Φροντιστήριο.Ι(Α)

1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \min\{f(x) = x^{-1},\ g(x) = 4x^{-2}\}$ **στο θετικό διάστημα:** $x \geq 0$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθούν η 1η και η 2η παράγωγος

3. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή

2

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \max\{x^2, x^3\}$ **στο θετικό διάστημα:** $x \geq 0$

1. Να γίνει το γράφημά της.

2. Να βρεθεί η 1η και η 2η παράγωγος

3. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή

3

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = (1+x)^{3/2}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Στο σημείο $x = 0$ **να υπολογιστεί η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης**

3. Στο σημείο $x = 0$ **να υπολογιστεί η 2η παράγωγος και η παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης**

4

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x$

1. Να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση στο $x_0 = 1$

2. Να εκτιμηθεί η τιμή του $\ln(0.9)$

5

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί η γραμμική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$

3. Να βρεθεί και η παραβολική της προσέγγιση στο ίδιο σημείο: $x_0 = 0$

6

Θεωρούμε την εξίσωση: $x = y^3 + 1$ **στην θετική περιοχή:** $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $y = y(x)$ **που ορίζεται πλεγμένα από την παραπάνω εξίσωση, στο σημείο:** $(x_0 = 9,\ y_0 = 2)$

7

Η συνάρτηση $y = y(x)$ **ορίζεται πλεγμένα με την εξίσωση** $x + y^3 = 3$**. Να βρεθούν στο σημείο** $(x_0 = 2, y_0 = 1)$**:**

1. Η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης

2. Η 2η παράγωγος και η παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης

8

Η συνάρτηση $y = y(x)$ **ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση:** $x = y^2 + y + 1$**. Να βρεθούν η 1η και η 2η παράγωγος στο σημείο:** $(x = 3, y = 1)$

9

Στο επίπεδο των (x, y) **θεωρούμε την παραμετρική καμπύλη:** $\{x = \ln t,\ y = t^2 + 1\}$

1. Να βρεθεί η εξίσωση και το γράφημα της καμπύλης στο επίπεδο των (x, y)

2. Να υπολογιστεί η παράγωγος του x **ως προς** y **στο σημείο με** $t = 2$

10

Στο επίπεδο των (x,y) **θεωρούμε την παραμετρική καμπύλη:** $\{x = e^t + 1,\ y = t + 1\}$

1. Να βρεθεί η εξίσωση και το γράφημα της τροχιάς στο επίπεδο των (x,y)

2. Να υπολογιστεί η παράγωγος του x **ως προς** y **στο σημείο με** $t = 1$

11

Στο επίπεδο των (x,y) **θεωρούμε τα δύο σημεία** $A_0 : (x_0 = 1,\ y_0 = 2)$**,** $A_1 : (x_1 = 3,\ y_1 = 8)$

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στα 2/3 της απόστασης από το A_0 **στο** A_1

12

Στο επίπεδο των (x,y) **θεωρούμε τα δύο σημεία** $A_0 : (x_0 = 1,\ y_0 = 2)$**,** $A_1 : (x_1 = 3,\ y_1 = 8)$

1. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τα δύο σημεία

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο 1/3 της απόστασης από το A_0 **στο** A_1

3. Να γίνει και το σχετικό γράφημα.

13

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα, σχεδιάζοντας και το γράφημα της συνάρτησης.

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$$

14

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \min\{x^{-1}, x^{-2}\}$ **στη θετική περιοχή:** $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$**.**

Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$

15

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = x^{-1/2}$**,** $g(x) = x^{-2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$**, όπου:** $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

16

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = 4x^{-1/2}$**,** $g(x) = x^{3/2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**

17

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \min\{x, x^{-3/2}\}$ **για** $x \geq 0$**, και του** $x-$**άξονα.**

18

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης: $x = -y^2 + y$ **και των θετικών ημιαξόνων.**

19

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $(x+1)(y+2) = 4$ **και των θετικών ημιαξόνων.**

20

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = 2^{-x}$**,** $g(x) = 1/2$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**

21

Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)^2 x = 1$ **και των θετικών ημιαξόνων.**

22

Να υπολογιστούν:

1. Το όριο του $x\ln x$ **όταν** $x \to 0$,

2. Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x\ln x$

23

Θεωρούμε την εξίσωση $y = \ln x + 2$.

1. Να βρεθούν η εξίσωση μεταβολών και η εξίσωση διαφορικών

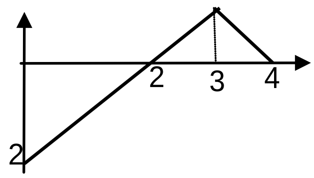
2. Να βρεθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το x **από την τιμή** $x = 1$, **ώστε το** y **να ελαττωθεί κατά** 0.1.

Να βρεθεί και η αντίστοιχη εκτίμηση χρησιμοποιώντας διαφορικά.

24.

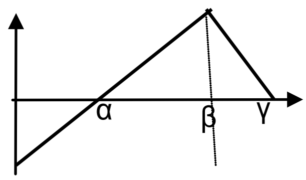
Θεωρούμε την εξίσωση $y = x + x^2$ **στο σημείο** $(x = 1, y = 2)$. **Να υπολογιστεί ο λόγος** $\Delta y / dy$ **αν το** x **μεταβληθεί από την τιμή** $x = 1$, **κατά** $\Delta x = dx : \{0.5,\ 0.1,\ 0.01\}$.

25



(α). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ **με τιμή:** $f(0) = 0$, **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα:** $0 \le x \le 4$. **Να υπολογιστεί η τιμή:** $f(4)$

26



Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ **με τιμή:** $f(0) = 0$, **της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα:** $0 \le x \le \gamma$.

