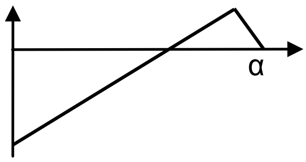
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι Κατατακτήριες 2019

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θεωρία

1. *(4 μονάδες)*



(α). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ με αρχική τιμή: $f(0)=0$ της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le \alpha$. Να διαπιστωθεί ότι οι τιμές της είναι αρνητικές.

(β). Η συνάρτηση $y=y(x)$ ορίζεται πλεγμένα με την εξίσωση $3x+y^3=7$. Να βρεθούν στο σημείο $(x_0=2, y_0=1)$, η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης

(γ). Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px-\sqrt{x}$ για $0 \le x \le 1$, με $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη
2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p για τις οποίες η μέγιστη τιμή βρίσκεται στο $x=1$

(δ). Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης: $x=-y^2+2$ και των θετικών ημιαξόνων.

2. *(4 μονάδες)*

(α). Δίνεται η συνάρτηση $f(v,w)=v^{1/2}w$. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του w ως προς το v όταν $(v=3, w=2)$.

(β). Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι αύξουσα και οιονεί κοίλη. Να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.

(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=1+x^2+2xy$. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.

(δ). Στη θετική περιοχή, το πρόβλημα:

$$\max\{f(x,y)=x^{1/2}y-1 \,||\, g(x,y)=x+8y=12\}$$

έχει τη λύση: $\{x=4, y=1\}$. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$\max\{h(x,y)=\ln x+2\ln y \,||\, g(x,y)=x+8y=12\}$$

Εφαρμογές

3 *(1 μονάδα)*

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E=QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon=-2$.

1. Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα αυξάνει ή θα μειώνεται, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.
2. Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0=100$.

4. (1 μονάδες)

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q=2KL$, και με κόστος $C=vK+wL$. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι p

ΤΕΛΟΣ

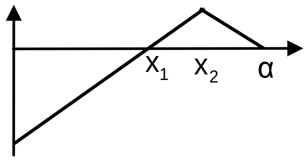
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ. Λύσεις **Κατατακτήριες 2019**

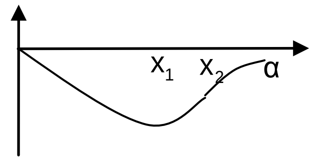
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Θεωρία

1. *(4 μονάδες)*

(α). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **με αρχική τιμή:** $f(0)=0$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα:** $0 \le x \le \alpha$ **. Να διαπιστωθεί ότι οι τιμές της είναι αρνητικές.**





Λύση. Αρχίζοντας με την τιμή: $f(0)=0$, η $f(x)$ είναι φθίνουσα μέχρι το x_1 που η παράγωγος είναι αρνητική. Στη συνέχεια είναι αύξουσα μέχρι το α, που η παράγωγος είναι θετική. Οι τιμές της θα είναι αρνητικές $\Leftrightarrow$ η τιμή της στο α είναι αρνητική. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα η τιμή της στο α δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$f(\alpha)-f(0)=\int_0^\alpha f'(x)dx=-E_1+E_2$, **προσημασμένο εμβαδό** μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Το αρνητικό εμβαδό E_1 μέχρι το x_1 είναι μεγαλύτερο από το θετικό εμβαδό E_2 μεταξύ των $\{x_1,\alpha\}$, οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι αρνητικό:

$$-E_1+E_2<0 \Rightarrow f(\alpha)-f(0)<0 \Rightarrow f(\alpha)<f(0)=0$$

Επομένως η συνάρτηση έχει παντού αρνητικές τιμές, (γνήσια αρνητικές για $x>0$).

