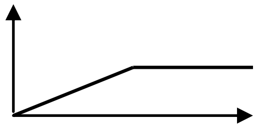
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. Κατατακτήριες **13/12/21**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)



(α). Η συνάρτηση $f(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν τα γραφήματα των συναρτήσεων μέσης τιμής: $Af(x) = f(x)/x$ και οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - x^2$, στο διάστημα: $x \geq 0$. Να βρεθεί το σημείο ισοελαστικότητας, γραφικά και αναλυτικά.

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) - 2x$, στο διάστημα $x \geq 0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.

(δ). Να βρεθεί το όριο της παράστασης: xe^{-x} όταν $x \to +\infty$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

2. (4 μονάδες)

(α). Οι εξισώσεις: $\{xy^2 = s,\ 2x + y = t\}$ ορίζουν πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{s, t\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς t χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.

(β). Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι $x-$αύξουσα και $y-$φθίνουσα. Να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική της στη θετική περιοχή. Να γίνει το ίδιο αν είναι επιπλέον γνωστό ότι ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης/αντιστάθμισης.

(γ). Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x, y) = x/(x+y)$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, και να διατυπωθεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.

(δ). Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά, στη θετική περιοχή: $x \geq 0, y \geq 0$, η λύση (x^*, y^*) των προβλημάτων βελτιστοποίησης:

$$\max\{f(x,y) = x^2y \,\|\, g(x,y) = x + y \leq 4\},\quad \max\{h(x,y) = x^{1/2}y^{1/4} \,\|\, g(x,y) = x + y \leq 4\}.$$

3.(1 μονάδα)

(α). Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y, σύμφωνα με την σχέση: $Q = P^{-2}Y$. Αν η τιμή αυξηθεί κατά 2%, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το εισόδημα ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

(β). Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή ελαττωθεί κατά 4% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική μεταβολή θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

4. (1 μονάδα)

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K, L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q = KL$, και με κόστος $C = vK + wL$. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι p

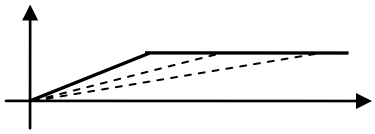
ΤΕΛΟΣ

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θεωρία

1. (4 μονάδες)

(α). Η συνάρτηση $f(x)$ έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν τα γραφήματα των συναρτήσεων, μέσης τιμής: $Af(x) = f(x)/x$ και οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$



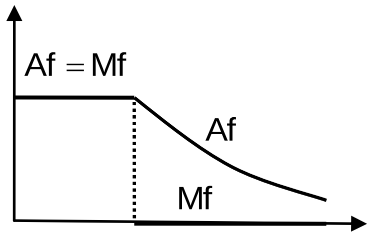
Λύση. Σε κάθε σημείο, η οριακή τιμή δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης και η μέση από την κλίση της ακτίνας. Μέχρι την γωνία η οριακή τιμή είναι σταθερή και συμπίπτει με την μέση τιμή, διότι η εφαπτομένη συμπίπτει με την ακτίνα. Στη συνέχεια η οριακή τιμή γίνεται απότομα μηδενική ενώ η μέση μειώνεται **συνεχώς** διότι η κλίση της ακτίνας μικραίνει. Ειδικότερα:

1. Μέχρι την γωνία, έχουμε:

$$f(x) = \alpha x \Rightarrow \begin{cases} Af(x) = f(x)/x = \alpha \\ Mf(x) = f'(x) = \alpha \end{cases}$$

2. Μετά την γωνία, έχουμε:

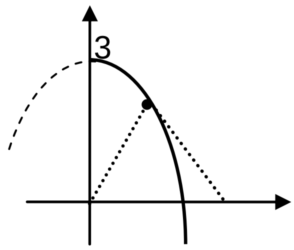
$$f(x) = \beta \Rightarrow \begin{cases} Af(x) = f(x)/x = \beta/x \to 0 \text{ , όταν } x \to +\infty \\ Mf(x) = f'(x) = 0 \end{cases}$$



▲

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - x^2$, στο διάστημα: $x \geq 0$. Να βρεθεί το σημείο ισοελαστικότητας, γραφικά και αναλυτικά.

