ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Σεπτέμβριος 2019**

διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 ***(4 μονάδες)***

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -2\ln(x+1)$

1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να βρεθούν η παράγωγος και η γραμμική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$

β) Θεωρούμε την εξίσωση: $x^{3/2} + y^{3/2} = 2$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της
2. Στο σημείο $\{x = 1,\ y = 1\}$ να υπολογιστεί η παράγωγος του y ως προς x, και να διαπιστωθεί ότι είναι σημείο ισοελαστικότητας του x ως προς y

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+1) - 3x$ στο θετικό διάστημα: $x \ge 0$

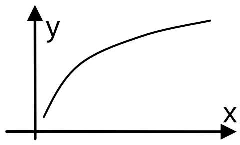
1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη
2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

δ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $\{f(x) = 1/\sqrt{x},\ g(x) = x\}$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ ημιάξονα

2 ***(4 μονάδες)***

α) Οι εξισώσεις: $\{xy = v,\ 2x + y = w\}$ ορίζουν πλεγμένα τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις των $\{v, w\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς v.



β) Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι $x-$φθίνουσα και έχει ισοσταθμικές όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς y και να σκιαγραφηθελι η κάτω σταθμική της.

γ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το (ελεύθερο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x, y) = xy - x^2 - x$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

δ) Το σημείο $\{x = 1, y = 2\}$ είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x, y) = xy$, με τον περιορισμό: $g(x, y) = 2x + y = 4$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange
2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά

3 ***(1 μονάδες)***

α). Αν η τιμή P ενός αγαθού αυξάνει ετησίως με ρυθμό 1%, και η ζήτηση Q μειώνεται ετησίως με ρυθμό 2%, να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της συνολικής δαπάνης $E = PQ$

β). Ένα μονοπώλιο έχει διαπιστώσει ότι η ελαστικότητα της ζήτησης Q ως προς την τιμή P του προιόντος που παράγει είναι $\varepsilon = -1/2$. Πόσο περίπου θα μεταβληθεί το έσοδο $R = PQ$ αν το μονοπώλιο ανεβάσει την τιμή κατά 2%?

4 ***(1 μονάδες)***

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = \sqrt{X} + 2\sqrt{Y} \,||\, C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx / wy, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v / w. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. Λύσεις **Σεπτέμβριος 2019**

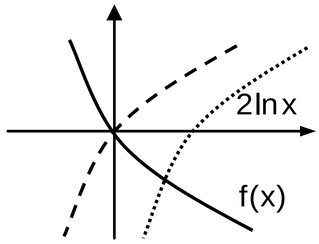
διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1 *(4 μονάδες)*

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -2\ln(x+1)$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθούν η παράγωγος και η γραμμική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$



Λύση

1. Το γράφημά της $2\ln(x+1)$ είναι αυτό της $2\ln x$ μετατοπισμένο οριζοντίως κατά -1, δηλαδή κατά 1 προς τα αριστερά, οπότε διέρχεται από την αρχή του συστήματος. Τέλος αντιστρέφεται και ως προς τον οριζόντιο άξονα λόγω του αρνητικού πρόσημου.

2. Στο σημείο $x_0 = 0$, βρίσκουμε τις τιμές:

$$f(x) = -2\ln(x+1)\big|_{x=0} = -2\ln 1 = 0, \quad f'(x) = -2/(x+1)\big|_{x=0} = -2$$

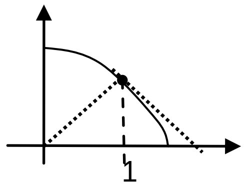
$$f_{\gamma\rho}(x) = f(0) + f'(0)x = 0 - 2x = -2x, \text{ γραμμική}$$

▲

β) Θεωρούμε την εξίσωση: $x^{3/2} + y^{3/2} = 2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x \ge 0, y \ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Στο σημείο $\{x = 1, y = 1\}$ **να υπολογιστεί η παράγωγος του** y **ως προς** x**, και να διαπιστωθεί ότι είναι σημείο ισοελαστικότητας του** x **ως προς** y



Λύση

1. Είναι της γνωστής μορφής: $x^{\rho} + y^{\rho} = c$ με $\rho > 1$, οπότε μοιάζει με την περιφέρεια κύκλου, λιγότερο καμπυλοειδής διότι ο εκθέτης είναι μικρότερος του 2.