Να βρεθούν:

1. Τα σημεία τοπικού μέγιστου

2. Τα σημεία καμπής

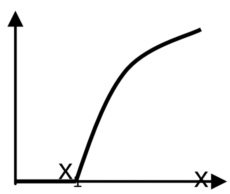
3. Το πρόσημο στην τιμή της $f(x)$ **στο σημείο** γ

27

Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω εξισώσεων στην θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1. $y = (x+1)^{1/3}$ **2.** $y = (x-1)^{1/3}$ **3.** $y = 1 - x^3$ **4.** $x^3 + y^3 = 2$ **5.** $y = 1 - x^{1/2}$ **6.** $y = 1 - x^3$

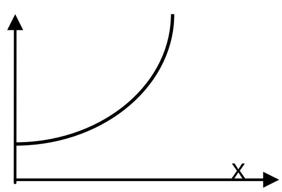
28



Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο διάστημα** $x \ge 0$, **και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων**

Οριακή τιμή: $Mf(x) = f'(x)$, **Μέση τιμή:** $Af(x) = f(x)/x$

29



Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο θετικό διάστημα** $x \ge 0$, **και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων**

Οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$, **Μέσης τιμής:** $Af(x) = f(x)/x$

30. Να βρεθούν στο σημείο $x = 0$, **η γραμμική και η παραβολική προσέγγιση των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:** $\arcsin x = \text{τοξημ}x$, $\arctan x = \text{τοξεφ}x$

31. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{αν } x\le 0 \\ x & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$

Να επεκταθεί στο διάστημα $[0,1]$ **με πολυώνυμο του ελάχιστου βαθμού, έτσι ώστε να είναι:**
α) συνεχής, β) και παραγωγίσιμη στο $x=0$**, γ) παραγωγίσιμη και στο** $x=1$**.**

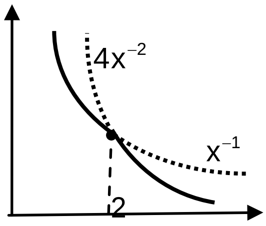
32. Να βρεθεί η (συνεχής) παράγουσα της συνάρτησης: $f(x)=\begin{cases} g(x)=x^2+3x & \text{αν } x\le 1 \\ h(x)=x & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$

ΤΕΛΟΣ

Φροντιστήριο.Ι(Α)-Λύσεις

1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \min\{f(x) = x^{-1},\ g(x) = 4x^{-2}\}$ **στο θετικό διάστημα:** $x \geq 0$



1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθούν η 1η και η 2η παράγωγος

3. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή

Λύση.

1. Αμφότερες οι συναρτήσεις είναι αρνητικές δυνάμεις.

Η $g(x) = 4x^{-2} = 4/x^2$ έχει μεγαλύτερη δύναμη στον παρονομαστή από την $f(x) = x^{-1} = 1/x$, οπότε κατεβαίνει πιο απότομα. Το γράφημα δίνεται από την συνεχόμενη μαύρη γραμμή του σχήματος με σημείο τομής:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x = 4$$

2. Βρίσκουμε την 1η και 2η παράγωγο:

$$h(x) = \min\left\{\frac{1}{x}, \frac{4}{x^2}\right\} = \begin{cases} x^{-1} & \text{αν } 0 < x \leq 4 \\ 4x^{-2} & \text{αν } x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} -x^{-2} & \text{αν } 0 < x \leq 4 \\ -8x^{-3} & \text{αν } x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow h''(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & \text{αν } 0 < x < 4 \\ 24x^{-4} & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

Η συνάρτηση έχει γωνία στο σημείο ένωσης $x = 4$, δηλαδή *η 1η παράγωγος έχει εκεί ασυνέχεια* με διαφορετική τιμή από τις δύο, πλευρές:

$$h'(4^-) = -4^{-2} = -1/16,$$
$$h'(4^+) = -8 \cdot 4^{-3} = -2/16,$$

οπότε η 2η παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο ένωσης.

3. Η συνάρτηση αποτελειται από δύο τμήματα. Το κάθε τμήμα είναι κυρτό, εξάλλου η 2η παράγωγος είναι θετική στο κάθε τμήμα. Αλλά στο σημείο ένωσης η 2η παράγωγος δεν ορίζεται, οπότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο της 1ης παραγώγου. Παρατηρούμε ότι στο σημείο αυτό η 1η παράγωγος δεν είναι αύξουσα , αλλά φθίνουσα:

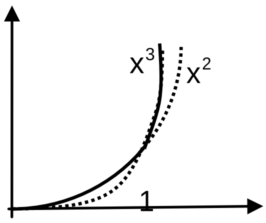
$$h'(4^-) = -1/16 > -2/16 = h'(4^+)$$

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

Σημ. Εξάλλου δεν ικανοποιείται και καμία από τις γεωμετρικές συνθήκες που αφορούν τις εφαπτόμενες και τις χορδές για κυρτές/κοίλες συναρτήσεις.

2

Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \max\{x^2, x^3\}$ **στο θετικό διάστημα:** $x \geq 0$



1. Να γίνει το γράφημά της.

2. Να βρεθεί η 1η και η 2η παράγωγος

3. Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή

Λύση

1. Ως μεγαλύτερη δύναμη, το x^3 είναι στην αρχή μικρότερο από το x^2, και στη συνέχεια μεγαλύτερο, μετά το σημείο τομής: $x^2 = x^3 \Rightarrow x = 1$. Εξάλλου για $x \geq 0$, έχουμε: $x^3 \geq x^2 \Leftrightarrow x \geq 1$. Το γράφημα δίνεται από την συνεχόμενη μαύρη γραμμή του σχήματος

2. Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$f(x) = \max\{x^2, x^3\} = \begin{cases} x^2 & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{για } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f' = \begin{cases} 2x & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{για } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'' = \begin{cases} 2 & \text{για } 0 \leq x < 1 \\ 6x & \text{για } x > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση έχει γωνία στο σημείο ένωσης $x = 1$, δηλαδή η 1η παράγωγος έχει ασυνέχεια, οπότε η 2η δεν ορίζεται.

