ΦροντιστήριοΕφ.ΙΙΙ(Β)

1.

Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = \ln(1+L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, να βρεθούν τα παρακάτω:

(α). Οι τιμές των $\{p,w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.

(β). Το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p,w\}$. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

2

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα $Q = \sqrt{K}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος π ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{v,p\}$ και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, κυρτότητας και οιονεί κυρτότητας αυτής της συνάρτησης. Να ερμηνευτούν οι παραπάνω ιδιότητες, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της συνάρτησης μέγιστου κέρδους: $\pi(v,p)$.

3.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3}$ με $\{K \geq 0, L \geq 0\}$.

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση παραγωγής είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή και αν ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής.

β). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους:

$$\min\{C = 2K + L \,||\, Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3} \geq 1\}$$

4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = K^{3/2} + 8L^{3/2}$ όπου $\{K \geq 0, L \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών παραγωγής.

α) Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να σχολιαστεί.

β) Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο συντελεστών είναι $\{v,w\}$ αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο παραγωγής q.

5.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$$\min\{C = vK + wL \,||\, Q = K^{\rho} + L^{\rho} = q\} \quad \text{με} \quad 0 < \rho < 1$$

όπου $\{v,w\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας: $\{K,L\}$ αντίστοιχα.

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπύλων ισοπαραγωγής.

2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K/L εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v/w

6.

Ένα μονοπώλιο που λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V,W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης: $\{V = 5 - Y, W = 4 - 2X\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος: $C = 2 + 2(X+Y)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους $\Pi(X,Y)$, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

β) Να βρεθούν οι τιμές διάθεσης του προιόντος στις δύο αγορές για μέγιστο κέρδος.

γ) Το κέρδος θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο αν επιβληθεί ενιαία τιμή στις δύο αγορές; Να γίνουν και τα σχετικά γραφήματα.

7.

Ένα μονοπώλιο που λειτουργεί μεγιστοποιώντας τα κέρδη του διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ **με μοναδιαίες τιμές** $\{V,W\}$ **και με εξισώσεις ζήτησης** $\{V=1-2X,\ W=4-Y\}$ **αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος** $C=2+2(X+Y)$**.**

1. Να διατυπωθεί η συνάρτηση κέρδους, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

2. Να βρεθούν αναλυτικά και γεωμετρικά οι ποσότητες διάθεσης στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

3. Να υπολογιστεί το κέρδος.

8.

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ **αντίστοιχα, με συνολικό κόστος** $C=X+Y$**, και εξισώσεις ζήτησης:** $V=2-X$ **και** $W=4-Y$ **αντίστοιχα, όπου** $\{w,v\}$ **είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:** $\Pi(X,Y)=VX+WY-C(X,Y)$**.**

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

9.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U **στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες** $\{X,Y\}$**, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές** $\{v,w\}$ **και δοσμένη δαπάνη** c**:**

$$\max_{\{X,Y\}}\{U=2\sqrt{X}+\sqrt{Y}\ ||\ C=vX+wY=c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ **γραφικά και αναλυτικά.**

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx/wy**, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w**.**

10.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας U **στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες** $\{X,Y\}$ **με δοσμένες μοναδιαίες τιμές** $\{v,w\}$ **και δοσμένη δαπάνη** c**:**

$$\max_{\{X,Y\}}\{U=\sqrt{X}+2\sqrt{Y}\ ||\ C=vX+wY=c\}$$

Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ **γραφικά και αναλυτικά.**

11.

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X,Y)=\ln(X^{5/2}+4Y^{5/2})$ **όπου** $\{X\geq 0, Y\geq 0\}$ **είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών.**

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας.

β). Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών είναι $\{v,w\}$ **αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης** $\{X^*,Y^*\}$ **των δύο αγαθών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο χρησιμότητας** u**.**

12.

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X,Y) **με συνάρτηση κόστους:** $C(X,Y)=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2$**.**

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

β). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης του εσόδου:

$$\max\{R=2X+Y\ ||\ C=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2\leq 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

<u>13.</u>

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q = KL$, και με κόστος $C = vK + wL$. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι p

<u>14.</u>

Μια παραγωγική μονάδα λειτουργεί με συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ χρησιμοποιώντας δύο συντελεστές παραγωγής: κεφάλαιο K με μοναδιαίο κόστος v και εργασία L με μοναδιαίο κόστος w. Αν το προιόν διατίθεται με μοναδιαία τιμή p, να βρεθεί το μέγιστο κέρδος στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $Q = \sqrt{K} + 2\sqrt{L}$ **β)** $Q = KL$ **γ)** $Q = K + 2L$

<u>15.</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους: $\max\{f = x^{1/2}y^{1/4} - wx - vy\}$, στη θετική περιοχή $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, με παραμέτρους: $\{w > 0, v > 0\}$. Να ερμηνευτεί και να βρεθεί η μέγιστη τιμή f^* ως συνάρτηση των παραμέτρων. Επίσης να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας αυτής της συνάρτησης.

<u>16</u>

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 2 - X$ και $W = 4 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{W,V\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος:

1. στην περίπτωση που επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών,

2. στην περίπτωση που επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

Πότε θα είναι το κέρδος μεγαλύτερο?

<u>17.</u> (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 3 - X$ και $W = 5 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{V,W\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$. Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

β) Επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

<u>18</u>

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ με συνάρτηση παραγωγής $Q = K\sqrt{L}$, και με κόστος $C = 8K + L$.

1. Να βρεθεί η μέγιστη παραγωγή με επιτρεπτό κόστος $C = 300$

2. Να εκτιμηθεί η αύξηση της μέγιστης παραγωγής αν το επιτρεπτό κόστος αυξηθεί σε $C = 304$

ΦροντιστήριοΕφ.ΙΙΙ(Β)-Λύσεις

1.

Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q=\ln(1+L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, να βρεθούν τα παρακάτω:

(α). Οι τιμές των $\{p,w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.

(β). Το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p,w\}$. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

Λύση.

(α). Το κέρδος: $\Pi(L)=pQ-C=p\ln(1+L)-wL$, είναι **κοίλη**, με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi'=\frac{p}{1+L}-w=0 \quad \Rightarrow L^*=\frac{p}{w}-1,\text{ αν } L^*>0 \Rightarrow p>w,$$

οπότε και θα έχουμε παραγωγή.

Αν η συνθήκη δεν ικανοποιείται: $p\le w$, τότε η λύση θα βρίσκεται στο σύνορο: $L^*=0$, διότι:

$$\Pi'(0)=p-w\le 0,$$

οπότε και δεν θα έχουμε παραγωγή .

(β). Αν $p\le w$, τότε το κέρδος είναι: $\pi=0$.

Αν $p>w$, τότε το (μέγιστο) κέρδος είναι:

$$\pi=p\ln(1+L^*)-wL^*=p\ln(\frac{p}{w})-(p-w)=p\ln p-p-p\ln w+w$$

Έχουμε:

$$\pi=p\ln p-p-p\ln w+w \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\pi_p=\ln p-\ln w=\ln(p/w)>0\\ \pi_w=-p/w+1<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow p-\text{αύξουσα},\ w-\text{φθίνουσα}$$

Όσον αφορά κυρτότητα, βρίσκουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\pi_p=\ln p-\ln w=\ln(p/w)>0\\ \pi_w=-p/w+1<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}\pi_{pp}=1/p & \pi_{pw}=-1/w\\ \pi_{wp}=-1/w & \pi_{ww}=p/w^2\end{pmatrix} \text{ με } \Delta=\frac{1}{w^2}-\frac{1}{w^2}=0$$

Είναι $\{p,w\}-$κυρτή, διότι έχουμε:

$$\pi_{pp}>0,\ \pi_{ww}>0,\ \Delta=\pi_{pp}\pi_{ww}-\pi_{pw}^2=0$$

▲

2

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί συντελεστή παραγωγής K με μοναδιαίο κόστος v και παράγει ποσότητα $Q=\sqrt{K}$ ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται με μοναδιαία τιμή p. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος π ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{v,p\}$ και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, κυρτότητας και οιονεί κυρτότητας αυτής της συνάρτησης. Να ερμηνευτούν οι παραπάνω ιδιότητες, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της συνάρτησης μέγιστου κέρδους: $\pi(v,p)$.

Λύση. Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi(K)=R(K)-C(K)=pQ(K)-vK=p\sqrt{K}-vK$$

είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi'(K)=p/2\sqrt{K}-v=0 \Rightarrow K^*=p^2/4v^2$$

Το μέγιστο κέρδος είναι:

$$\pi=\Pi(K^*)=p\sqrt{K^*}-vK^*=p\frac{p}{2v}-v\frac{p^2}{4v^2}=\frac{p^2}{4v}=p^2v^{-1}/4$$

Ως συνάρτηση των παραμέτρων η παραπάνω συνάρτηση μέγιστου κέρδους είναι:

1. $p-$αύξουσα, $v-$φθίνουσα

Το μέγιστο κέρδος αυξάνει όταν αυξάνει η τιμή του προιόντος ή όταν μικραίνει το κόστος του συντελεστή

2. $p-$κυρτή, $v-$κυρτή, $(v,p)-$κυρτή, διότι ο Εσσιανός πίνακας H_π είναι θετικά ημιορισμένος:

$$\{\pi_p = pv^{-1}/2,\ \pi_v = -p^2 v^{-2}/4\},$$

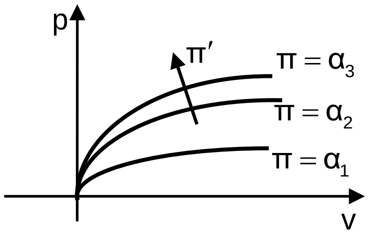
$$\{\pi_{pp} = v^{-1}/2,\ \pi_{vv} = p^2 v^{-3}/2,\ \pi_{pv} = -pv^{-2}/2\},$$

$$\Delta = \pi_{pp}\pi_{vv} - (\pi_{pv})^2 = p^2v^{-4}/4 - p^2v^{-4}/4 = 0$$

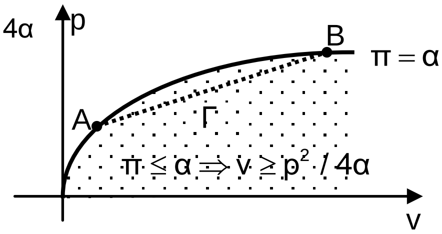
$$\Rightarrow \{\pi_{vv} > 0,\ \pi_{pp} > 0,\ \Delta = 0\} \Rightarrow H_\pi \geq 0.$$

Καθώς η τιμή του προιόντος αυξάνει ή/και το κόστος του συντελεστή μικραίνει, το μέγιστο κέρδος αυξάνει με αύξοντα ρυθμό

3. $(v,p)-$οιονεί κυρτή, διότι είναι $(v,p)-$κυρτή. Εξάλλου οι κάτω σταθμικές περιοχές είναι κυρτές, όπως φαίνεται στο γράφημα, διότι δίνονται από το εσωτερικό παραβολών.



$\pi = \alpha \Rightarrow v = p^2/4\alpha$



Ακραίοι συνδυασμοί τιμής του προιόντος και κόστους του συντελεστή: $\{A,B\}$, είναι περισσότερο κερδοφόροι από ενδιάμεσους συνδυασμούς Γ, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παραπάνω. Επίσης καθώς το v αυξάνει τότε για να διατηρηθεί σταθερή η κερδοφορία, θα πρέπει βέβαια και το p να αυξάνει αλλά με φθίνοντα ρυθμό, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παραπάνω.