Λύση. Το γράφημα είναι μια ανεστραμμένη παραβολή, υψωμένη κατά 3. Το σημείο ισοελαστικότητας βρίσκεται στο σημείο όπου η ακτίνα και η εφαπτομένη έχουν την ίδια **απόλυτη** κλίση.



Είναι **φθίνουσα** συνάρτηση με σημείο ισοελαστικότητας

$$\varepsilon = \frac{xf'(x)}{f(x)} = -1: \quad \frac{xf'(x)}{f(x)} = -1 \Rightarrow \frac{x(-2x)}{3 - x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = 1$$

Επομένως έχουμε ισοελαστικότητα όταν $x = 1$, διότι $x \geq 0$.

Παρατήρηση. Η άλλη επιλογή: $\varepsilon = +1$: δεν δίνει λύση.

▲

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x) - 2x$, στο διάστημα $x \geq 0$. Να διαπιστωθεί ότι είναι κοίλη και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της.

Λύση. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης $\ln(1 + x)$ και της γραμμικής $-2x$. Εξάλλου, η δεύτερη παράγωγος είναι (γνήσια) αρνητική: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 2$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1 + x)^2} < 0$.

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού. Το μέγιστο θα είναι:

1. στάσιμο: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \geq 0$, δεν ικανοποιείται.
2. αριστερό σύνορο: $x = 0$ με $f'(0) = 1 - 2 = -1 \leq 0$, ικανοποιείται.

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο $x^* = 0$, με μέγιστη τιμή $f^* = \ln(1 + 0) - 0 = 0$.

▲

(δ). Να βρεθεί το όριο της παράστασης: xe^{-x} όταν $x \to +\infty$ **και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:** $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Λύση. Ο κανόνας L' Hopital μας δίνει: $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \sim \dfrac{1}{e^x} \to \dfrac{1}{\infty} = 0$, όταν $x \to +\infty$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε: $\{f(x) = x, g'(x) = e^{-x}\} \Rightarrow \{f'(x) = 1, g(x) = -e^{-x}\}$

$$\left\{\int_\alpha^\beta f \cdot g' = f \cdot g\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f' \cdot g\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = -(0 - 0) + (-e^{-x}\Big|_0^\infty) = 1$$

▲

2 (4 μονάδες)

(α). Οι εξισώσεις: $\{xy^2 = s,\ 2x + y = t\}$ ορίζουν πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{s, t\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς t χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.

<u>Λύση1.</u> Με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,s,t) &= xy^2 - s = 0 \\ g(x,y,s,t) &= 2x + y - t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\begin{vmatrix} f_t & f_y \\ g_t & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2xy \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2xy}{y^2 - 4xy}$$

<u>Λύση2.</u> Με πλεγμένη παραγώγιση, ως προς t, για σταθερό s, απαλείφοντας το y_t

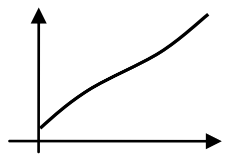
$$\left.\begin{aligned} xy^2 &= s \\ 2x + y &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_t y^2 + x2yy_t &= 0 \\ 2x_t + y_t &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_t y^2 + x2yy_t &= 0 \\ y_t &= 1 - 2x_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_t y^2 + x2y(1 - 2x_t) = 0 \Rightarrow x_t = -\frac{2xy}{y^2 - 4xy}$$

▲

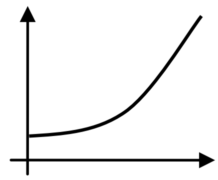
(β). Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι $x-$αύξουσα και $y-$φθίνουσα. Να σκιαγραφηθεί μια ισοσταθμική της στη θετική περιοχή. Να γίνει το ίδιο αν είναι επιπλέον γνωστό ότι ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης/αντιστάθμιση.

<u>Λύση.</u> Οι ισοσταθμικές θα έχουν κλίση θετική όπως π.χ. στο πρώτο γράφημα.

$$f(x,y) = c \Rightarrow y = y(x) \ \text{ με } \ \{f_x > 0,\ f_y < 0\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} > 0$$



Αν επιπλέον ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης/αντιστάθμισης, τότε το μέτρο του ρυθμού υποκατάστασης: $|dy/dx|$, δηλαδή το μέτρο της κλίσης της ισοσταθμικής, θα αυξάνει με το x, όπως στο δεύτερο γράφημα. Εναλλακτικά, σαυτή την περίπτωση οι παράγωγοι $\{y', y''\}$ θα έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε θα είναι αμφότεροι θετικοί, και η συνάρτηση υποκατάστασης/αντιστάθμισης που ορίζεται πλεγμένα από την ισοσταθμική: $f(x,y) = c \Rightarrow y = y(x)$, θα είναι αύξουσα κυρτή.