2. Η συνάρτηση είναι κυρτή διότι το κάθε τμήμα της είναι κυρτό αλλά και στο σημείο ένωσης η 1η παράγωγος είναι αύξουσα:

$$f'(1^-) = 2 < 3 = f'(1^+)$$

Έτσι η 1η παράγωγος είναι παντού αύξουσα. Εξάλλου ικανοποιούνται αμφότερες οι γεωμετρικές συνθήκες που αφορούν τις εφαπτόμενες και τις χορδές για κυρτές συναρτήσεις. ▲.

<u>3</u>

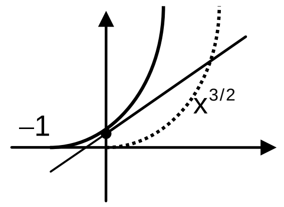
Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = (1 + x)^{3/2}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Στο σημείο $x = 0$ να υπολογιστεί η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης

3. Στο σημείο $x = 0$ να υπολογιστεί η 2η παράγωγος και η παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης

<u>**Λύση.**</u>



1. Η $f(x) = (x+1)^{3/2}$ προκύπτει από την δύναμη $x^{3/2}$ με οριζόντια μετατόπιση κατά -1, δηλαδή μετατόπιση προς τα αριστερά, κατά 1. Έχει τις παραγώγους:

$$f(x) = (1+x)^{3/2} \;,\; f'(x) = 3(1+x)^{1/2}/2 \qquad f''(x) = 3(1+x)^{-1/2}/4$$

Στο $x = 0$ βρίσκουμε, $f(0) = 1$, και:

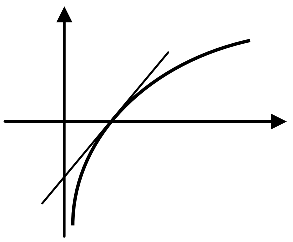
2. $f'(0) = 3/2 \Rightarrow f_{γρ} = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + 3x/2$, γραμμική προσέγγιση (εφαπτόμενη ευθεία)

3. $f''(0) = 3/4 \Rightarrow f_{παρ} = f(0) + f'(0)(x-0) + \dfrac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = 1 + 3x/2 + 3x^2/8$, παραβολική προσέγγιση

▲

<u>4</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x$



1. Να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση στο $x_0 = 1$

2. Να εκτιμηθεί η τιμή του $\ln(0.9)$

<u>**Λύση**</u>

1. $f(x) = \ln x\big|_{x=1} = 0,\; f'(x) = 1/x\big|_{x=1} = 1,\; f''(x) = -1/x^2\big|_{x=1} = -1$

$$f_{γρ}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x - 1$$

$$f_{παρ}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(x)(x-1) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

2. Η γραμμική προσέγγιση δίνει: $\ln(0.9) \approx (0.9 - 1) = -0.1$

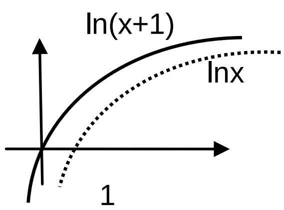
Η πραγματική τιμή είναι μικρότερη διότι η συνάρτηση είναι κοίλη όπως φαίνεται και στο γράφημα, οπότε βρίσκεται κάτω από την εφαπτόμενη ευθεία. Πράγματι η παραβολική προσέγγιση δίνει μικρότερη τιμή:

$$\ln(0.9) \approx (0.9-1) - \frac{1}{2}(0.9-1)^2 = -0.1 - (-0.1)^2/2 = -0.1 - (0.01)/2 = -0.1 - 0.005 = -0.105$$

▲

<u>5</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$



1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί η γραμμική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$

3. Να βρεθεί και η παραβολική της προσέγγιση στο ίδιο σημείο: $x_0 = 0$

<u>**Λύση**</u>

1. Το γράφημά της $\ln(x+1) = \ln(x+1)$ είναι αυτό της $\ln x$ μετατοπισμένο οριζοντίως κατά -1 , δηλαδή κατά 1 προς τα αριστερά, και διέρχεται από την αρχή του συστήματος. Έχουμε:

$$f(x) = \ln(x+1)\big|_{x=0} = \ln 1 = 0,\quad f'(x) = 1/(x+1)\big|_{x=0} = 1,\quad f''(x) = -1/(x+1)^2\big|_{x=0} = -1$$

1. $f_1(x) = f(0) + f'(0)x = 0 + 1x = x$, γραμμική προσέγγιση

2. $f_2(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + 1x - \dfrac{1}{2}x^2 = x - \dfrac{1}{2}x^2$, παραβολική προσέγγιση

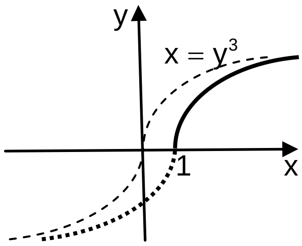
▲

6

Θεωρούμε την εξίσωση: $x = y^3 + 1$ **στην θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $y = y(x)$ **που ορίζεται πλεγμένα από την παραπάνω εξίσωση, στο σημείο:** $(x_0 = 9,\ y_0 = 2)$



Λύση.