<u>3.</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3}$ **με** $\{K \geq 0, L \geq 0\}$.

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση παραγωγής είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή και αν ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής.

β). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους:

$$\min\{C = 2K + L \,\|\, Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3} \geq 1\}$$

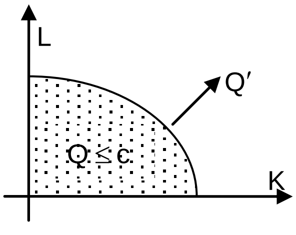
Λύση.

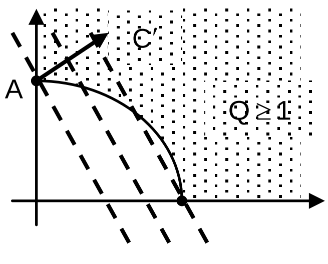
α). Οι σταθμικές της $Q(K,L)$ είναι ίδιες με τις σταθμικές της $H(K,L) = K^{3/2} + L^{3/2}$, διότι η Q είναι αύξων μετασχηματισμός της H: $Q = H^{2/3}$. Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής:

$$x^\alpha + y^\alpha \ \text{ με } \alpha > 1$$

Οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα του πρώτου από τα παρακάτω δύο γραφήματα, με τις κάτω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής Q. Συμπεραίνουμε ότι, όπως και η H, η Q είναι οιονεί κυρτή και ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης, δηλαδή δεν είναι κανονική.

β). Τέλος όπως φαίνεται από το δεύτερο γράφημα παρακάτω, η λύση του προβλήματος είναι πάντοτε συνοριακή. Εξάλλου οι ακραίοι συνδυασμοί (K,L) είναι πιο παραγωγικοί. Ειδικότερα εδώ βρίσκεται στο πάνω σύνορο $A:(K=0, L=1)$, όπου η μικρότερη ισοσταθμική της $C = 2K + L$ συναντάει την περιοχή $Q \geq 1$, με $C = 2\cdot 0 + 1 = 1$. Στο άλλο σύνορο $B:(K=1, L=0)$, το κόστος είναι μεγαλύτερο: $C = 2\cdot 1 + 0 = 2$.





Παρατήρηση.

1. Η συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κανονική ως προς την κυρτότητα.
2. Οι δύο συντελεστές παραγωγής είναι πλήρως υποκατάστατοι. Καθώς οι τιμές μεταβάλλονται η λύση πηγαίνει από την μια κορυφή στην άλλη. Αγνοεί το ενδιάμεσο τμήμα.
3. Ενδιάμεσοι συνδυασμοί των συντελεστών είναι λιγότερο παραγωγικοί.

▲

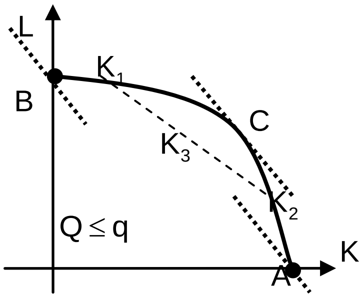
4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L)=K^{3/2}+8L^{3/2}$ **όπου** $\{K\geq 0, L\geq 0\}$ **είναι οι ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών παραγωγής.**

α) Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να σχολιαστεί.

β) Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο συντελεστών είναι $\{v,w\}$ **αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο παραγωγής** q**.**

Λύση.



α) Η εξίσωση ισοπαραγωγής ανήκει στην γνωστή κατηγορία των εξισώσεων του τύπου:

$x^\alpha + y^\alpha = c$, με $\alpha>1$

Παριστάνεται με την μαύρη γραμμή στο γράφημα.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κανονική. Είναι κυρτή αντί κοίλη. Οι κάτω σταθμικές της: $\{Q\leq q\}$ είναι κυρτές περιοχές, με αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και από την διακεκομμένη γραμμή στο γράφημα, **ενδιάμεσοι συνδυασμοί των συντελεστών παραγωγής** $\{K_3\}$ **να είναι λιγότερο παραγωγικοί από ακραίους συνδυασμούς** $\{K_1,K_2\}$**.**

β) Η λύση ελάχιστης δαπάνης βρίσκεται πάντοτε σένα από τα συνοριακά σημεία $\{A,B\}$. (Το περιορισμένο στάσιμο C δίνει μέγιστη δαπάνη). Υπολογίζουμε την αντίστοιχη δαπάνη στα δύο συνοριακά σημεία:

$$A:\{K^{3/2}+8L^{3/2}=q,\ L=0\}\Rightarrow\{K=q^{2/3}, L=0\},\ C_A=vK+wL=vq^{2/3}$$

$$B:\{K^{3/2}+8L^{3/2}=q,\ K=0\}\Rightarrow\{K=0, L=8^{2/3}q^{2/3}\},\ C_B=vK+wL=w4q^{2/3}$$

Η ελάχιστη δαπάνη είναι:

$$c=\min\{C_A,C_B\}=\min\{vq^{2/3},w4q^{2/3}\}=\begin{cases}C_A=vq^{2/3} & \text{αν } v\leq 4w\\ C_B=w4q^{2/3} & \text{αν } v\geq 4w\end{cases}$$

Έτσι, θα χρησιμοποιηθεί μόνο το $K^*=q^{2/3}$ **αν** $v\leq 4w$**, μόνο το** $L^*=4q^{2/3}$ **αν** $v\geq 4w$**.**

5.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$\min\{C=vK+wL \,||\, Q=K^\rho+L^\rho=q\}$ **με** $0<\rho<1$

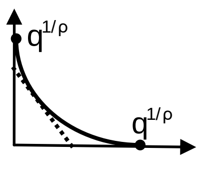
όπου $\{v,w\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας:** $\{K,L\}$ **αντίστοιχα.**

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπύλων ισοπαραγωγής.