▲

(γ). Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y) = x/(x+y)$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, και να διατυπωθεί (μόνο) η αντίστοιχη εξίσωση Euler.

<u>Λύση</u>. Η συνάρτηση είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, διότι είναι συνάρτηση του λόγου των συντεταγμένων: y/x, όπως βρίσκουμε διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x:

$$f = \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1 + y/x}.\ \text{ Εξάλλου ικανοποιεί: } f(tx, ty) = \frac{tx}{tx + ty} = \frac{x}{x+y} = f(x,y)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler είναι: $xf_x + yf_y = 0$

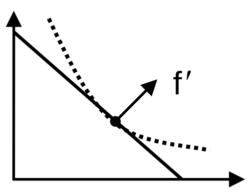
▲

(δ). Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά, στη θετική περιοχή: $x \ge 0, y \ge 0$, η λύση (x^*, y^*) των προβλημάτων βελτιστοποίησης:

$$\max\{f(x,y) = x^2 y \,||\, g(x,y) = x + y \le 4\},\ \ \max\{h(x,y) = x^{1/2} y^{1/4} \,||\, g(x,y) = x + y \le 4\}.$$

<u>Λύση.</u> Τα δύο προβλήματα έχουν την **ίδια λύση**, διότι η κάθε αντικειμενική συνάρτηση είναι αύξων μετασχηματισμός της άλλης:

$$h = f^{1/4},\ f = h^{2,}\ \text{ με } \ h \ge 0$$



Στο πρώτο πρόβλημα, η αντικειμενική συνάρτηση είναι αύξουσα, επομένως η λύση θα βρίσκεται στην ευθεία του ισοτικού περιορισμού:

$$\max\{f(x,y) = x^2 y \,||\, g(x,y) = x + y = 4\} \ \text{ με } \ x \ge 0,\ y \ge 0$$

Ειδικότερα είναι τύπου C-D με υπερβολικές ισοσταθμικές που δίνουν **εσωτερική** λύση, όπως στο γράφημα. Ο περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην κάτω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης, οπότε έχουμε γνήσιο περιορισμένο **ολικό** μέγιστο.

<u>Λύση1.</u> Η λύση δίνεται από τις εξισώσεις Lagrange, ή ισοδύναμα από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\begin{array}{l} f_x / g_y = f_y / g_x \\ g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2xy = x^2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^* = \frac{8}{3}, y^* = \frac{4}{3}$$

Το σύστημα έχει και την μηδενική λύση: $(x = 0, y = 4\}$, η οποία όμως είναι συνοριακή και απορρίπτεται. Για τον χαρακτηρισμό της λύσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της πλαισιωμένης Εσσιανής, με συνάρτηση Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f + \lambda[c - g)] = x^2 y + \lambda(4 - x - y) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_x = 2xy - \lambda \\ L_y = x^2 - \lambda \end{array}\right\}$$

$$\left|\tilde{H}_L\right| = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & -g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & -g_y \\ -g_x & -g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x & -1 \\ 2x & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-2x - 0) + 1(-2y + 2x) = 4x - 2y = 4\frac{8}{3} - 2\frac{4}{3} = 8$$

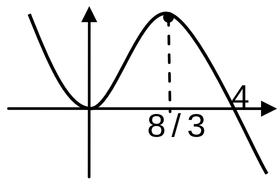
Βρήκαμε: $\tilde{\Delta}_L = \left|\tilde{H}_L\right| = 8 > 0 \Rightarrow \tilde{H}_\Lambda < 0$, και επομένως είναι γνήσιο περιορισμένο τοπικό μέγιστο. Γραφικά, διαπιστώσαμε παραπάνω ότι είναι γνήσιο περιορισμένο ολικό μέγιστο.