1. Θεωρώντας το x ως συνάρτηση του y, το γράφημα είναι αυτό της $x = y^3$ μετατοπισμένη κατά 1 προς τα πάνω, δηλαδή προς τα δεξιά.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε ως προς y: $y^3 = x - 1 \Rightarrow y = (x-1)^{1/3}$

Το γράφημα προκύπτει ως αυτό της $y = x^{1/3}$, μετατοπισμένο κατά 1 προς δεξιά

2. Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο $y'(x)$ με τρεις τρόπους:

α) με πλεγμένη παραγώγιση ως προς x:

$$x = y^3 + 1 \Rightarrow 1 = 3y^2 y' \Rightarrow y' = 1/3y^2 = 1/3\cdot 2^2 = 1/12$$

β) ως ανάστροφο της:

$$x'(y) = 3y^2 \Rightarrow y'(x) = \left.\frac{1}{3y^2}\right|_{x=9,y=2} = \frac{1}{12}$$

γ) Παραγωγίζοντας απευθείας την λυμένη συνάρτηση που βρήκαμε παραπάνω:

$$y = (x-1)^{1/3} \Rightarrow y' = \left.\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}\right|_{x=9} = \frac{1}{3\cdot 8^{2/3}} = \frac{1}{12}$$

Τέλος βρίσκουμε και την γραμμική προσέγγιση

$$y_{\gamma\rho} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = 2 + (x-9)/12 = 5/4 + x/12$$, γραμμική προσέγγιση

▲

7

Η συνάρτηση $y = y(x)$ **ορίζεται πλεγμένα με την εξίσωση** $x + y^3 = 3$**. Να βρεθούν στο σημείο** $(x_0 = 2, y_0 = 1)$**:**

1. Η 1η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης

2. Η 2η παράγωγος και η παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης

Λύση. Το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση

1. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$(x + y^3)' = 3' \Rightarrow 1 + 3y^2 y'\Big|_{y=1} = 0 \Rightarrow 1 + 3y_0' = 0 \Rightarrow y_0' = -1/3$$

$$y_{\gamma\rho} = y_0 + y_0'(x - x_0) = 1 - (x-2)/3$$

2. Παραγωγίζοντας εκ νέου πλεγμένα, βρίσκουμε:

$$(1 + 3y^2 y')' = 0' \Rightarrow 3(2yy')y' + 3y^2 y''\Big|_{y=1, y'=-1/3} = 0 \Rightarrow 6(-1/3)^2 + 3y'' = 0 \Rightarrow y'' = -2/9$$

$$y_{\pi\alpha\rho} = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2}y_0''(x - x_0)^2 = 1 - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{9}(x-2)^2$$

Σημ. Εναλλακτικά πορούμε να λύσουμε πρώτα την εξίσωση ως προς y: $y = (3-x)^{1/3}$ και μετά να παραγωγίσουμε.

▲

8

Η συνάρτηση $y=y(x)$ ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση: $x=y^2+y+1$. Να βρεθούν η 1η και η 2η παράγωγος στο σημείο: $(x=3, y=1)$

Λύση. Καταρχήν ελέγχουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση.

1. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$x=y^2+y+1 \Rightarrow 1=2yy'+y'\Big|_{y=1} \Rightarrow 1=3y' \Rightarrow y'=1/3$$

2. Παραγωγίζοντας εκ νέου πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε:

$$1=2yy'+y' \Rightarrow 1'=(2yy'+y')' \Rightarrow 0=2y'y'+2yy''+y''\Big|_{y=1,y'=1/3}$$

$$\Rightarrow 0=2(1/3)^2+2y''+y''=0 \Rightarrow y''=-2/27$$

Σημ. Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση $y=y(x)$ λύνοντας αλγεβρικά την εξίσωση ως προς y

$$x=y^2+y+1 \Rightarrow y^2+y+(1-x)=0 \Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-x)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$$

Πήραμε το θετικό πρόσημο για να ικανοποιείται στο σημείο. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις παραγώγους.

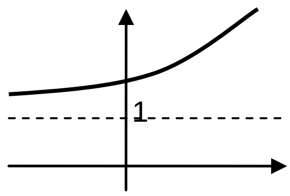
▲

9

Στο επίπεδο των (x,y) θεωρούμε την παραμετρική καμπύλη: $\{x=\ln t,\ y=t^2+1\}$

1. Να βρεθεί η εξίσωση και το γράφημα της καμπύλης στο επίπεδο των (x,y)

2. Να υπολογιστεί η παράγωγος του x ως προς y στο σημείο με $t=2$



Λύση. Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς t και αντικαθιστούμε στη 2η:

$$x=\ln t \Rightarrow t=e^x \quad \text{και} \quad y=(e^x)^2+1 \Rightarrow y=e^{2x}+1$$

Είναι η εκθετική e^{2x} μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά $+1$

Ο τύπος σχετιζόμενων ρυθμών μας δίνει για την παράγωγο: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{dx/dt}{dy/dt}=\dfrac{1/t}{2t}=\dfrac{1}{2t^2}\Big|_{t=2}=\dfrac{1}{8}$

Σημ. Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο: $t=2 \Rightarrow (x=\ln 2,\ y=5)$, και παραγωγίζουμε στην εξίσωση:

$$y=e^{2x}+1 \Rightarrow y'=2e^{2x}\Big|_{x=\ln 2}=2e^{2\ln 2}=2e^{\ln 4}=2\cdot 4=8 \Rightarrow x'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{8}$$

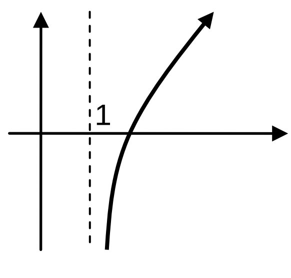
▲

10

Στο επίπεδο των (x,y) θεωρούμε την παραμετρική καμπύλη: $\{x=e^t+1,\ y=t+1\}$

1. Να βρεθεί η εξίσωση και το γράφημα της τροχιάς στο επίπεδο των (x,y)

2. Να υπολογιστεί η παράγωγος του x ως προς y στο σημείο με $t=1$



Λύση

1. Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς t και αντικαθιστούμε στη 2η:

$$x=e^t+1 \Rightarrow e^t=x-1 \Rightarrow t=\ln(x-1) \quad \text{και} \quad y=\ln(x-1)+1$$

Είναι ο λογάριθμος μετατοπισμένος δεξιά κατά 1 και επάνω κατά 1, με θετική φορά προς πάνω δεξιά, διότι τα (x,y) αυξάνουν με το t.