2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K/L **εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w

__Λύση.__ Οι συγκεκριμένες καμπύλες ισοπαραγωγής έχουν την γνωστή μορφή του παρακάτω σχήματος. Ειδικότερα κόβουν τους δύο άξονες εφαπτομενικά, επειδή έχουμε $0<\rho<1$.

$$\frac{C_K}{C_L}=\frac{Q_K}{Q_L}\Rightarrow\frac{v}{w}=\frac{\rho K^{\rho-1}}{\rho L^{\rho-1}}\Rightarrow\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1}=\frac{v}{w}\Rightarrow\frac{K}{L}=\left(\frac{w}{v}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$



Παρατηρούμε ότι ο βέλτιστος λόγος συμμετοχής των συντελεστών εξαρτάται μόνο από τον λόγο των αντίστοιχων μοναδιαίων τιμών, είναι αντιστρόφως ανάλογος. ▲

6.

Ένα μονοπώλιο που λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης: $\{V = 5 - Y,\ W = 4 - 2X\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος: $C = 2 + 2(X + Y)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους $\Pi(X, Y)$, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

β) Να βρεθούν οι τιμές διάθεσης του προιόντος στις δύο αγορές για μέγιστο κέρδος.

γ) Το κέρδος θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο αν επιβληθεί ενιαία τιμή στις δύο αγορές; Να γίνουν και τα σχετικά γραφήματα.

Λύση.

(α) $\Pi = WX + VY - C = (4 - 2X)X + (5 - Y)Y - [2 + 2(X + Y)]$

$$-2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2$$

Είναι παραβολική συνάρτηση με παραγώγους:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_X = 2 - 4X \\ \Pi_Y = 3 - 2Y\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Pi_{XX} = -4 < 0 \\ \Pi_{YY} = -2 < 0 \\ \Pi_{XY} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = \Pi_{XX}\Pi_{YY} - \Pi_{XY}^2 = (-4)(-2) - (0)^2 = 8 > 0$$

Ο εσσιανός πίνακας της δεύτερης παραγώγου είναι αρνητικά ορισμένος, και επομένως η συνάρτηση κέρδους είναι γνήσια κοίλη. Οι ισοσταθμικές της είναι όρθιες ελλείψεις με το ίδιο κέντρο στο στάσιμο, όπου η συνάρτηση κέρδους θα έχει και την μέγιστη τιμή:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_X = 2 - 4X = 0 \\ \Pi_Y = 3 - 2Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}X_0 = 1/2 = 0.5 \\ Y_0 = 3/2 = 1.5\end{array}\right\}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να το βρούμε συμπληρώνοντας τα τετράγωνα. Οι ελλείψεις έχουν την μεγάλη ακτίνα στη $y-$κατεύθυνση διότι ο συντελεστής του Y^2 είναι μικρότερος από τον συντελεστή του X^2. Βέβαια, ισχύει μόνο το τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στη θετική περιοχή, όπως φαίνεται στο γράφημα παρακάτω.

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την λύση ως χωριζομένων μεταβλητών.

▲

β) Το κέρδος θα είναι μέγιστο στο στάσιμο, που είναι το παραπάνω κέντρο. Οι αντίστοιχες τιμές των προιόντων θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l}V_0 = 5 - Y_0 \\ W_0 = 4 - 2X_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}V_0 = 5 - 1.5 = 3.5 \\ W_0 = 4 - 2(0.5) = 3\end{array}\right\}$$

με κέρδος:

$$\Pi_0 = -2 + 2X_0 + 3Y_0 - 2X_0^2 - Y_0^2 = -2 + 2(0.5) + 3(1.5) - 2(0.5)^2 - (1.5)^2 = 0.75 = \frac{3}{4}$$

γ). Το κέρδος θα είναι μικρότερο αν επιβληθεί ενιαία τιμή. Η ενιαία τιμή είναι περιορισμός στις επιλογές και επομένως ελαττώνει το μέγιστο κέρδος.

Παρατήρηση. Αν η τιμή είναι ενιαία τότε θα έχουμε τον περιορισμό:

$$W = V \Rightarrow 4 - 2X = 5 - Y \Rightarrow Y = 1 + 2X$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση κέρδους βρίσκουμε το κέρδος ως συνάρτηση μόνο του X:

$$\Pi = -2 + 2X + 3(1 + 2X) - 2X^2 - (1 + 2X)^2 = 4X - 6X^2$$

Είναι κοίλη με μέγιστο κέρδος στο στάσιμο:

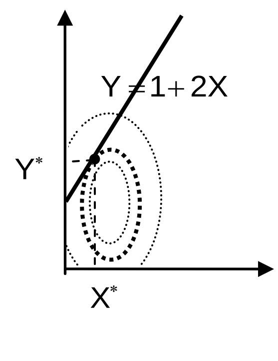
$$\Pi' = 4 - 12X = 0 \Rightarrow \{X = 1/3,\ Y = 1 + 2/3\}$$

και ενιαία τιμή: $W = V = 10/3 = 3.33$, ενδιάμεση

Το κέρδος είναι:

$$\Pi = 4(1/3) - 6(1/3)^2 = 2/3,$$

μικρότερο από προηγουμένως. Γραφικά η λύση βρίσκεται στο σημείο όπου η πρώτη έλλειψη των ισοσταθμικών του κέρδους συναντάει εφαπτομενικά την ευθεία του περιορισμού.



▲

7.

Ένα μονοπώλιο που λειτουργεί μεγιστοποιώντας τα κέρδη του διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης $\{V = 1-2X,\ W = 4-Y\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος $C = 2+2(X+Y)$.

