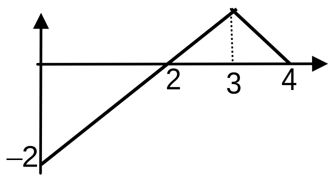
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι Ιανουάριος 2019-20

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θεωρία

1. *(4 μονάδες)*



(α). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ με τιμή: $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le 4$. Να υπολογιστεί η τιμή: $f(4)$

(β). Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1=6,\ y_2=4\}$ όταν $\{x_1=2,\ x_2=4\}$, αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του y ως προς x

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=p\ln(1+x)-wx$ για $x \ge 0$, με $p>0, w>0$.
Να διερευνηθεί η κυρτότητα της $f(x)$ (αν είναι κυρτή ή κοίλη), και να βρεθούν οι τιμές των $\{p,w\}$ για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο $x=0$

(δ). θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=xe^{-x}$ για $x \ge 0$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1. το όριο $\lim xe^{-x}$ όταν $x \to +\infty$ 2. το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

2. *(4 μονάδες)*

(α). Στην περιοχή: $\{0 \le x < 16,\ y \ge 0\}$ Θεωρούμε την συνάρτηση (Stone-Geary)

$$f(x,y)=\ln(16-x)+\ln(y)$$

1. Να χαρακτηριστεί η μονοτονία της ως προς $\{x,y\}$
2. Να υπολογιστεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y ως προς x, στο σημείο: $(x=0,\ y=1\}$
3. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής

(β). Αν τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ αυξάνουν ετησίως με ρυθμούς $\{2\%, 1\%, 3\%\}$ αντίστοιχα, να βρεθεί πώς μεταβάλλεται το μέγεθος $w=xy/z$.

(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=e^{xy}$.

(δ). Στον επίπεδο Oxy, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(0,0)$ από τα σημεία της ευθείας $x+2y=c$.

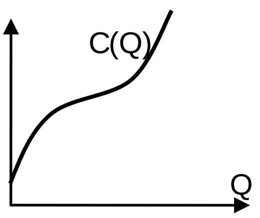
Εφαρμογές

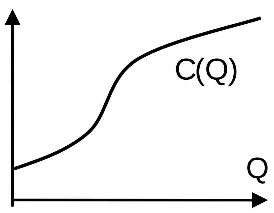
3 (1 μονάδα)

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις κόστους: $C=C(Q)$, με τα παρακάτω γραφήματα. Να γίνουν τα αντίστοιχα γραφήματα των συναρτήσεων μέσου κόστους και οριακού κόστους:

$$AC=C(Q)/Q, \qquad MC=C'(Q)$$

στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, για την κάθε περίπτωση.





4. (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C=X+Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V=3-X$ και $W=5-Y$ αντίστοιχα, όπου $\{V,W\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y)=VX+WY-C(X,Y)$.

Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

β) Επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

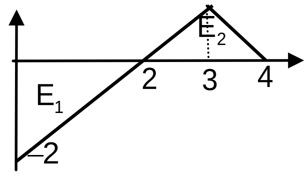
ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. Λύσεις   Ιαν. 2019-20

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θεωρία

1. *(4 μονάδες)*



(α). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ με τιμή: $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le 4$. Να υπολογιστεί η τιμή: $f(4)$

<u>Λύση.</u> Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα η τιμή της στο 4 δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$f(4)-f(0)=\int_0^4 f'(x)dx=-E_1+E_2= \textbf{ προσημασμένο εμβαδό}$$

μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Έχουμε: $E_1=2\cdot 2/2=2,\ E_2=(1\cdot 1/2)+(1\cdot 1/2)=1$

Επομένως: $f(4)-f(0)=-2+1=-1 \Rightarrow f(4)=-1$

▲

(β). Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές: $\{y_1=6,\ y_2=4\}$ όταν $\{x_1=2,\ x_2=4\}$, αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του y ως προς x

<u>Λύση.</u> Με αρχικές τιμές (x_1,y_1) και μεταβολές: $\Delta x=x_2-x_1,\ \Delta y=y_2-y_1$ βρίσκουμε:

παράγωγο: $m=\dfrac{dy}{dx}\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-6}{4-2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