▲

(β). Η συνάρτηση $y=y(x)$ **ορίζεται πλεγμένα με την εξίσωση** $3x+y^3=7$**. Να βρεθούν στο σημείο** $(x_0=2, y_0=1)$**, η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης**

Λύση 1. Το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$(3x+y^3)'=7' \Rightarrow 3+3y^2y'\Big|_{y=1}=0 \Rightarrow 3+3y_0'=0 \Rightarrow y_0'=-1$$

$y_{\gamma\rho}=y_0+y_0'(x-x_0)=1-(x-2)=3-x$, είναι η γραμμική προσέγγιση

Παρατήρηση. Η παράγωγος υπολογίζεται με πολλούς τρόπους:

2. Μπορούμε να λύσουμε πρώτα την εξίσωση ως προς $y: y=(7-3x)^{1/3}$ και μετά να παραγωγίσουμε.

3. Μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα την εύκολη παράγωγο της αντίστροφης: $x=x(y)$

$$3x+y^3=7 \Rightarrow x=(7-y^3)/3$$

και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αναστροφής: $y'(x)=1/x'(y)$

4. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο πλεγμένης παραγώγου από την θεωρία συναρτήσεων δύο μεταβλητών:

$$f(x,y)=3x+y^3=7 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{3}{3y^2}\Big|_{x=2,y=1}=-1$$

▲

(γ). Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px-\sqrt{x}$ **για** $0 \le x \le 1$**, με** $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x=1$

Λύση

1. Η συνάρτηση είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής $-\sqrt{x}$ (αρνητική κοίλης) και της γραμμικής px. Εναλλακτικά, η 2η παράγωγος είναι θετική:

$$f(x)=px-x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=p-\frac{1}{2}x^{-1/2},\ f''(x)=\frac{1}{4}x^{-3/2}>0$$

2. Το μέγιστο κυρτής είναι οπωσδήποτε συνοριακό: $\{0 \text{ ή } 1\}$. (Το στάσιμο, αν υπάρχει, είναι ελάχιστο). Θα βρίσκεται στο δεξιό σύνορο $x = 1 \Leftrightarrow f(1) \geq f(0) \Rightarrow p - \sqrt{1} \geq 0 \Rightarrow p \geq 1$.

Παρατήρηση. Εφόσον **δεν έχουμε Κυρτό Προγραμματισμό,** η συνθήκη στο δεξιό σύνορο:

$$f'(1) = p - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow p \geq 1/2$$

είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή. Το καθιστά υποψήφιο. Εξάλλου η αντίστοιχη συνθήκη για μέγιστο στο αριστερό σύνορο ικανοποιείται πάντοτε:

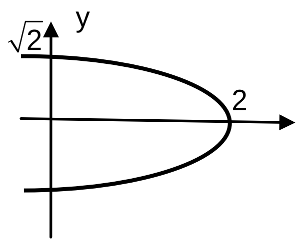
$$f'(0) = p - \frac{1}{2 \cdot 0} = -\infty < 0$$

Δηλαδή αμφότερα τα συνοριακά είναι υποψήφια, οπότε τελικά πάλι πρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές τους.

▲

(δ). Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης: $x = -y^2 + 2$ **και του θετικού** $y-$**ημιάξονα.**

Λύση



1. Η καμπύλη δίνεται από την ανεστραμμένη παραβολή ως προς τον $x-$άξονα στο σχήμα παραπλεύρως:

$$x = -y^2 + 2$$

2. Ολοκληρώνουμε ως προς τον $y-$άξονα στο διάστημα $0 \leq y \leq \sqrt{2}$:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x(y)dy = \int_0^{\sqrt{2}} (-y^2 + 2)dy = -y^3/3 + 2y\Big|_0^{\sqrt{2}} = -2^{3/2}/3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(-2/3 + 2) = 4\sqrt{2}/3$$

Θα μπορούσαμε να βάλουμε τον $y-$άξονα οριζόντιο

Εναλλακτικά, μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς x στο διάστημα, $0 \leq x \leq 2$, την αντίστροφη συνάρτηση: $y = \sqrt{2 - x}$