1. Να διατυπωθεί η συνάρτηση κέρδους, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

2. Να βρεθούν αναλυτικά και γεωμετρικά οι ποσότητες διάθεσης στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

3. Να υπολογιστεί το κέρδος.

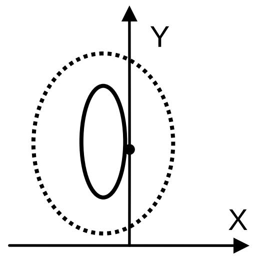
Λύση.

1. Συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = R - C = VX + WY - C = (1-2X)X + (4-Y)Y - [2+2(X+Y)] = -2 - X + 2Y - 2X^2 - Y^2$$

Είναι παραβολική κοίλη με μαθηματικό μέγιστο εκτός της θετικής περιοχής, στο στάσιμο:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -1-4X = 0 \\ f_y &= +2-2Y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} X &= -1/4 < 0 \\ Y &= 1 > 0 \end{aligned}\right\}$$



και με ελλειπτικές ισοσταθμικές όπως στο γράφημα.

2. Το μέγιστο της συνάρτησης κέρδους βρίσκεται γεωμετρικά στο πρώτο σημείο επαφής μιας ισοσταθμικής με την θετική περιοχή που αποτελεί την περιοχή επιλογής. Δίνεται από την μαύρη διακεκομένη ισοσταθμική. Εφόσον το στάσιμο έχει αρνητική $X-$συντεταγμένη, το μέγιστο θα είναι συνοριακό με $X = 0$:

$$\{X^* = 0,\ Y^* = 1\} \Rightarrow \Pi^* = -1$$

3. Έχουμε ζημιά. Η επιχείρηση δεν είναι κερδοφόρος. Η ζημιά οφείλεται στο σταθερό κόστος που είναι: $FC = 2$. Το λειτουργικό κέρδος καλύπτει μόνο το μισό του σταθερού κόστους.

Παρατήρηση. Μπορεί να λυθεί και ως πρόβλημα χωριζομένων μεταβλητών, οπότε έχουμε την ισοδυναμία του παραπάνω προβλήματος:

$$\max\{\Pi = -2 - X + 2Y - 2X^2 - Y^2 \mid\mid X \geq 0, Y \geq 0\}$$

με τα δύο προβλήματα:

1. $\max\{\Pi_1 = -2 - X - 2X^2 \mid\mid X \geq 0\} \Rightarrow X^* = 0$, συνοριακό
2. $\max\{\Pi_2 = 2Y - Y^2 \mid\mid Y \geq 0\} \Rightarrow Y^* = 1$, στάσιμο εσωτερικό

▲

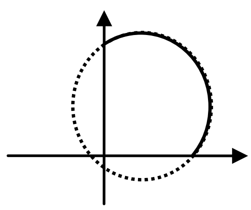
8.

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 2 - X$ και $W = 4 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{w, v\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

Λύση



α) $\Pi = (2-X)X + (4-Y)Y - (X+Y) = X + 3Y - X^2 - Y^2$

Οι ισοσταθμικές είναι κυκλικές με κέντρο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi_X = 1 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1/2$$

$$\Pi_Y = 3 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 3/2$$

Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή. Βρίσκεται και με συμπλήρωση τετραγώνων

β). Η συνάρτηση κέρδους είναι παραβολική κοίλη με μέγιστο στο παραπάνω στάσιμο. Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$\{v = 2 - 1/2 = 3/2,\ w = 4 - 3/2 = 5/2\}$$

▲

9.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X,Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v,w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = 2\sqrt{X} + \sqrt{Y} \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

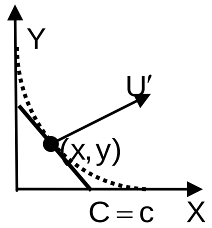
α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ γραφικά και αναλυτικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx/wy, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v/w.

Λύση

α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα παρακάτω. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη. Εφόσον δεν ζητείται ο πολλαπλασιαστής Lagrange, την βρίσκουμε από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{C_X}{C_Y} \\ C = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{1/\sqrt{X}}{1/2\sqrt{Y}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}Y = v^2X/4w^2 \\ vX + v^2X/4w = c\end{matrix}\right\}$$



$$\Rightarrow \left\{x = \frac{4cw}{4vw + v^2},\ y = \frac{cv}{vw + 4w^2}\right\}$$ είναι η λύση

β) Για τον λόγο συμμετοχής των δύο αγαθών στη συνολική δαπάνη, βρίσκουμε:

$$\frac{vx}{wy} = \frac{\dfrac{4wvc}{4wv + v^2}}{\dfrac{wvc}{4w^2 + wv}} = \frac{4(4w^2 + wv)}{4wv + v^2} = 4\frac{w}{v} = 4\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

Εξαρτάται μόνο από το λόγο των τιμών.

Παρατήρηση. Η παραπάνω σχέση βρίσκεται και απευθείας από την εξίσωση περιορισμένης στασιμότητας:

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{C_X}{C_Y} \Rightarrow \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{v}{w} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4w^2}{v^2} \Rightarrow \frac{vx}{wy} = \frac{4w}{v}$$

▲

10.

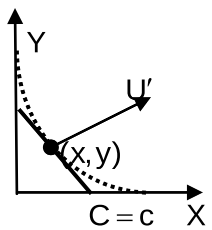
Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X,Y\}$ με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v,w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = \sqrt{X} + 2\sqrt{Y} \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ γραφικά και αναλυτικά.