Σημ. Εναλλακτικά μπορούμε να λύσουμε την 2η εξίσωση ως προς t και να αντικαταστήσουμε στην 1η:

$$y=t+1 \Rightarrow t=y-1 \quad \text{και} \quad x=e^{y-1}+1 \Rightarrow e^{y-1}=x-1 \Rightarrow y-1=\ln(x-1) \Rightarrow y=\ln(x-1)+1$$

2. Ο τύπος σχετιζόμενων ρυθμών μας δίνει για την παράγωγο: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{dx/dt}{dy/dt}=\dfrac{e^t}{1}=e^t\Big|_{t=1}=e$

Σημ. Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο: $t=1 \Rightarrow (x=e+1,\ y=2)$, και παραγωγίζουμε στην εξίσωση:

$$y=\ln(x-1)+1 \Rightarrow y'=\frac{1}{x-1}\Big|_{x=e+1}=\frac{1}{e} \Rightarrow x'=\frac{1}{y'}=e$$

Σημ. Να γίνεται διάκριση μεταξύ των διαφορετικών συμβόλων: $y'=\dfrac{dy}{dx},\ \dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\ x'=\dfrac{dx}{dy},\ \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ ▲

11

Στο επίπεδο των (x,y) θεωρούμε τα δύο σημεία $A_0:(x_0=1,\ y_0=2)$, $A_1:(x_1=3,\ y_1=8)$

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στα 2/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1

Λύση

1. Η εξίσωση της ευθείας είναι: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\Rightarrow\dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{8-2}{3-1}\Rightarrow y-2=3(x-1)\Rightarrow 3x-y=1$

2. Το σημείο στα 2/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1, θα είναι ο κυρτός συνδυασμός τους με συντελεστές:

$(s_0=1/3,\ s_1=2/3)$

Επομένως θα έχει τις συντεταγμένες:

$$x_{2/3}=s_0x_0+s_1x_1=\frac{1}{3}1+\frac{2}{3}3=\frac{7}{3},\quad y_{2/3}=s_0y_0+s_1y_1=\frac{1}{3}2+\frac{2}{3}8=\frac{18}{3}=6,$$

που **ικανοποιούν** την εξίσωση.

Σημ. Εναλλακτικά, το σημείο μπορεί να βρεθεί θέτοντας $t=2/3$, στις παρακάτω σχέσεις:

$$x_{t=2/3}=x_0+t(x_1-x_0)=1+\frac{2}{3}(3-1)=\frac{7}{3},\quad y_{t=2/3}=y_0+t(y_1-y_0)=2+\frac{2}{3}(8-2)==6$$

▲

12

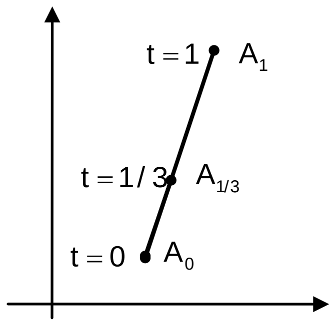
Στο επίπεδο των (x,y) θεωρούμε τα δύο σημεία $A_0:(x_0=1,\ y_0=2)$, $A_1:(x_1=3,\ y_1=8)$

1. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τα δύο σημεία

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο 1/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1

3. Να γίνει και το σχετικό γράφημα.

Λύση.



1. Η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\Rightarrow\frac{y-2}{x-1}=\frac{8-2}{3-1}\Rightarrow y-2=3(x-1)\Rightarrow 3x-y=1$$

Τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση. Το ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται από την παραπάνω ευθεία στο διάστημα: $x_0\le x\le x_1\Rightarrow 1\le x\le 2$

2. Το σημείο στο 1/3 της απόστασης από το A_0 στο A_1, θα είναι κυρτός συνδυασμός των δύο σημείων, με συντελεστές:

$(s_0=2/3,\ s_1=1/3)$

Επομένως θα είναι το σημείο $A_{1/3}$ με συντεταγμένες:

$$x_{1/3}=s_0x_0+s_1x_1=\frac{2}{3}1+\frac{1}{3}3=\frac{5}{3},\quad y_{1/3}=s_0y_0+s_1y_1=\frac{2}{3}2+\frac{1}{3}8=\frac{12}{3}=4$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιούν και την εξίσωση

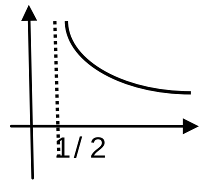
Σημ. Εναλλακτικά, το σημείο μπορεί να βρεθεί θέτοντας $t=1/3$, στις παρακάτω σχέσεις:

$$x_{t=1/3}=x_0+t(x_1-x_0)=1+\frac{1}{3}(3-1)=\frac{5}{3},\quad y_{t=1/3}=y_0+t(y_1-y_0)=2+\frac{1}{3}(8-2)==4$$

▲

<u>13</u>. Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα, σχεδιάζοντας και το γράφημα της συνάρτησης.

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx$$



<u>Λύση</u> $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{x-1/2}}$,

Υπερβολική συνάρτηση, (αρνητική δύναμη) $1/\sqrt{2}\sqrt{x}$ μετατοπισμένη κατά 1/2 προς τα δεξιά.
Ολοκληρώνουμε απευθείας βρίσκοντας την παράγουσα

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_{1/2}^{+\infty} (2x-1)^{-1/2}dx = \frac{1}{1/2}(2x-1)^{1/2}\frac{1}{2}\Big|_{1/2}^{+\infty} \to +\infty$$ **,** δεν συγκλίνει, μη φραγμένο για $x \to +\infty$

Σημ. Σε επόμενη ενότητα (IV) θα διαπιστώσουμε ότι εναλλακτικά μπορούμε να το υπολογίσουμε με αντικατάσταση: $\{v = 2x - 1,\ dv = 2dx\}$, οπότε αντικαθιστώντας και τα νέα όρια $x : \{1/2,\ +\infty\} \Rightarrow v : \{0,\ +\infty\}$, βρίσκουμε πάλι:

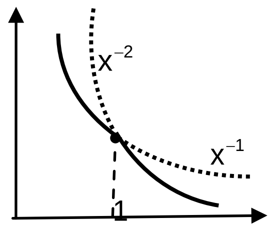
$$\int_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{+\infty} v^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1/2} v^{1/2}\Big|_{0}^{+\infty} \to +\infty$$

▲

14

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \min\{x^{-1}, x^{-2}\}$ **στη θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$ **.**

Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$



<u>Λύση</u>
Το γράφημα της δίνεται από την μαύρη καμπύλη του σχήματος, με σημείο τομής:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1,\ \ h(x) = \begin{cases} x^{-1},\ \alpha\nu\ \ x \le 1 \\ x^{-2},\ \alpha\nu\ \ x \ge 1 \end{cases}.$$

Για το ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

$$\int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^1 x^{-1}dx + \int_1^{\infty} x^{-2}dx = \ln x\Big|_0^1 - x^{-1}\Big|_1^{\infty} \to (0+\infty) - (0-1) = +\infty$$ **,** δεν συγκλίνει.

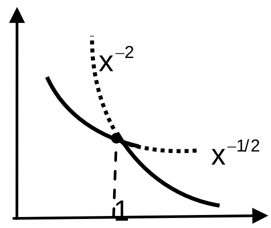
▲

15

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = x^{-1/2}$**,** $g(x) = x^{-2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ **, όπου:** $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$



<u>Λύση</u>.
1. Έχουμε δύο αρνητικές δυνάμεις. Όσο πιο μεγάλη η αρνητική δύναμη τόσο πιο απότομα κατεβαίνει. Το γράφημα δίνεται από την μαύρη γραμμή με σημείο ένωσης:

$$\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = 1$$

2. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^1 x^{-1/2}dx + \int_1^{\infty} x^{-2}dx = 2x^{1/2}\Big|_0^1 - x^{-1}\Big|_1^{\infty} = (2-0) - (0-1) = 3$$ **,** συγκλίνει

▲

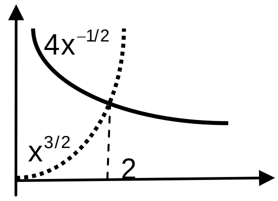
16

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = 4x^{-1/2}$**,** $g(x) = x^{3/2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**

Δύση.



1. Έχουμε θετική δύναμη μεγαλύτερη του 1, και αρνητική δύναμη .

Βρίσκουμε το σημείο τομής:

$$\frac{4}{x^{1/2}} = x^{3/2} \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2 > 0$$, παίρνουμε το θετικό

2. Το εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

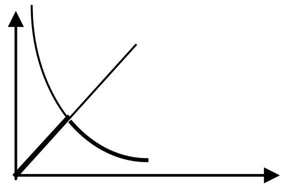
$$E = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 4x^{-1/2}dx - \int_0^2 x^{3/2}dx = 4 \cdot 2x^{1/2}\Big|_0^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^2 = 8\sqrt{2} - 2^{7/2}/5 = 32\sqrt{2}/5$$

▲

17

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \min\{x, x^{-3/2}\}$ **για** $x \ge 0$**, και του** $x-$**άξονα.**

Δύση



Η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^{-3/2} & \text{αν} \quad x \ge 1 \end{cases}$

Υπολογίζουμε και το ολοκλήρωμα :

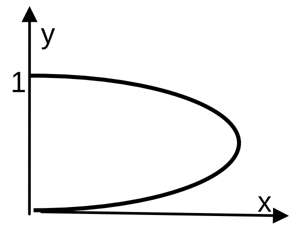
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^{+\infty} x^{-3/2}dx = x^2/2\Big|_0^1 - 2x^{-1/2}\Big|_1^{\infty} = 1/2 - (0-2) = 2.5$$

▲

18

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της καμπύλης: $x = -y^2 + y$ **και του θετικού** $y-$ **ημιάξονα.**

Δύση



Η καμπύλη δίνεται από την ανεστραμμένη παραβολή ως προς τον $y-$άξονα:

$$x = -y^2 + y = -y(y-1)$$

2. Ολοκληρώνουμε ως προς τον $y-$άξονα στο διάστημα $0 \le y \le 1$:

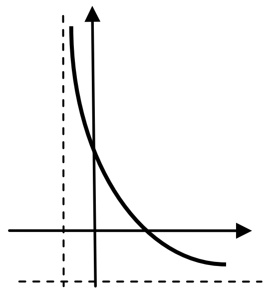
$$\int_0^1 x(y)dy = \int_0^1 (-y^2 + y)dy = -y^3/3 + y^2/2\Big|_0^1 = -1/3 + 1/2 = 1/6$$

Σημ. Θα μπορούσαμε να βάλουμε τον $y-$άξονα οριζόντιο ▲

19

Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $(x+1)(y+2) = 4$ **και των θετικών ημιαξόνων.**

Δύση



Είναι η συμμετρική υπερβολή $xy = 4$ μετατοπισμένη οριζοντίως κατά -1, κατακόρυφα κατά -2. Κόβει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία: $x = 1$ και $y = 2$ αντίστοιχα.

Εξάλλου λύνοντας ως προς y, βρίσκουμε την συνάρτηση:

$$(x+1)(y+2) = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x+1} - 2$$ στο διάστημα: $0 \le x \le 1$.

Υπερβολική καμπύλη με κατακόρυφη ασύμπτωτο στο -1, και οριζόντια στο -2.