ελαστικότητα: $\varepsilon=\dfrac{dy/y}{dx/x}\approx\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\dfrac{(y_2-y_1)/y_1}{(x_2-x_1)/x_1}=\dfrac{(y_2-y_1)x_1}{(x_2-x_1)y_1}=\dfrac{(4-6)2}{(4-2)6}=\dfrac{(-2)\cdot 2}{2\cdot 6}=-\dfrac{1}{3}\approx-0.33$

▲

(γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=p\ln(1+x)-wx$ για $x\ge 0$, με $p>0, w>0$. Να διερευνηθεί η κυρτότητα της $f(x)$ (αν είναι κυρτή ή κοίλη), και να βρεθούν οι τιμές των $\{p,w\}$ για τις οποίες το μέγιστό της βρίσκεται στο $x=0$

<u>Λύση</u> Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $p\ln(1+x)$ και της γραμμικής: $-wx$.

Εναλλακτικά, είναι κοίλη διότι η 2η παράγωγος είναι αρνητική:

$$f(x)=p\ln(1+x)-wx \Rightarrow f'(x)=p/(1+x)-w \Rightarrow f''(x)=-p/(1+x)^2<0$$

Ως κοίλη, θα έχει μέγιστο στο αριστερό σύνορο: $x=0 \Leftrightarrow$ ικανοποιεί: $f'(0)\le 0$. Έχουμε:

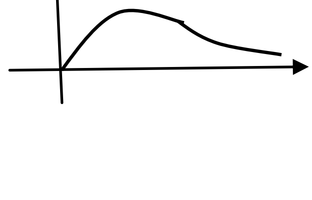
$f'(0)\le 0 \Leftrightarrow p/(1+0)-w\le 0 \Leftrightarrow p\le w$, είναι η συνθήκη

▲

(δ). θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=xe^{-x}$ για $x\ge 0$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1. το όριο $\lim xe^{-x}$ όταν $x\to+\infty$

2. το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.



<u>Λύση.</u>

1. $f(x)=xe^{-x}\to\infty\cdot 0$, απροσδιοριστία.

Με κανόνα L'Hopital: $\dfrac{x}{e^x}\to\dfrac{\infty}{\infty}\sim\dfrac{(x)'}{(e^x)'}=\dfrac{1}{e^x}\to\dfrac{1}{\infty}=0$

Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές, και μηδενίζεται στα $\{0,+\infty\}$

2. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\left.\begin{matrix} f'(x)=e^{-x} \\ g(x)=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x)=-e^{-x} \\ g'(x)=1 \end{matrix}\right\}$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}dx=0-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=-0-(-1)=1$$

▲

2. *(4 μονάδες)*

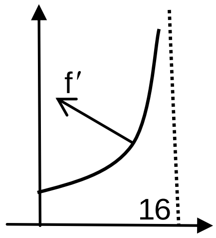
(α). Στην περιοχή: $\{0 \le x \le 16,\ y \ge 0\}$ **Θεωρούμε την συνάρτηση (Stone-Geary)**

$$f(x,y) = \ln(16-x) + \ln(y)$$

1. Να χαρακτηριστεί η μονοτονία της ως προς $\{x,y\}$

2. Να υπολογιστεί ο ρυθμός υποκατάστασης του y **ως προς** x**, στο σημείο:** $(x=0,\ y=1\}$

3. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής



<u>Λύση.</u>

1. $f(x,y) = \ln(16-x) + \ln(y) \Rightarrow \left\{ f_x = -1/(16-x) \le 0,\ f_y = 1/y \ge 0 \right\}$,

$x-$ φθίνουσα, $y-$ αύξουσα

2. Ο ρυθμός υποκατάστασης δίνεται από την κλίση της ισοσταθμικής:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{-1/(16-x)}{1/y} = \frac{1/16}{1} = \frac{1}{16}$$

3. Οι μερικές παράγωγοι έχουν αντίθετο πρόσημο, οπότε οι ισοσταθμικές θα έχουν θετική κλίση. Εξάλλου η ισοσταθμική δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση υποκατάστασης:

$$f(x,y) = \ln(16-x) + \ln(y) = \ln(16-x)y = c \Rightarrow (16-x)y = e^c = \alpha \Rightarrow y = \frac{e^c}{16-x}$$

▲

(β). Αν τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ **αυξάνουν ετησίως με ρυθμούς** $\{2\%,\ 1\%,\ 3\%\}$ **αντίστοιχα, να βρεθεί πώς μεταβάλλεται το μέγεθος** $w = xy/z$**.**

<u>Λύση.</u> Οι ποσοστιαίοι ρυθμοί προστίθενται στον πολλαπλασιασμό και αφαιρούνται στη διαίρεση. Έχουμε:

$$\%r_w = \%r_x + \%r_y - \%r_z = 2 + 1 - 3 = 0$$

Επομένως, το w δεν μεταβάλλεται.