Λύση

Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα παραπλεύρως. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη. Εφόσον δεν ζητείται ο πολλαπλασιαστής Lagrange, την βρίσκουμε και από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας:



$$\left.\begin{matrix}\dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{C_X}{C_Y} \\ C = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{\sqrt{Y}}{2\sqrt{X}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}Y = 4v^2X/w^2 \\ vX + 4v^2X/w = c\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{x = \frac{cw}{vw + 4v^2},\ y = \frac{4cv}{w^2 + 4vw}\right\}$$ είναι η λύση

Οι συναρτήσεις της λύσης $\{x(v,w,c),\, y(v,w,c)\}$ εκφράζουν την ζήτηση αγαθών ως συνάρτηση των τιμών τους και του διαθέσιμου εισοδήματος για δαπάνη.

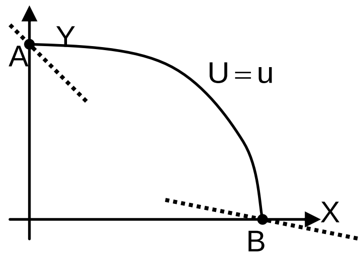
11.

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X,Y)=\ln(X^{5/2}+4Y^{5/2})$ **όπου** $\{X\geq 0, Y\geq 0\}$ **είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών.**

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας.

β). Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών είναι $\{v,w\}$ **αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης** $\{X^*,Y^*\}$ **των δύο αγαθών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο χρησιμότητας** u**.**

Λύση.



α). Οι ισοσταθμικές της είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της ομογενούς $V=X^{5/2}+4Y^{5/2}$ που ως γνωστό έχουν το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος, διότι η δύναμη $5/2$ είναι μεγαλύτερη της μονάδος. Ειδικότερα η συνάρτηση χρησιμότητας είναι οιονεί κυρτή αντί οιονεί κοίλη ως συνήθως.

β). Όπως φαίνεται και στο γράφημα η κατανάλωση με το μικρότερο κόστος θα βρίσκεται πάντοτε στο σύνορο, σένα από τα δύο σημεία:

$$A:\{X=0,\ln(X^2+4Y^2)=u\}\Rightarrow\{X=0,\ln(4Y^2)=u\}\Rightarrow\{X=0,Y=e^{u/2}/2\}$$

$$B:\{Y=0,\ln(X^2+4Y^2)=u\}\Rightarrow\{Y=0,\ln(X^2)=u\}\Rightarrow\{X=e^{u/2},Y=0\}$$

Τα αντίστοιχα κόστη είναι:

$$V_A=vX+wY=wY=we^{u/2}/2 \quad \text{και} \quad V_B=vX+wY=vX=ve^{u/2}$$

Επομένως θα έχουμε κατανάλωση στο A με $X^*=0$ αν $V_A\leq V_B\Rightarrow we^{u/2}/2\leq ve^{u/2}\Rightarrow w\leq 2v$, στο B με $Y^*=0$ αν ισχύει το αντίθετο.

▲

12.

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X,Y) **με συνάρτηση κόστους:** $C(X,Y)=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2$**.**

α). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

β). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης του εσόδου:

$$\max\{R=2X+Y \,\|\, C=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2\leq 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

Λύση.

α) Έχουμε: $C=1+H^2$ όπου: $H(X,Y)=X^{1/2}+Y^{1/2}$

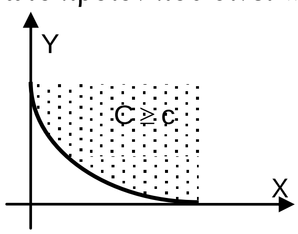
Επομένως οι ισοσταθμικές της C είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της H. Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής

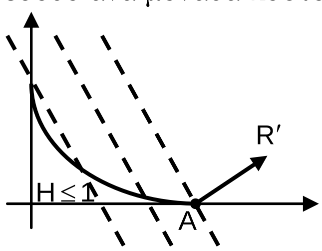
$$x^\alpha+y^\alpha \quad \text{με } \alpha<1$$

Οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα του πρώτου από τα παρακάτω δύο γραφήματα, με τις πάνω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής C.

Η C είναι οιονεί κοίλη και ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Η συνάρτηση κόστους δεν είναι κανονική ως προς την κυρτότητα. Ενδιάμεσες ποσότητες έχουν υψηλότερο κόστος.

β). Τέλος,η λύση του προβλήματος είναι **συνοριακή** στο κάτω σύνορο $A:(X=1,Y=0)$, όπου η μεγαλύτερη ισοσταθμική της $R=2X+Y$ συναντάει την περιοχή $C\leq 2\Rightarrow H\leq 1$. Παράγεται μόνο το πρώτο προιόν που δίνει «σχετικά» μεγαλύτερο έσοδο ανά μονάδα κόστους.





13.

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ **με συνάρτηση παραγωγής** $Q = KL$**, και με κόστος** $C = vK + wL$**. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος αν η μοναδιαία τιμή του προιόντος είναι** p

Λύση.

Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = pKL - vK - wL$$

έχει το στάσιμο:

$$\left.\begin{matrix} \Pi_K = pL - v = 0 \\ \Pi_L = pK - w = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} K = w/p \\ L = v/p \end{matrix}\right\} \text{ με } \Pi = p\frac{w}{p}\frac{v}{p} - v\frac{w}{p} - w\frac{v}{p} = -\frac{vw}{p} < 0$$

Προφανώς δεν είναι μέγιστο διότι έχουμε $\{K = 0, L = 0\} \Rightarrow \Pi = 0$.

Εξάλλου ο Εσσιανός πίνακας μας δίνει όχι ακρότατο:

$$\Pi_{KK} = 0,\ \Pi_{LL} = 0,\ \Pi_{KL} = p\ \&\ \Delta = \Pi_{KK}\Pi_{LL} - \Pi_{KL}^2 = -p < 0 : \text{σαγματικό}$$

Το μέγιστο θα βρίσκεται στο σύνορο ή στο άπειρο. Στο σύνορο έχουμε:

$$K = 0 \Rightarrow \Pi = -wL < 0 \quad \text{και} \quad L = 0 \Rightarrow \Pi = -vK < 0$$

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο, και είναι άπειρο, όπως διαπιστώνουμε π.χ. αν πάρουμε:

$$K = L \Rightarrow \Pi = pL^2 - (v + w)L \to +\infty\ .$$

14.

