Φροντιστήριο.ΙΙΙ(Α)

1

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=x^{2/3}-wx$ **με** $\{w>0\}$**, στο θετικό διάστημα:** $x\geq 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

2

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=\ln(x+1)-wx$ **με** $\{w>0\}$ **, στο θετικό διάστημα:** $x\geq 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

3

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px^{3/2}-x$ **με** $\{p>0\}$ **, στο διάστημα:** $0\leq x\leq 2$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

4

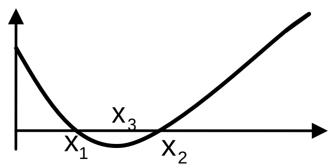
Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px^{1/2}-x^{-1}$ **με** $\{p>0\}$ **, στη θετική περιοχή:** $x\geq 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

5

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα**



1. Να γίνει το γράφημά της $f(x)$ **με** $f(0)=1$

2. Να εντοπιστεί το σημείο ελάχιστης τιμής της συνάρτησης $f(x)$

6

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=p\ln(x+1)-x-x^2$ **για** $x\geq 0$**, με** $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x=0$**.**

7

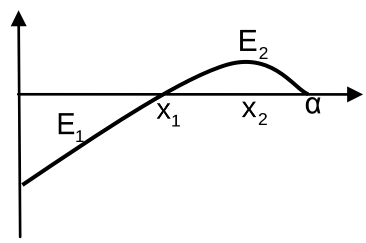
Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px-\sqrt{x}$ **για** $0\leq x\leq 2$**, με** $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x=2$

8

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα**



1. Να γίνει το γράφημά της $f(x)$ **με αρχική τιμή:** $f(0)=0$

2. Να εντοπιστεί το σημείο μέγιστης τιμής της συνάρτησης $f(x)$

Φροντιστήριο.ΙΙΙ(Α)-Λύσεις

1

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = x^{2/3} - wx$ **με** $\{w > 0\}$**, στο θετικό διάστημα:** $x \ge 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

Λύση. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $x^{2/3}$, με την γραμμική: $-wx$. Εξάλλου έχουμε:

$$f(x) = x^{2/3} - wx \Rightarrow f'(x) = 2x^{-1/3}/3 - w,\quad f''(x) = -2x^{-4/3}/9 < 0$$, αρνητική 2η παράγωγο

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, και το μέγιστο θα βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$$f'(x) = 2x^{-1/3}/3 - w = 0 \Rightarrow x^{-1/3} = 3w/2 \Rightarrow x = (3w/2)^{-3} = 8/27w^3 > 0,$$

Βρίσκεται στο θετικό διάστημα, και επομένως είναι η λύση: $x^* = 8/27w^3$

Η μέγιστη τιμή θα είναι: $f^* = f(x^*) = (x^*)^{2/3} - wx^* = \left(\frac{8}{27w^3}\right)^{2/3} - w\frac{8}{27w^3} = \left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right)\frac{1}{w^2} = \frac{4}{27w^2}$

2

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+1) - wx$ **με** $\{w > 0\}$ **, στο θετικό διάστημα:** $x \ge 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

Λύση. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $\ln(1+x)$, με την γραμμική: $-wx$. Εξάλλου έχουμε:

$$f(x) = \ln(1+x) - wx \Rightarrow f'(x) = (1+x)^{-1} - w,\quad f''(x) = -(1+x)^{-2} < 0$$, αρνητική 2η παράγωγο

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού.

1. Το μέγιστο θα βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$$f'(x) = (1+x)^{-1} - w = 0 \Rightarrow (1+x) = w^{-1} \Rightarrow x = w^{-1} - 1,$$

Βρίσκεται στο θετικό διάστημα μόνο αν $x = w^{-1} - 1 \ge 0 \Rightarrow w \le 1$ (διότι $w > 0$),

οπότε είναι και η λύση x^*, με μέγιστη τιμή: $f^* = f(x^*) = \ln(1 + w^{-1} - 1) - w(w^{-1} - 1) = w - 1 - \ln w$.

2. Το $x = 0$, θα είναι λύση $\Leftrightarrow f'(0) = 1 - w \le 0 \Rightarrow w \ge 1$

Καλύψαμε όλες τις τιμές της παραμέτρου Επομένως η λύση και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή θα είναι:

$$x^* = \begin{cases} w^{-1} - 1 & \text{αν } w \le 1 \\ 0 & \text{αν } w \ge 1 \end{cases} \Rightarrow f^* = f(x^*) = \begin{cases} w - \ln w - 1 & \text{αν } w \le 1 \\ 0 & \text{αν } w \ge 1 \end{cases}$$

3

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = px^{3/2} - x$ **με** $\{p > 0\}$ **, στο διάστημα:** $0 \le x \le 2$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

Λύση. Είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής: $px^{3/2}$ με την γραμμική: $-x$.