2. Καταρχήν επαληθεύουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση. Γραφικά είναι το σημείο όπου η ακτίνα έχει ίδια απόλυτη κλίση με την εφαπτομένη. *Το σημείο ισοελαστικότητας του* x *ως προς* y *είναι ίδιο με αυτό του* y *ως προς* x. Παραγωγίζοντας πλεγμένα , βρίσκουμε:

$$(3/2)x^{1/2} + (3/2)y^{1/2}y' = 0 \Rightarrow y' = -x^{1/2}/y^{1/2}$$

Έχουμε: $(x = 1, y = 1) \Rightarrow y' = -1$, $E_x y = \dfrac{xy'}{y} = \dfrac{1(-1)}{1} = -1$, σημείο ισοελαστικότητας

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+1) - 3x$ **στο θετικό διάστημα:** $x \ge 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

Λύση

1. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $2\ln(1+x)$, με την γραμμική: $-x$. Εξάλλου έχουμε:

$$f(x) = \ln(1+x) - 3x \Rightarrow f'(x) = (1+x)^{-1} - 3, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} < 0, \text{ αρνητική } 2^{\eta} \text{ παράγωγο}$$

2. Όντας κοίλη, το στάσιμο, αν υπάρχει, δίνει μέγιστο:

$$f'(x) = (1+x)^{-1} - 3 = 0 \Rightarrow x + 1 = 1/3 \Rightarrow x = -2/3 < 0, \text{ δεν βρίσκεται στη θετική περιοχή.}$$

Στο αριστερό σύνορο έχουμε: $f'(0) = (1+0)^{-1} - 3 = -2 < 0$, ικανοποιείται η συνθήκη για μέγιστο.

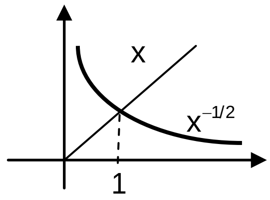
Επομένως η μέγιστη τιμή είναι: $f(0) = \ln(1+0) - 3 \cdot 0 = 0$

▲

δ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $\{f(x)=1/\sqrt{x},\ g(x)=x\}$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**



<u>Λύση</u>

1. Βρίσκουμε το σημείο τομής:

$$\frac{1}{x^{1/2}}=x\Rightarrow x^{3/2}=1\Rightarrow x=1$$

2. Το εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1 x^{-1/2}dx-\int_0^1 xdx=2x^{1/2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=2-1/2=3/2$$

▲

2. (*4 μονάδες*)

α) Οι εξισώσεις: $\{xy=v,\ 2x+y=w\}$ **ορίζουν πλεγμένα τα** $\{x,y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{v,w\}$**. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v**.**

Λύση 1. Με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\left.\begin{aligned}f(x,y,v,w)=xy-v=0\\ g(x,y,v,w)=2x+y-w=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_v & f_y\\ g_v & g_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & x\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=-\frac{-1}{y-2x}=\frac{1}{y-2x}$$

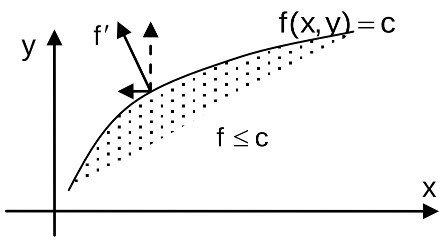
Λύση 2. Με πλεγμένη παραγώγιση ως προς v, με σταθερό w:

$$\left.\begin{aligned}xy=v\\ 2x+y=w\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_vy+xy_v=1\\ 2x_v+y_v=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_vy+x(-2x_v)=1\\ y_v=-2x_v\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_vy-2x_vx=1\Rightarrow x_v=\frac{1}{y-2x}$$

Λύση 3. Λύνοντας τις εξισώσεις αλγεβρικά ως προς $\{x,y\}$ για να βρούμε την $x=x(v,w)$.