<u>Λύση2.</u> Με αντικατάσταση από τον περιορισμό, βρίσκουμε:

$$y = 4 - x \Rightarrow f = x^2 y = x^2(4 - x) = 4x^2 - x^3, \text{ για } 0 \le x \le 4$$

Έχει **ολικό** μέγιστο στο εσωτερικό στάσιμο:

$$f' = 8x - 3x^2 = x(8 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 8/3$$



Εφαρμογές

3.(1 μονάδες)

(α). Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y, σύμφωνα με την σχέση: $Q = P^{-2}Y$. Αν η τιμή αυξηθεί κατά 2%, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το εισόδημα ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

(β). Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή ελαττωθεί κατά 4% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική μεταβολή θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

<u>Λύση.</u> Για εκτιμήσεις χρησιμοποιούμε διαφορικά

(α). Για σταθερή ζήτηση $Q = q$ τα $\{P, Y\}$ θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$P^{-2}Y = q \Rightarrow Y = qP^2$$

Έχουμε δύναμη, οπότε η ελαστικότητα του Y ως προς P για σταθερό Q , θα είναι: $\varepsilon = 2$

Επομένως η απαιτούμενη μεταβολή του εισοδήματος θα ικανοποιεί:

$$\%dY = \varepsilon(\%dP) = 2 \cdot 2 = 4\%, \text{ αύξηση}$$

Εναλλακτικά, έχουμε ότι σύμφωνα με την θεωρία των ελαστικοτήτων, η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας ζήτησης θα ικανοποιεί την σχέση:

$$\%dQ = -2(\%dP) + 1(\%dY) = 0 \Rightarrow \%dY = 2(\%dP) = 2 \cdot 2 = 4\%$$

(β). Στο γινόμενο τα ποσοστιαία διαφορικά προστίθενται. Επομένως:

$$\%dE = \%dQ + \%dP = 6 - 4 = 2\%$$

είναι η εκτίμηση για την μεταβολή της δαπάνης. Έχουμε αύξηση 2%. Στην πραγματικότητα η αύξηση θα είναι λίγο μικρότερη, διότι οι μεταβολές ικανοποιούν τη σχέση:

$$\Delta E = (Q + \Delta Q)(P + \Delta P) - QP = P\Delta Q + Q\Delta P + \Delta Q\Delta P$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{P\Delta Q}{E} + \frac{Q\Delta P}{E} + \frac{\Delta Q\Delta P}{E} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta Q}{Q}\frac{\Delta P}{P}$$

$$\Rightarrow \%\Delta E = \%\Delta Q + \%\Delta P + \frac{\%\Delta Q\%\Delta P}{100} = 6 - 4 - 0.24 = 1.76\%$$

4. (1 μονάδες)

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K, L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q = KL$, και με κόστος $C = vK + wL$. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι p

<u>Λύση.</u>

Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = pKL - vK - wL$$

έχει το στάσιμο:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_K = pL - v = 0\\ \Pi_L = pK - w = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}K = w/p\\ L = v/p\end{array}\right\} \text{ με } \Pi = p\frac{w}{p}\frac{v}{p} - v\frac{w}{p} - w\frac{v}{p} = -\frac{vw}{p} < 0$$

Προφανώς δεν δίνει μέγιστο διότι έχουμε την επιλογή: $\{K = 0, L = 0\} \Rightarrow \Pi = 0$.

Εξάλλου ο Εσσιανός πίνακας μας δίνει ότι το σημείο δεν είναι ακρότατο:

$$\Pi_{KK} = 0, \Pi_{LL} = 0, \Pi_{KL} = p \ \& \ \Delta = \Pi_{KK}\Pi_{LL} - \Pi_{KL}^2 = -p^2 < 0, \ \textbf{σαγματικό}$$

Το μέγιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο. Στο σύνορο έχουμε:

$$\{K = 0 \Rightarrow \Pi = -wL \le 0\} \ \text{ ή } \ \{L = 0 \Rightarrow \Pi = -vK \le 0\}$$

Το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο, και είναι άπειρο, όπως διαπιστώνουμε π.χ. αν πάρουμε:

$$K = L \Rightarrow \Pi = pL^2 - (v + w)L \to +\infty$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι αύξουσας απόδοσης κλίμακας:

$$Q(tK, tL) = t^2 Q(K, L).$$

ΤΕΛΟΣ