Για το ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

$$\int_0^1 \frac{4}{x+1} - 2 = 4\ln(x+1) - 2x\Big|_0^1 = 4\ln 2 - 2$$

▲

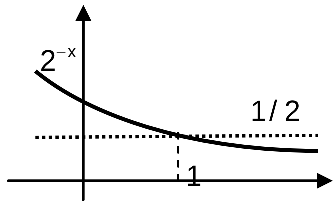
20

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = 2^{-x}$**,** $g(x) = 1/2$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**

Λύση



1. Έχουμε ένα φθίνων εκθετικό με βάση 2 και μια σταθερή συνάρτηση με τιμή $1/2$
Τέμνονται στο σημείο:

$2^{-x} = 1/2 \Rightarrow -x\ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow x = 1$, όπου λύσαμε παίρνοντας λογαρίθμους

2. Για ολοκλήρωση, **μετατρέπουμε στη νεπέρια βάση** e, και βρίσκουμε:

$2^{-x} = (e^{\ln 2})^{-x} = e^{-x\ln 2}$

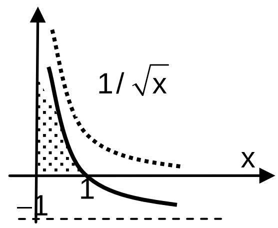
Το εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 [e^{-x\ln 2} - 1/2]dx = -\frac{1}{\ln 2}e^{-x\ln 2} - \frac{x}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2}$$

▲

21

Να γίνει το γράφημα και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $(y+1)^2 x = 1$ **και των θετικών ημιαξόνων.**



Λύση1 Η καμπύλη είναι η υπερβολική $y^2 x = 1$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά -1**,** δηλαδή μετατόπιση προς τα κάτω κατά 1. Εξάλλου λύνοντας ως προς y, βρίσκουμε:

$$(y+1)^2 x = 1 \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

Το εμβαδό δίνεται από το παρακάτω γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$E = \int_0^1 (x^{-1/2} - 1)dx = 2x^{1/2}\Big|_{x=0}^{1} - x\Big|_{x=0}^{1} \to [2-0] - [1-0] = 1$$

Λύση2 Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε ως προς x και να ολοκληρώσουμε ως προς y:

$$(y+1)^2 x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$E = \int_0^{+\infty} (y+1)^{-2} dy = -(1+y)^{-1}\Big|_{y=0}^{+\infty} \to [-0] - [-1] = 1$$

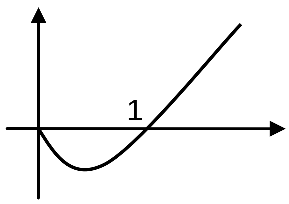
▲

22

Να υπολογιστούν:

1. Το όριο του $x\ln x$ **όταν** $x \to 0$**,**

2. Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x\ln x$



Λύση. Η συνάρτηση ορίζεται μόνο στα θετικά x**.**

1. Έχουμε: $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0\cdot(-\infty)$**,** απροσδιόριστη μορφή. Η δύναμη υπερισχύει του λογαρίθμου, οπότε το όριο θα είναι 0. Πράγματι με τον κανόνα L'Hopital βρίσκουμε:

$$x\ln x = \frac{\ln x}{1/x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$$

2. Η συνάρτηση έχει μηδενική τιμή στο $x = 0$**,** αρνητικές τιμές για $x \leq 1$**,** και θετικές τιμές για $x \geq 0$**.** Παίρνοντας υπόψη και τα όρια για $x \to 0$ και για $x \to +\infty$**,** βρίσκουμε το γράφημα παραπάνω:

Σημ. Συμπληρωματικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε δύο φορές:

$$f(x) = x\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

α) Η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα, οπότε είναι αρνητική μέχρι το $f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$, και μετά θετική. Αντίστοιχα η συνάρτηση θα είναι φθίνουσα μέχρι το $x = e^{-1}$ και μετά αύξουσα**.**

β) Η συνάρτηση είναι παντού κυρτή, και διότι η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα, και διότι η δεύτερη είναι θετική.

▲

23

Θεωρούμε την εξίσωση $y = \ln x + 2$ **.**

1. Να βρεθούν η εξίσωση μεταβολών και η εξίσωση διαφορικών

2. Να υπολογιστεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το x **από την τιμή** $x = 1$**, ώστε το** y **να ελαττωθεί κατά** 0.1**.**

Να βρεθεί και η αντίστοιχη εκτίμηση χρησιμοποιώντας διαφορικά.

__Λύση__

$$y = f(x) \Rightarrow \{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)\},\ \{dy = f'(x)dx\}$$

1. Εξίσωση μεταβολών: $\Delta y = [\ln(x+\Delta x)+2] - [\ln x + 2] = \ln(x+\Delta x) - \ln x$

Εξίσωση διαφορικών: $dy = dx / x$

2.Μεταβολή: $\{x = 1,\ \Delta y = -0.1\} \Rightarrow -0.1 = \ln(1+\Delta x) \Rightarrow 1 + \Delta x = e^{-0.1} \Rightarrow \Delta x = e^{-0.1} - 1$

Διαφορικό: $\{dy = -0.1, x = 1\} \Rightarrow -0.1 = dx / 1 \Rightarrow dx = -0.1$

Παρατήρηση. Το διαφορικό συμπίπτει με την γραμμική προσέγγιση της μεταβολής:

$$\Delta x = e^{-0.1} - 1 \approx (1 - 0.1) - 1 = -0.1$$

▲

24.

Θεωρούμε την εξίσωση $y = x + x^2$ **στο σημείο** $(x = 1, y = 2)$**. Να υπολογιστεί ο λόγος** $\Delta y / dy$ **αν το** x **μεταβληθεί από την τιμή** $x = 1$**, κατά** $\Delta x = dx : \{0.5,\ 0.1,\ 0.01\}$**.**

__Λύση__

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [(1+\Delta x) + (1+\Delta x)^2] - [1 + 1^2] = [1 + \Delta x + 1 + 2\Delta x + \Delta x^2] - 2 = 3\Delta x + \Delta x^2$$

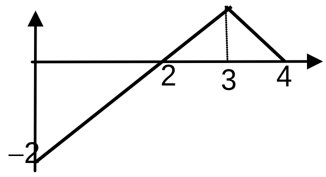
$$dy = f'(x)dx = (1+2x)\Delta x = 3\Delta x$$