▲

β) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι** $x-$**φθίνουσα και έχει ισοσταθμικές όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς** y **και να σκιαγραφηθελι η κάτω σταθμική της.**



Λύση. Η κλιση της ισοσταθμικής είναι θετική, και ο τύπος πλεγμένης παραγώγισης μας δίνει:

$$f(x,y)=c\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}>0\Rightarrow\frac{f_x}{f_y}<0$$

Συμπεραίνουμε ότι οι δύο μερικές παράγωγοι έχουν αντίθετο πρόσημο, και επομένως ότι η συνάρτηση είναι $y-$αύξουσα. Η διανυσματική κλίση δείχνει πάνω αριστερά προς την πάνω σταθμική. Η κάτω σταθμική βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση. Εξάλλου η τιμή της συνάρτησης πρέπει να αυξάνει όταν ελαττώνεται το x ή όταν αυξάνει το y.

▲

γ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το (ελεύθερο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=xy-x^2-x$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$**.**

Λύση. $f(x,y)=xy-x^2-x\Rightarrow\{f_x=y-2x-1=0,\ f_y=x=0\}\Rightarrow\{x=0,y=1\}$ στάσιμο σημείο

Ο εσσιανός πίνακας στο στάσιμο είναι αόριστος διότι έχει ορίζουσα αρνητική:

$$\Delta=|H|=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0\,.$$

Επομένως το στάσιμο δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό.

▲

δ) Το σημείο $\{x=1, y=2\}$ είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=xy$, με τον περιορισμό: $g(x,y)=2x+y=4$, στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, είτε αναλυτικά είτε γραφικά

Λύση. Το περιορισμένο στάσιμο θα ικανοποιεί τις συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας:

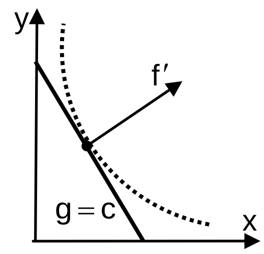
$$\left\{\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}, g=c\right\}\Rightarrow\left\{\frac{y}{2}=\frac{x}{1}, 2x+y=4\right\}\Rightarrow\{x=1, y=2\}\text{ : περιορισμένο στάσιμο}$$

Για να το χαρακτηρίσουμε χρειαζόμαστε τον πολλαπλασιαστή και τη συνάρτηση Lagrange:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{y}{2}=\frac{2}{2}=1,\quad L=f+\lambda(c-g)=xy+(4-2x-y)=xy-2x-y+4$$

Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης Lagrange στο σημείο είναι αρνητικά ορισμένος διότι έχει ορίζουσα θετική:

$$\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2(0-1)+1(2-0)=4>0$$



Επομένως το σημείο είναι (γνήσιο) περιορισμένο τοπικό μέγιστο. Γραφικά διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι περιορισμένο ολικό μέγιστο.

3.(1 μονάδες)

(α). Αν η τιμή P ενός αγαθού αυξάνει ετησίως με ρυθμό 1%, και η ζήτηση Q μειώνεται ετησίως με ρυθμό 2%, να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της συνολικής δαπάνης $E=PQ$

(β). Ένα μονοπώλιο έχει διαπιστώσει ότι η ελαστικότητα της ζήτησης Q ως προς την τιμή P του προιόντος που παράγει είναι $\varepsilon=-1/2$. Πόσο περίπου θα μεταβληθεί το έσοδο $R=PQ$ αν το μονοπώλιο ανεβάσει την τιμή κατά 2%?