Μια παραγωγική μονάδα λειτουργεί με συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ **χρησιμοποιώντας δύο συντελεστές παραγωγής: κεφάλαιο** K **με μοναδιαίο κόστος** v **και εργασία** L **με μοναδιαίο κόστος** w**. Αν το προιόν διατίθεται με μοναδιαία τιμή** p**, να βρεθεί το μέγιστο κέρδος στις παρακάτω περιπτώσεις:**

α) $Q = \sqrt{K} + 2\sqrt{L}$ **β)** $Q = KL$ **γ)** $Q = K + 2L$

Λύση. Σε κάθε περίπτωση θα λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους:

$$\text{κέρδος} = \text{έσοδο - κόστος} \Rightarrow \max_{K,L}\{\Pi(K,L) = pQ(K,L) - vK - wL \parallel K \geq 0,\ L \geq 0\}$$

α) $Q = \sqrt{K} + 2\sqrt{L} \Rightarrow \Pi = p(\sqrt{K} + 2\sqrt{L}) - vK - wL\}$

Η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη (ως άθροισμα κοίλων) και το μέγιστο βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$$\left.\begin{matrix} \Pi_K = 0 \\ \Pi_L = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} pQ_K = v \\ pQ_L = w \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p/2\sqrt{K} = v \\ p/\sqrt{L} = w \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} K^* = p^2/4v^2 \\ L^* = p^2/w^2 \end{matrix}\right\}$$

Βρήκαμε στάσιμη λύση και επομένως το μέγιστο κέρδος είναι:

$$\Pi^* = p(\sqrt{K^*} + 2\sqrt{L^*}) - vK^* - wL^* = p\left(\frac{p}{2v} + 2\frac{p}{w}\right) - v\frac{p^2}{4v^2} - w\frac{p^2}{w^2} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{v} + \frac{p^2}{w}$$

β) $Q = KL \Rightarrow \Pi = KL - vK - wL$

Η συνάρτηση παραγωγής είναι C-D βαθμού 2, αύξουσας απόδοσης κλίμακας, και δεν είναι κοίλη. Το στάσιμο είναι σαγματικό και δεν δίνει ακρότατο, ειδικότερα δεν δίνει μέγιστο. Το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο: $\{K \to \infty, L \to \infty\}$, με άπειρο κέρδος, όπως προκύπτει αν π.χ. πάρουμε $K = L$.

γ) $Q = K + 2L \Rightarrow \Pi = pK + 2pL - vK - wL = (p - v)K + (2p - w)L$

Η συνάρτηση κέρδους είναι γραμμική, και το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο αν $p > v$ ή $p > w/2$, αλλιώς βρίσκεται στο μηδέν: $K = 0, L = 0$

15.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους: $\max\{f = x^{1/2}y^{1/4} - wx - vy\}$**, στη θετική περιοχή** $\{x \geq 0, y \geq 0\}$**, με παραμέτρους:** $\{w > 0, v > 0\}$**. Να ερμηνευτεί και να βρεθεί η μέγιστη τιμή** f^* **ως συνάρτηση των παραμέτρων. Επίσης να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας αυτής της συνάρτησης.**

<u>Λύση.</u>

$$\left.\begin{aligned} f_x &= (1/2)x^{-1/2}y^{1/4} - w = 0 \\ f_y &= (1/4)x^{1/2}y^{-3/4} - v = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{-1/2}y^{1/4} &= 2w \\ x^{1/2}y^{-3/4} &= 4v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -(1/2)\ln x + (1/4)\ln y &= \ln 2w \\ (1/2)\ln x - (3/4)\ln y &= \ln 4v \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -\ln x &= 3\ln 2w + \ln 4v \\ -(1/2)\ln y &= \ln 2w + \ln 4v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ln x &= -\ln 32w^3v \\ \ln y &= -2\ln 8w^2v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^* &= 1/32w^3v \\ y^* &= 1/64w^2v^2 \end{aligned}\right\}$$

$$f^* = x^{*1/2}y^{*1/4} - wx^* - vy^* = \frac{1}{2^{5/2}w^{3/2}v^{1/2}2^{6/4}w^{1/2}v^{1/2}} - \frac{w}{2^5w^3v} - \frac{v}{2^6w^2v^2}$$

$$= \frac{1}{2^4w^2v} - \frac{1}{2^5w^2v} - \frac{1}{2^6w^2v} = 2^{-6}w^{-2}v^{-1}$$

Είναι φθίνουσα

▲

16

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ **αντίστοιχα, με συνολικό κόστος** $C = X + Y$**, και εξισώσεις ζήτησης:** $V = 2 - X$ **και** $W = 4 - Y$ **αντίστοιχα, όπου** $\{W, V\}$ **είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:** $\Pi(X, Y) = VX + WY - C(X, Y)$**.**

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

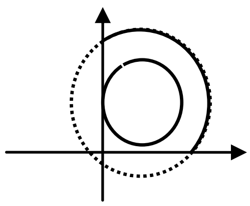
β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος:

1. στην περίπτωση που επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών,

2. στην περίπτωση που επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

Πότε θα είναι το κέρδος μεγαλύτερο?

<u>Λύση</u>



α) $\Pi = (2 - X)X + (4 - Y)Y - (X + Y) = X + 3Y - X^2 - Y^2$

Είναι παραβολική συνάρτηση με κυκλικές ισοσταθμικές που έχουν όλες το κέντρο τους στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi_X = 1 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1/2$$

$$\Pi_Y = 3 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 3/2$$

Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή. Το κέντρο μπορεί να βρεθεί και με συμπλήρωση τετραγώνων.