Εξάλλου έχει θετική 2η παράγωγο: $f(x) = px^{3/2} - x \Rightarrow f'(x) = 3px^{1/2}/2 - 1,\ f''(x) = 3px^{-1/2}/4 > 0$

Δεν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού. Το στάσιμο (αν υπάρχει) είναι ελάχιστο, και επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο: $\{0, 2\}$. Συγκρίνουμε τις τιμές:

$$\{f(0) = 0\} \quad \text{και} \quad \{f(2) = p2^{3/2} - 2 \ge 0 \Rightarrow p2^{3/2} \ge 2 \Rightarrow p \ge 2 \cdot 2^{-3/2} = 2^{-1/2}\}$$

Επομένως, η λύση και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι:

$$x^* = \begin{cases} 2 & \text{αν } p \ge 2^{-1/2} \\ 0 & \text{αν } p \le 2^{-1/2} \end{cases} \Rightarrow f^* = f(x^*) = \begin{cases} p2^{3/2} - 2 & \text{αν } p \ge 2^{-1/2} \\ 0 & \text{αν } p \le 2^{-1/2} \end{cases}$$

Παρατήρηση. Γενικά μπορούμε να χαρακτηρίσουμε καταρχήν τα σύνορα χρησιμοποιώντας την 1η παράγωγο:

$\{f'(0) \le 0,\ f'(2) \ge 0\}$ για μέγιστο

αλλά στο τέλος πάλι θα πρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές τους όταν είναι αμφότερα υποψήφια. Εκτός βέβαια αν έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού οπότε δεν μπορεί να είναι αμφότερα ταυτόχρονα υποψήφια.

4

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=px^{1/2}-x^{-1}$ **με** $\{p>0\}$ **, στη θετική περιοχή:** $x\geq 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

Λύση.

Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $px^{1/2}$ με την κοίλη : $-x^{-1}$ (αρνητική της κυρτής x^{-1}).

Εξάλλου έχει αρνητική 2η παράγωγο: $f(x)=px^{1/2}-x^{-1}\Rightarrow f'(x)=px^{-1/2}/2+x^{-2},\;\; f''(x)=-px^{-3/2}/4-2x^{-3}<0$

Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, και βρίσκουμε:

$$f(x)=px^{1/2}-x^{-1}\Rightarrow f'(x)=p/2\sqrt{x}+x^{-2}>0$$

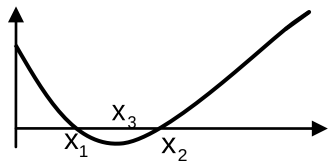
Η 1η παράγωγος είναι παντού γνήσια θετική, και επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο: $x^*\to+\infty$, όπου η μέγιστη τιμή είναι άπειρη: $f^*\to+\infty$. Εξάλλου δεν υπάρχει στάσιμο, ούτε η συνθήκη $f'(0)\leq 0$ ικανοποιείται.

5

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα**

1. Να γίνει το γράφημά της $f(x)$ **με** $f(0)=1$

2. Να εντοπιστεί το σημείο ελάχιστης τιμής της συνάρτησης $f(x)$

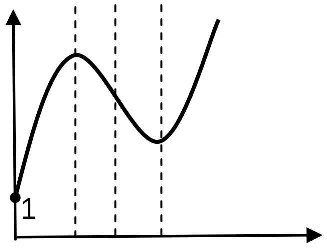


Λύση

1. Αρχίζοντας με την τιμή: $f(0)=1$, συνάρτηση $f(x)$ είναι:

α) **Μονοτονία.** Αύξουσα μέχρι το x_1 όπου η παράγωγος είναι θετική. Στη συνέχεια φθίνουσα μέχρι το x_2 που η παράγωγος είναι αρνητική. Μετά το x_2 είναι αύξουσα διότι η παράγωγος είναι θετική.

β) **Κυρτότητα.** Κοίλη μέχρι το ενδιάμεσο x_3 όπου η παράγωγος είναι φθίνουσα. Μετά είναι κυρτή διότι η παράγωγος είναι αύξουσα. Το x_3 όπου αλλάζει γνήσια η κυρτότητα είναι σημείο καμπής.



2. Η συνάρτηση έχει δύο τοπικά ελάχιστα, στο 0 και στο x_2. Το ερώτημα είναι ποιο είναι μικρότερο. Η συνάρτηση $f(x)$ προκύπτει από την $f'(x)$ με ολοκλήρωση, και σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, έχουμε:

$$f(x_2)-f(0)=\int_0^{x_2}f'(x)dx=E_1-E_2$$ =προσημασμένο εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Το θετικό εμβαδό E_1 μέχρι το x_1 είναι μεγαλύτερο από το αρνητικό εμβαδό E_2 μεταξύ των $\{x_1,x_2\}$, και επομένως:

$$E_1-E_2>0\Rightarrow f(x_2)-f(0)>0\Rightarrow f(x_2)>f(0)$$

Επομένως $x=0$ είναι το σημείο ελάχιστης τιμής.