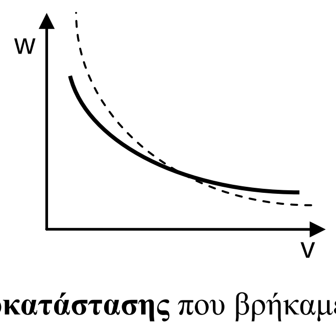
$$\int_0^2 y(x)dx = \int_0^2 (2-x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2}(2-x)^{3/2}(-1)\Big|_0^2 = 0 - \frac{2}{3}2^{3/2}(-1) = 4\sqrt{2}/3$$

▲

2. *(4 μονάδες)*

(α). Δίνεται η συνάρτηση $f(v, w) = v^{1/2}w$**. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του** w **ως προς το** v **όταν** $(v = 3, w = 2)$**.**

Λύση. Είναι συνάρτηση τύπου C-D, οπότε η ισοσταθμική έχει την μορφή υπερβολής:



$$v^{1/2}w = c \Rightarrow w = c / v^{1/2} = cv^{-1/2},$$

με αρνητική δύναμη (μικρότερη του 1, οπότε κατεβαίνει πιο αργά από την συμμετρική). Ο ρυθμός υποκατάστασης δίνεται από τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης:

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{f_v}{f_w} = -\frac{v^{-1/2}w/2}{v^{1/2}} = -\frac{w}{2v} = -\frac{2}{2 \cdot 3} = -1/3$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε την **συνάρτηση υποκατάστασης** που βρήκαμε**:**

$$w = cv^{-1/2} \Rightarrow \frac{dw}{dv} = c(-1/2)v^{-3/2} = -\frac{c}{2v^{3/2}}$$ **,** όπου: $(v = 3, w = 2) \Rightarrow c = f(3, 2) = 3^{1/2}2$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε πάλι:

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{c}{2v^{3/2}} = -\frac{3^{1/2}2}{2 \cdot 3^{3/2}} = -\frac{1}{3}$$

Δηλαδή η ισοσταθμική που περιέχει το συγκεκριμένο σημείο ορίζεται από την εξίσωση:

$$v^{1/2}w = 3^{1/2}2 \Rightarrow w = 2\sqrt{3} / v^{1/2}$$

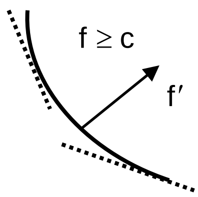
▲

(β). Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι αύξουσα και οιονεί κοίλη. Να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.

Λύση.

1. Η ισοσταθμική θα έχει αρνητική κλίση διότι η συνάρτηση είναι μονότονη:

$$\{f_x \geq 0, f_y \geq 0\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \leq 0 \ .$$



2. Η πάνω σταθμική βρίσκεται πάνω δεξιά στην κατεύθυνση της διανυσματικής κλίσης. Θα είναι κυρτή περιοχή διότι η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη. Επομένως η ισοσταθμική θα έχει το σχήμα παραπλεύρως.

3. Η κλίση της ισοσταθμικής γίνεται λιγότερο απότομη καθώς το x αυξάνει, και επομένως έχουμε φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Εξάλλου

$$\{y' \leq 0, y'' \geq 0\}$$

έχουν αντίθετο πρόσημο.

Παρατήρηση. Τα παραπάνω δεν αποκλείουν και την περίπτωση της ευθείας ισοσταθμικής με σταθερό ρυθμό υποκατάστασης

▲

(γ). Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = 1 + x^2 + 2xy$. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.

Λύση. Το στάσιμο είναι:

$$f(x,y) = 1 + x^2 + 2xy \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x &= 2x + 2y = 0 \\ f_y &= 2x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x = 0, y = 0)$$

Έχει γνήσια αρνητική διακρίνουσα:

$$f_{xx} = 2 > 0,\ f_{yy} = 0,\ f_{xy} = 2 \Rightarrow \Delta_f = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(0) - 2^2 = -4 < 0$$