▲

(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = e^{xy}$**.**

<u>Λύση.</u> Βρίσκουμε το στάσιμο, και υπολογίζουμε τον εσσιανό πίνακα στο στάσιμο:

$$f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f_x &= e^{xy}y = 0 \\ f_y &= e^{xy}x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x=0, y=0)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xx} &= e^{xy}yy = 0 & f_{xy} &= xe^{xy}y + e^{xy} = 1 \\ f_{yx} &= ye^{xy}x + e^{xy} = 1 & f_{yy} &= e^{xy}xx = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (0)(0) - 1^2 = -1 < 0$$

Η ορίζουσα είναι γνήσια αρνητική, οπότε το στάσιμο δεν είναι ακρότατο, είναι **σαγματικό**

▲

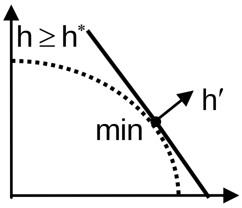
(δ). Στο επίπεδο Oxy**, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου** $(0,0)$ **από τα σημεία της ευθείας** $x + 2y = c$**.**

<u>Λύση.</u> Το σημείο ελάχιστης απόστασης βρίσκεται ως λύση του προβλήματος:

$$\min_{\{x,y\}}\{f = (x^2 + y^2)^{1/2} \parallel g = x + 2y = c\}$$

ή ισοδύναμα, του απλούστερου προβλήματος:

$$\min_{\{x,y\}}\{h = x^2 + y^2 \parallel g = x + 2y = c\}$$



διότι $h = f^2$**, γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο θετικό διάστημα:** $f \ge 0$

Από την γεωμετρία ή και γραφικά, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει εσωτερική λύση, και επομένως αυτή θα είναι η περιορισμένη στάσιμη:

$$\left. \begin{aligned} h_x / g_x &= h_y / g_y \\ g &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x &= 2y/2 \\ x + 2y &= c \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y &= 2x \\ x + 4x &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x^* = c/5, y^* = 2c/5)$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι:

$$f^* = (x^{*2} + y^{*2})^{1/2} = \left(\frac{c^2}{25} + \frac{4c^2}{25} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}\,|c|}{5}$$

▲

Εφαρμογές

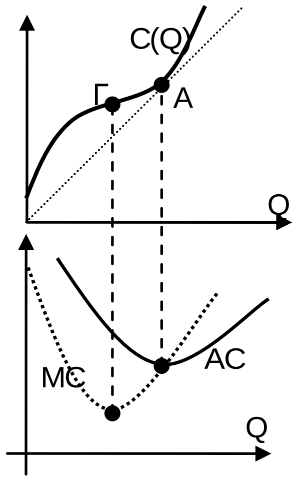
3 (1 μονάδα)

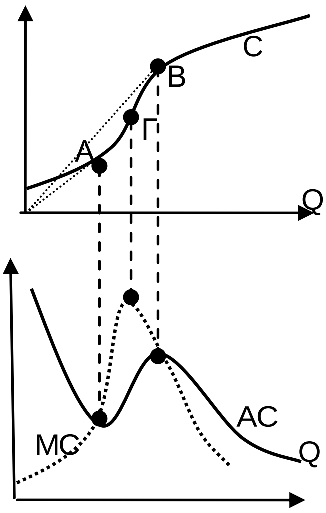
Θεωρούμε δύο συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$, με τα παρακάτω γραφήματα. Να γίνουν τα αντίστοιχα γραφήματα των συναρτήσεων μέσου κόστους και οριακού κόστους:

$$AC = C(Q)/Q, \qquad MC = C'(Q)$$

στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, για την κάθε περίπτωση.

<u>Λύση</u>





Το μέσο κόστος δίνεται από την κλίση της ακτίνας , το οριακό από την κλίση της εφαπτομένης.

Το μέσο κόστος πέφτει όταν το οριακό είναι μικρότερο, ανεβαίνει όταν είναι μεγαλύτερο

▲

4. (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 3 - X$ και $W = 5 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{V, W\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$.

Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

β) Επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = (3 - X)X + (5 - Y)Y - (X + Y) = 2X - X^2 + 4Y - Y^2$$

είναι παραβολική κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi_X = 2 - 2X = 0 \Rightarrow X = 1$$

$$\Pi_Y = 4 - 2Y = 0 \Rightarrow Y = 2$$

και αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές:

$$\{V = 3 - 1 = 2,\ W = 5 - 2 = 3\}$$

Το κέρδος θα είναι: $\Pi = VX + WY - C = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (1 + 2) = 5$

β) Αν επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές, τότε θα έχουμε τον περιορισμό:

$$V = W \Rightarrow 3 - X = 5 - Y \Rightarrow -X + Y = 2$$

οπότε έχουμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max_{\{X,Y\}}\{\Pi = 2X - X^2 + 4Y - Y^2 \parallel Y - X = 2\}$$

Με Lagrange, ή απλούστερα αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε:

$$Y = X + 2 \Rightarrow \Pi = 2X - X^2 + 4(X + 2) - (X + 2)^2 = 4 + 2X - 2X^2$$

Είναι κοίλη παραβολική με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi' = 2 - 4X = 0 \Rightarrow X = 1/2,\ Y = 2 + 1/2 = 5/2\,,$$

Η **ενιαία τιμή** θα είναι:

$V = 3 - 1/2 = 5/2,\ W = 5 - 5/2 = 5/2$

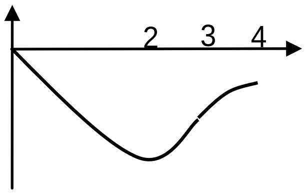
Το κέρδος θα είναι:

$\Pi = (5/2)(1/2) + (5/2)(5/2) - (1/2 + 5/2) = 5/4 + 25/4 - 6/2 = 18/4 = 4.5$

Το κέρδος είναι τώρα μικρότερο διότι έχουμε περιορισμό.

ΤΕΛΟΣ

Παρατηρήσεις



1(α). Με τα δεδομένα μπορούμε να βρούμε το γράφημα της συνάρτησης, αλλά και την ίδια την συνάρτηση.

Γράφημα. Αρχίζοντας με μηδενική τιμή είναι:

1. Ως προς την μονοτονία, φθίνουσα μέχρι το 2 διότι έχει αρνητική παράγωγο, στη συνέχεια αύξουσα μέχρι το 4 διότι έχει θετική παράγωγο, με τελική τιμή αρνητική: $f(4) < 0$.

2. Ως προς την κυρτότητα, είναι κυρτή μέχρι το 3 διότι η παράγωγος είναι αύξουσα, και στη συνέχεια κοίλη μέχρι το 4 διότι η παράγωγος είναι φθίνουσα. Στο 3 έχει καμπή.

Συνάρτηση. Η παράγωγος ορίζεται τμηματικά από τις ευθείες:

$$f'(x) = y = \begin{cases} -2 + 1(x - 0) = -2 + x & \text{για } 0 \le x \le 3 \\ 0 - (x - 4) = 4 - x & \text{για } 3 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + x^2/2 + \alpha & \text{για } 0 \le x \le 3 \\ 4x - x^2/2 + \beta & \text{για } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Για τις σταθερές βρίσκουμε:

1. $\alpha = 0$, διότι: $f(0) = 0$

2. Λόγω συνέχειας στο $x = 3$, θα έχουμε:

$$-2x + x^2/2 = 4x - x^2/2 + \beta \Rightarrow -6 + 9/2 = 12 - 9/2 + \beta \Rightarrow \beta = -9$$

Επομένως η συνάρτηση είναι, τμηματικά ορισμένη:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + x^2/2 & \text{για } 0 \le x \le 3 \\ 4x - x^2/2 - 9 & \text{για } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

▲

1(β)Εναλλακτικές εκτιμήσεις για την ελαστικότητα:

1. Θεωρώντας ως αρχικές τιμές (x_2, y_2) και μεταβολές: $\Delta x = x_1 - x_2,\ \Delta y = y_1 - y_2$

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{(y_1 - y_2)/y_2}{(x_1 - x_2)/x_2} = \frac{(y_1 - y_2)x_2}{(x_1 - x_2)y_2} = \frac{(6-4)4}{(2-4)4} = -1$$