6

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x)=p\ln(x+1)-x-x^2$ **για** $x\geq 0$**, με** $p>0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x=0$**.**

Λύση

1. Η συνάρτηση είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης $\ln(1+x)$, της κοίλης $-x^2$ (αρνητική κυρτής) και της γραμμικής $-x$. Εναλλακτικά: η 2η παράγωγος είναι αρνητική: $f'(x)=\dfrac{p}{1+x}-1-2x,\; f''=-\dfrac{p}{(1+x)^2}-2<0$

2. Το max κοίλης συνάρτησης είναι πρόβλημα ΚΠ και η λύση θα είναι:

$$x=0\Leftrightarrow f'(0)\leq 0\Rightarrow p-1\leq 0\Rightarrow p\leq 1$$

<u>7</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = px - \sqrt{x}$ **για** $0 \le x \le 2$**, με** $p > 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή της βρίσκεται στο** $x = 2$

Λύση

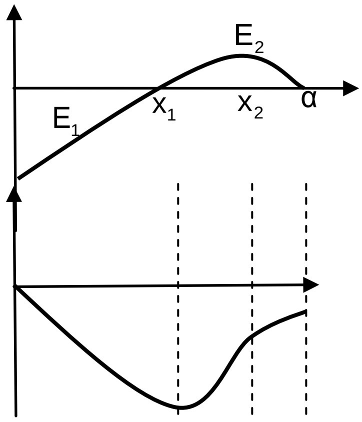
1. Η συνάρτηση είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής $-\sqrt{x}$ (αρνητική κοίλης) και της γραμμικής px.

Εναλλακτικά, η 2η παράγωγος είναι θετική: $f(x) = px - x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = p - \frac{1}{2}x^{-1/2},\ f''(x) = \frac{1}{4}x^{-3/2} > 0$

2. Το μέγιστο κυρτής είναι οπωσδήποτε συνοριακό: $\{0 \text{ ή } 2\}$. (Το στάσιμο, αν υπάρχει, είναι ελάχιστο)

Θα βρίσκεται στο δεξιό σύνορο $x = 2 \Leftrightarrow f(2) \ge f(0) \Rightarrow p2 - \sqrt{2} \ge 0 \Rightarrow p \ge 1/\sqrt{2}$.

<u>8</u>



Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$ **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα**

1. Να γίνει το γράφημά της $f(x)$ **με αρχική τιμή:** $f(0) = 0$

2. Να εντοπιστεί το σημείο μέγιστης τιμής της συνάρτησης $f(x)$

Λύση

1. Αρχίζοντας με την τιμή: $f(0) = 0$, συνάρτηση $f(x)$ είναι:

α) Όσον αφορά **μονοτονία,** φθίνουσα μέχρι το x_1 που η παράγωγος είναι αρνητική. Στη συνέχεια αύξουσα μέχρι το α που η παράγωγος είναι θετική. Το στάσιμο x_1 όπου αλλάζει το πρόσημο της παραγώγου από αρνητικό σε θετικό είναι τοπικό ελάχιστο.

β) Όσον αφορά **κυρτότητα,** είναι κυρτή μέχρι το x_2 που η παράγωγος είναι αύξουσα. Στη συνέχεια κοίλη διότι η παράγωγος είναι φθίνουσα. Το x_2 όπου αλλάζει γνήσια η κυρτότητα είναι σημείο καμπής.

2. Η συνάρτηση έχει δύο τοπικά μέγιστα, στα συνοριακά σημεία 0 και α. Η τιμή στο 0 είναι μεγαλύτερη διότι η συνάρτηση $f(x)$ προκύπτει από την $f'(x)$ με ολοκλήρωση, και σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, έχουμε:

$$f(\alpha) - f(0) = \int_0^{\alpha} f'(x)dx = -E_1 + E_2$$ =**προσημασμένο εμβαδό** μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Το αρνητικό εμβαδό E_1 μέχρι το x_1 είναι μεγαλύτερο από το θετικό εμβαδό E_2 μεταξύ των $\{x_1, \alpha\}$, οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι αρνητικό:

$$-E_1 + E_2 < 0 \Rightarrow f(\alpha) - f(0) < 0 \Rightarrow f(\alpha) < f(0)$$

Επομένως $x = 0$ είναι το σημείο μέγιστης τιμής $f(0) = 0$. Η συνάρτηση έχει παντού αρνητικές τιμές.