Επομένως το στάσιμο είναι σαγματικό. Άλλο στάσιμο δεν υπάρχει, και εφόσον δεν υπάρχει ούτε σύνορο, το μέγιστο θα βρίσκεται **υποχρεωτικά** στο άπειρο. Θα είναι και άπειρο, διότι παίρνοντας π.χ. $y = 0$, βρίσκουμε:

$$f(x,0) = 1 + x^2 \to +\infty \quad \text{όταν } x \to \infty$$

▲

(δ). Στη θετική περιοχή, το πρόβλημα:

$$\max\{f(x,y) = x^{1/2}y - 1 \,\|\, g(x,y) = x + 8y = 12\}$$

έχει τη λύση: $\{x = 4, y = 1\}$. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$\max\{h(x,y) = \ln x + 2\ln y \,\|\, g(x,y) = x + 8y = 12\}$$

Λύση. Η h είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση της f:

$$\ln x + 2\ln y = 2\ln(x^{1/2}y) \Rightarrow h = 2\ln(f+1)$$

Εφόσον και ο περιορισμός είναι ίδιος, η λύση θα είναι η ίδια: $\{x = 4, y = 1\}$

▲

Εφαρμογές

3 (1 μονάδα)

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$.

(α). Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα αυξάνει ή θα μειώνεται, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.

(β). Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

Λύση.

1. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής γινομένου ισούται με το άθροισμα των ποσοστιαίων ρυθμών μεταβολής των όρων:

$$\frac{\%dE}{dt} = \frac{\%dQ}{dt} + \frac{\%dP}{dt} \quad \text{όπου: } \frac{\%dP}{dt} = -1\% \text{ ετησίως}$$

2. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με τον ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής της τιμής:

$$\frac{\%dQ}{dt} = \frac{\%dQ}{\%dP}\frac{\%dP}{dt} = \varepsilon \frac{\%dP}{dt}(-2)(-1\%) = 2\% \text{ ετησίως}$$

3 Αντικαθιστώντας στο 1, βρίσκουμε:

$$\frac{\%dE}{dt} = 2 - 1 = 1\%$$

Το έσοδο αυξάνει διότι η πτώση της τιμής προκαλεί μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση της ζήτησης.

(α). Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο **αυξάνει** με ρυθμό 1% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = 0.01$.

(β). Επομένως το έσοδο μετά από 4 έτη θα είναι:

$$E = E_0 e^{rt} = 100e^{(0.01)4} = 100e^{0.04} \approx 100[1 + (0.04) + (0.04)^2 / 2] = 104.08$$

Στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού.

▲

4. (1 μονάδα)

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K, L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q = 2KL$, και με κόστος $C = vK + wL$. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι p

<u>Λύση.</u>

Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = p2KL - vK - wL$$

έχει το στάσιμο:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_K &= p2L - v = 0\\ \Pi_L &= p2K - w = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}K &= w/2p\\ L &= v/2p\end{aligned}\right\} \text{ με } \Pi = p\frac{w}{2p}\frac{v}{2p} - v\frac{w}{2p} - w\frac{v}{2p} = -\frac{vw}{4p} < 0 \text{, ζημιά}$$

Προφανώς δεν είναι μέγιστο διότι π.χ. έχουμε $\{K = 0, L = 0\} \Rightarrow \Pi = 0$.

Εξάλλου ο Εσσιανός πίνακας το χαρακτηρίζει ως σαγματικό, επομένως όχι ακρότατο:

$$\Pi_{KK} = 0,\ \Pi_{LL} = 0,\ \Pi_{KL} = 2p \ \&\ \Delta = \Pi_{KK}\Pi_{LL} - \Pi_{KL}^2 = -4p^2 < 0 : \text{σαγματικό}$$

Το μέγιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο. Στο σύνορο έχουμε:

$$K = 0 \Rightarrow \Pi = -wL \le 0 \quad \text{και} \quad L = 0 \Rightarrow \Pi = -vK \le 0$$

Το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο, και είναι άπειρο. Π.χ. για $K = L$, βρίσκουμε:

$$\Pi = p2KL - vK - wL = p2K^2 - vK - wK \to +\infty \quad \text{όταν } K = L \to +\infty$$

Αυτό συμβαίνει διότι η συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κανονική, ειδικότερα είναι αύξουσας απόδοσης κλίμακας

ΤΕΛΟΣ