β1) Η συνάρτηση κέρδους είναι **παραβολική κοίλη**. Αν επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών τότε το μέγιστο κέρδος βρίσκεται στο παραπάνω στάσιμο (εφόσον βρίσκεται στην θετική περιοχή), που μας δίνει και την βέλτιστη κατανάλωση:

$$\max\{\Pi = X + 3Y - X^2 - Y^2 \,\|\, X \geq 0, Y \geq 0\} \Rightarrow \{x = 1/2,\ y = 3/2\}.$$

Οι αντίστοιχες βέλτιστες μοναδιαίες τιμές είναι:

$$\{v = 2 - 1/2 = 3/2,\ w = 4 - 3/2 = 5/2\}$$

β2). Αν δεν επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών, τότε θα έχουμε τον περιορισμό:

$$V = W \Rightarrow 2 - X = 4 - Y \Rightarrow Y = 2 + X$$

Αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε κέρδος:

$$\Pi = X + 3(2 + X) - X^2 - (2 + X)^2 = 2 - 2X^2$$

με μέγιστο στο $\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{y} = 2 + 0 = 2$, και την ενιαία τιμή:

$$\tilde{v} = 2 - 0 = 2,\ \ \tilde{w} = 4 - 2 = 2$$

Δηλαδή στην πράξη το προιόν διατίθεται μόνο στη δεύτερη αγορά.

Παρατήρηση. Το κέρδος θα είναι μικρότερο όταν επιβάλλεται ενιαία τιμή, διότι **κάθε περιορισμός μικραίνει το μέγιστο της συνάρτησης κέρδους**. Πράγματι, έχουμε μέγιστα κέρδη αντίστοιχα:

$$\pi = \frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{10}{4} = 2.5, \qquad \tilde{\pi} = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - (0 + 2) = 2$$

▲

17. (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 3 - X$ και $W = 5 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{V, W\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y) = VX + WY - C(X,Y)$. Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

β) Επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές.

Λύση

α) Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = (3 - X)X + (5 - Y)Y - (X + Y) = 2X - X^2 + 4Y - Y^2$$

είναι παραβολική κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi_X = 2 - 2X = 0 \Rightarrow X = 1$$

$$\Pi_Y = 4 - 2Y = 0 \Rightarrow Y = 2$$

και αντίστοιχες τιμές:

$$\{V = 3 - 1 = 2,\ W = 5 - 2 = 3\}$$

Το κέρδος θα είναι: $\Pi = VX + WY - C = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (1 + 2) = 5$

β) Αν επιβάλλεται ενιαία τιμή στις δύο αγορές, τότε θα έχουμε τον περιορισμό:

$$V = W \Rightarrow 3 - X = 5 - Y \Rightarrow -X + Y = 2$$

οπότε έχουμε το πρόβλημα:

$$\max_{\{X,Y\}}\{\Pi = 2X - X^2 + 4Y - Y^2 \parallel Y - X = 2\}$$

Αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε το κέρδος ως συνάρτηση μόνο του X:

$$Y = X + 2 \Rightarrow \Pi = 2X - X^2 + 4(X + 2) - (X + 2)^2 = 4 + 2X - 2X^2$$

Είναι κοίλη παραβολική με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi' = 2 - 4X = 0 \Rightarrow X = 1/2,\ Y = 2 + 1/2 = 5/2,$$

Η ενιαία τιμή θα είναι:

$$V = 3 - 1/2 = 5/2,\ W = 5 - 5/2 = 5/2$$

Το κέρδος θα είναι:

$$\Pi = (5/2)(1/2) + (5/2)(5/2) - (1/2 + 5/2) = 5/4 + 25/4 - 6/2 = 18/4 = 4.5$$

Το κέρδος είναι τώρα μικρότερο διότι έχουμε περιορισμό.

▲

18

Μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί δύο συντελεστές παραγωγής $\{K,L\}$ **με συνάρτηση παραγωγής** $Q = K\sqrt{L}$**, και με κόστος** $C = 8K + L$**.**

3. Να βρεθεί η μέγιστη παραγωγή με επιτρεπτό κόστος $C = 300$

4. Να εκτιμηθεί η αύξηση της μέγιστης παραγωγής αν το επιτρεπτό κόστος αυξηθεί σε $C = 304$

Λύση

1. Το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{Q = K\sqrt{L} \,\|\, C = 8K + L = 300\}$$

λύνεται με τις συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας:

$$\Rightarrow \left.\frac{Q_K}{C_K} = \frac{Q_L}{C_L},\ C = c\right\} \Rightarrow \left.\frac{\sqrt{L}}{8} = \frac{K}{2\sqrt{L}},\ 8K + L = 300\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} L = 4K \\ 8K + L = 300 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(K^* = 25, L^* = 100\right)$$

$Q^* = K^*\sqrt{L^*} = 25\bullet\sqrt{100} = 250$, μέγιστη παραγωγή με επιτρεπτό κόστος $C = 300$

2. Για το νέο επιτρεπτό κόστος $C = 304$, μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία. Εναλλακτικά, επειδή η μεταβολή είναι **σχετικά μικρή**, μπορούμε να την **εκτιμήσουμε** χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστή Lagrange:

$$\left.\lambda = \frac{Q_K}{C_K} = \frac{\sqrt{L}}{8} = \frac{10}{8}\right\}$$

Από την ερμηνεία του πολλαπλασιαστή, βρίσκουμε:

$\lambda = \frac{dQ^*}{dC} \approx \frac{\Delta Q^*}{\Delta C} \Rightarrow \Delta Q^* \approx \lambda \Delta C = \frac{10}{8}4 = 5$, θα αυξηθεί **περίπου** η μέγιστη παραγωγή

▲