<u>Λύση</u>

(α). Ο (σχετικός) ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής γινομένου δίνεται από το άθροισμα των (σχετικών) ποσοστιαίων ρυθμών μεταβολής των όρων:

$E=PQ\Rightarrow r_E=r_P+r_Q=0.01-0.02=-0.01$ με σχετικούς ρυθμούς

$E=PQ\Rightarrow \%r_E=\%r_P+\%r_Q=1\%-2\%=-1\%$ με ποσοστιαίους ρυθμούς

Η συνολική δαπάνη ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, περίπου

(β). Μεταβολή της τιμής κατά 2% θα προκαλέσει μεταβολή της ζήτησης κατά $(-1/2)2=-1\%$, και επομένως, όπως και παραπάνω, μεταβολή του εσόδου κατά $2-1=1\%$. Το έσοδο θα αυξηθεί περίπου 1%

▲

4 *(1 μονάδα)*

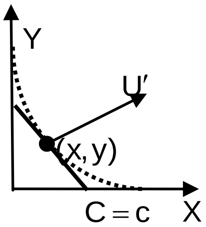
Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U **στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες** $\{X,Y\}$**, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές** $\{v,w\}$ **και δοσμένη δαπάνη** c**:**

$$\max_{\{X,Y\}}\{U=\sqrt{X}+2\sqrt{Y} \,\|\, C=vX+wY=c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ **γραφικά.**

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx/wy**, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w**. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.**

Λύση



α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη, για οιεσδήποτε μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών.

β) Η λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\frac{U_X}{U_Y}=\frac{C_X}{C_Y}\right\}\Rightarrow\left.\frac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}}=\frac{v}{w}\right\}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{w^2}{4v^2}$$

Διαπιστώσαμε ότι ο λόγος συμμετοχής των συντελεστών στην κατανάλωση εξαρτάται μόνο από τον λόγο των μοναδιαίων τιμών τους. Το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγο των δαπανών: :

$$\frac{x}{y}=\frac{w^2}{4v^2}\Rightarrow\frac{vx}{wy}=\frac{w}{4v}\Rightarrow\left(\frac{vx}{wy}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

Η ελαστικότητα της εξάρτησης δίνεται από την δύναμη -1, οπότε έχουμε:

$$\%d\left(\frac{vx}{wy}\right)=-\%d\left(\frac{v}{w}\right)$$ ή ισοδύναμα: $\%d(vx)-\%d(wy)=-(\%dv-\%dw)$

Δηλαδή:

1. Αν ο λόγος των τιμών αυξηθεί κάποιο ποσοστό, ο λόγος των αντίστοιχων δαπανών θα ελαττωθεί κατά το ίδιο αυτό ποσοστό, οριακά.

2. Αν αυξηθεί η τιμή του ενός αγαθού σε σχέση με το άλλο κατά κάποιο ποσοστό, τότε η αντίστοιχη δαπάνη θα ελαττωθεί σε σχέση με την δαπάνη στο άλλο αγαθό κατά το ίδιο αυτό ποσοστό, οριακά.

Υπενθυμίζουμε ότι οριακά η ποσοστιαία μεταβολή ενός λόγου ισούται με την διαφορά της ποσοστιαίας μεταβολής του παρονομαστή από αυτή του αριθμητή.

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε πρώτα την πλήρη λύση και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον ζητούμενο λόγο:

$$\left.\begin{matrix}\frac{U_X}{U_Y}=\frac{C_X}{C_Y}\\ C=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\frac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}}=\frac{v}{w}\\ vX+wY=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{X}}=\frac{v}{w}\\ vX+wY=c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \Rightarrow\left\{x=\frac{cw}{vw+4v^2},\ y=\frac{4cv}{4vw+w^2}\right\}\ \text{λύση}$$

Για τον λόγο συμμετοχής των δύο αγαθών στη συνολική δαπάνη, βρίσκουμε πάλι:

$$\frac{vx}{wy}=\frac{\frac{wvc}{wv+4v^2}}{\frac{4wvc}{w^2+4wv}}=\frac{(w^2+4wv)}{4(wv+4v^2)}=\frac{w}{4v}=\frac{1}{4}\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

ΤΕΛΟΣ