = 0 \\ f_y = \alpha x + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\gamma/\alpha \\ y = -\beta/\alpha \end{array}\right\},$$

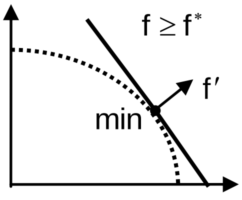
Στάσιμο, με εσσιανό πίνακα αόριστο διότι έχει ορίζουσα αρνητική:

$$\Delta = |H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2 < 0$$

Επομένως το στάσιμο σημείο είναι σαγματικό και ειδικά δεν είναι ακρότατο.

▲

δ) Το περιορισμένο στάσιμο της συνάρτησης $f = x^2 + y^2$ **με τον περιορισμό** $g = 2x + y = 5$**, είναι** $(x=2, y=1)$**. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής και να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.**



Λύση. (*testB2, άσκηση 4)*

Για τον πολλαπλασιαστή βρίσκουμε: $\lambda = f_x / g_x = 2x/2\big|_{x=2} = 2$

Ο γραμμικός περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης f και επομένως η λύση δίνει *περιορισμένο γνήσιο ολικό ελάχιστο.* Για τον αναλυτικό χαρακτηρισμό υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης Lagrange:

$$L = f + \lambda(c-g) = x^2 + y^2 + \lambda(5-2x-y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_x = 2x - 2\lambda \\ L_y = 2y - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} L_{xx} = 2 & L_{xy} = 0 \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = 2 \end{array}\right\}$$

$$\tilde{H}_L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad |\tilde{H}_L| = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(4) + 1(-2) = -10 < 0,$$

Είναι αρνητική και επομένως το σημείο είναι *περιορισμένο γνήσιο τοπικό ελάχιστο.* ▲

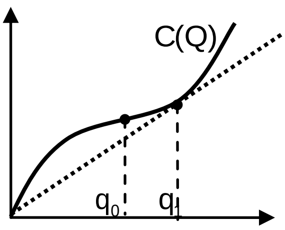
3. (1 μονάδα)

Θεωρούμε την συνάρτηση κόστους: $C = 3Q - Q^2 + Q^3 / 3$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να γίνουν τα γραφήματα του μέσου κόστους, του μέσου μεταβλητού, και του οριακού κόστους

Λύση *(E1),(efarmogesA, ομάδα III)*



1. Γράφημα. Είναι κλασσική συνάρτηση κόστους, πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, γνήσια αύξουσα, χωρίς στάσιμα σημεία:

$$C = 3Q - Q^2 + Q^3 / 3 \Rightarrow C' = C = 3 - 2Q^2 + Q^3 > 0,$$

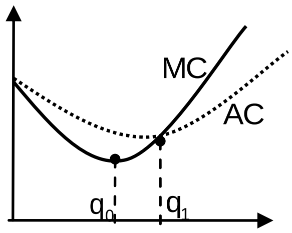
διότι η διακρίνουσα είναι αρνητική. Έχει το σημείο καμπής:

$$C'' = -2 + 2Q = 0 \Rightarrow q_0 = 1$$

Είναι κοίλη πριν, και κυρτή μετά

2. Μέσο κόστος. Δεν έχει σταθερό κόστος, οπότε το μέσο συμπίπτει με το μέσο μεταβλητό:

$$AC = C(Q) / Q = 3 - Q + Q^2 / 3$$



Είναι παραβολική, φθίνουσα μέχρι το q_1 και μετά αύξουσα. Αρχίζει με $AC(0) = 3$, και έχει ελάχιστο στο:

$$AC' = -1 + 2Q / 3 \Rightarrow q_1 = 3 / 2$$

3.Οριακό κόστος. Είναι φθίνον μέχρι το σημείο καμπής $q_0 = 1$, και μετά αύξον. Κόβει το μέσο κόστος στο ελάχιστό του από κάτω προς τα πάνω. Το μέσο κόστος είναι φθίνον όταν το οριακό είναι μικρότερο, γίνεται αύξον όταν το οριακό είναι μεγαλύτερο

▲

4.(1 μονάδα)

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$$\min\{C = vK + wL \,||\, Q = \sqrt{K} + \sqrt{L} = q\}$$

όπου $\{v, w\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας:** $\{K, L\}$ **αντίστοιχα.**

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπύλων ισοπαραγωγής.

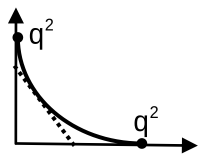
2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K^* / L^* **εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v / w**, και ότι η αντίστοιχη εξάρτηση είναι φθίνουσα ελαστική.**

Λύση. *(efarmoges B, άσκηση5)*

1. Οι συγκεκριμένες καμπύλες ισοπαραγωγής έχουν την γνωστή μορφή του παρακάτω σχήματος. Ειδικότερα κόβουν τους δύο άξονες εφαπτομενικά.

2. Γραφικά διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι εσωτερική, οπότε θα ικανοποιεί:

$$\frac{C_K}{C_L} = \frac{Q_K}{Q_L} \Rightarrow \frac{v}{w} = \frac{K^{-1/2} / 2}{L^{-1/2} / 2} \Rightarrow \left(\frac{K}{L}\right)^{-1/2} = \frac{v}{w} \Rightarrow \frac{K}{L} = \left(\frac{v}{w}\right)^{-2}$$



Βρήκαμε ότι ο βέλτιστος λόγος συμμετοχής των συντελεστών εξαρτάται μόνο από τον λόγο των αντίστοιχων μοναδιαίων τιμών, με ελαστικότητα -2. Συμπεραίνουμε ότι η εξάρτηση του λόγου συμμετοχής των συντελεστών από τον λόγο τιμών είναι φθίνουσα ελαστική, όπου αύξηση του λόγου τιμών κατά 1% θα προκαλέσει μεγαλύτερη μείωση στο λόγο συμμετοχής των συντελεστών κατά 2%.

ΤΕΛΟΣ