2. Θεωρώντας ως αρχικές τιμές τις ενδιάμεσες:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2)/2 = (2+4)/2 = 3,\ \bar{y} = (y_1 + y_2)/2 = (6+4)/2 = 5$$

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{(y_2 - y_1)/\bar{y}}{(x_2 - x_1)/\bar{x}} = \frac{(y_2 - y_1)\bar{x}}{(x_2 - x_1)\bar{y}} = \frac{(4-6)3}{(4-2)5} = \frac{(-2)\cdot 3}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

3. Χρησιμοποιώντας την λογαριθμική κλίμακα:

$$\varepsilon = \frac{d\ln y}{d\ln x} \approx \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln 4 - \ln 6}{\ln 4 - \ln 2} = \frac{\ln(2/3)}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx -0.585$$

▲

2(β)Με τους δοσμένους ποσοστιαίους (σχετικούς) ρυθμούς θα έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις του χρόνου t

$$\{x = \alpha e^{0.02t}, y = \beta e^{0.01t}, z = \gamma e^{0.03t}\} \Rightarrow w = \frac{xy}{z} = \frac{(\alpha e^{0.02t})(\beta e^{0.01t})}{\gamma e^{0.03t}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} e^{0t} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \text{ σταθερή}$$

▲

2(γ). Η f είναι (ισχυρά) γνήσια αύξουσα συνάρτηση της $g = xy$: $f = e^g$. Γενικά θα έχουν το ίδιο στάσιμο με τον ίδιο χαρακτηρισμό:

$$g = xy \Rightarrow \{g_x = y = 0,\ g_y = x = 0\} \Rightarrow (x = 0, y = 0), \text{ στάσιμο}$$

$$\{g_{xx} = 0,\ g_{yy} = 0,\ g_{xy} = 1\} \Rightarrow \Delta_g = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = (0)(0) - 1^2 = -1 < 0, \text{ σαγματικό}$$

▲

3. Στο πρώτο γράφημα έχουμε μια κανονική συνάρτηση κόστους, αρχικά κοίλη και στη συνέχεια κυρτή. Ειδικότερα:

- Το μέσο αρχίζει με άπειρη τιμή στο 0 εφόσον υπάρχει σταθερό κόστος, και έχει ελάχιστο στο σημείο Α, όπου η ακτίνα συμπίπτει με την εφα[τομένη.
- Το οριακό κόστος έχει ελάχιστη τιμή στο Γ και διασχίζει το ελάχιστο του μέσου από κάτω προς τα πάνω στο Α, όπου τα δύο συμπίπτουν.

Στο δεύτερο γράφημα έχουμε μια <u>μη</u> κανονική συνάρτηση κόστος. Στην αρχή κυρτή και στη συνέχεια κοίλη

- Το μέσο αρχίζει με άπειρη τιμή στο 0 εφόσον υπάρχει σταθερό κόστος, έχει ελάχιστο στο σημείο Α και μέγιστο στο σημείο Β, όπου και η ακτίνα συμπίπτει με την εφαπτομένη.
- Το οριακό κόστος έχει μέγιστη τιμή στο Γ. Διασχίζει το ελάχιστο του μέσου από κάτω προς τα πάνω στο Α όπου τα δύο συμπίπτουν, και το μέγιστο του μέσου από πάνω προς τα κάτω στο Β όπου τα δύο συμπίπτουν.

▲

4. Αντί των $\{X, Y\}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα $\{V, W\}$, οπότε θα έχουμε:

Με διαφοροποίηση τιμών:

$$\Pi(V, W) = V(3 - V) + W(5 - W) - (3 - V + 5 - W) = -8 + 4V + 6W - V^2 - W^2$$

παραβολική κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_V &= 4 - 2V = 0 \\ \Pi_W &= 6 - 2W = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} V &= 2 \\ W &= 3 \end{aligned}\right\}, \text{ οι μοναδιαίες τιμές}$$

Με ενιαία τιμή: Αντικαθιστώντας τον περιορισμό: $W = V$, βρίσκουμε:

$$\Pi = -8 + 4V + 6W - V^2 - W^2 = -8 + 4V + 6V - V^2 - W^2 = -8 + 10V - 2V^2$$

με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi = -8 + 10V - 2V^2 \Rightarrow \Pi' = 10 - 4V = 0 \Rightarrow V = 5/2, \text{ η ενιαία τιμή}$$