Διαιρώντας, βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{3\Delta x + \Delta x^2}{3\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{3}\Big|_{0.5, 0.1, 0.01} = 1.166,\ 1.033,\ 1.003$$

▲

25



Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ **με τιμή:** $f(0) = 0$ **, της οποίας η παράγωγος** $f'(x)$ **έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα:** $0 \le x \le 4$ **. Να υπολογιστεί η τιμή:** $f(4)$

__Λύση.__ Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα η τιμή της στο 4 δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$f(4) - f(0) = \int_0^4 f'(x)dx = -E_1 + E_2 =$ **, προσημασμένο εμβαδό** μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και $x-$ άξονα, όπου:

$$E_1 = 2 \cdot 2 / 2 = 2,\ \ E_2 = (1 \cdot 1/2) + (1 \cdot 1/2) = 1$$

Επομένως:

$$f(4) - f(0) = -2 + 1 = -1 \Rightarrow f(4) = -1$$

Εναλλακτικά (πιο πολύπλοκο), μπορούμε να υπολογίσουμε την ίδια την συνάρτηση από την παράγωγο:

1. Στο διάστημα $0 \le x \le 3$ η παράγωγος δίνεται από την ευθεία:

$y = -2 + x \Rightarrow f'(x) = -2 + x \Rightarrow f(x) = -2x + x^2 / 2$, διότι έχουμε: $f(0) = 0$

3. Στο διάστημα $3 \le x \le 4$ η παράγωγος δίνεται από την ευθεία:

$$y = -1(x-4) = 4 - x \Rightarrow f'(x) = 4 - x \Rightarrow f(x) = 4x - x^2/2 + c$$

4. Λόγω συνέχειας, θα έχουμε στο $x = 3$, την ισότητα:

$$-2x + x^2/2 = 4x - x^2/2 + c \Rightarrow -6 + 9/2 = 12 - 9/2 + c \Rightarrow c = -9$$

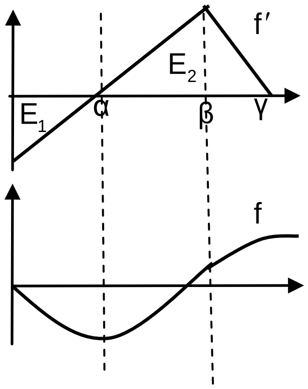
5. Επομένως στο διάστημα $3 \le x \le 4$ θα έχουμε:

$f(x) = 4x - x^2/2 - 9 \Rightarrow f(4) = 16 - 8 - 9 = -1$, όπως και προηγουμένως.

▲

26

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ με τιμή: $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le \gamma$.
Να βρεθεί το γράφημά της. Ειδικότερα να βρεθούν:
1. Το πρόσημο στην τιμή της $f(x)$ στο σημείο γ
2. Τα σημεία καμπής
3. Τα τοπικά ακρότατα
4. Το σημείο μέγιστης τιμής



<u>Λύση.</u>
Αρχίζοντας με μηδενική τιμή η συνάρτηση είναι:
α) φθίνουσα μέχρι το $\{\alpha\}$ λόγω αρνητικής παραγώγου, και στη συνέχεια αύξουσα λόγω θετικής παραγώγου.
β) κυρτή μέχρι υο $\{\alpha\}$ λόγω αύξουσας παραγώγου, και στη συνέχεια κοίλη λόγω φθίνουσας παραγώγου.

1. Η τιμή στο $x=\gamma$ είναι γνήσια θετική: $f(\gamma)>0$, διότι σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$f(\gamma)=f(\gamma)-f(0)=\int_0^{\gamma} f'(x)dx=-E_1+E_2>0$$ **προσημασμένο εμβαδό**

μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και $x-$ άξονα

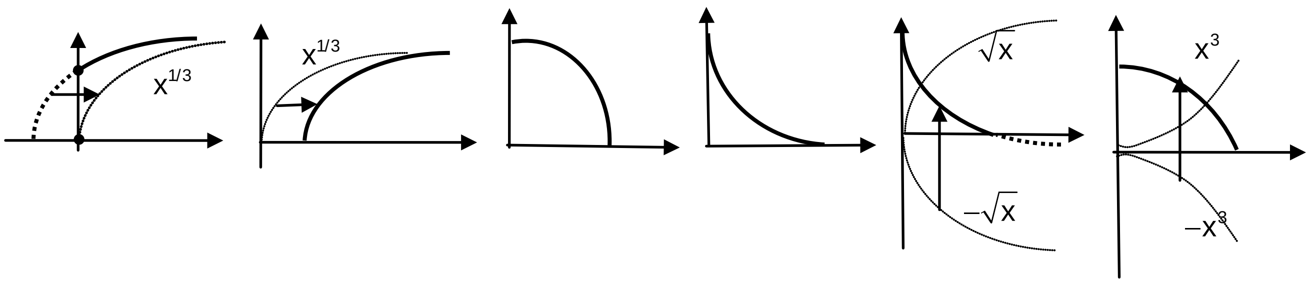
2. Σημείο καμπής το $\{\beta\}$ όπου αλλάζει η καμπυλότητα.
3. Τοπικό μέγιστο στα συνοριακά $\{0, \gamma\}$. Το $\{\gamma\}$ είναι και στάσιμο συνοριακό.
Τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό στάσιμο $\{\alpha\}$
4. Η μέγιστη τιμή της είναι στο τελικό σημείο $x=\gamma$

▲

27

Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$
1. $y=(x+1)^{1/3}$, **2.** $y=(x-1)^{1/3}$, **3.** $x^3+y^3=2$, **4.** $x^{1/2}+y^{1/2}=2$, **5.** $y=1-x^{1/2}$ **6.** $y=1-x^3$
Λύση.

1 2 3 4 5 6



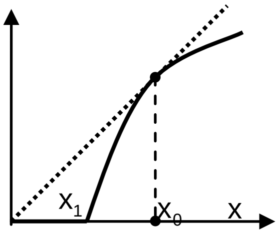
1. Προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $x^{1/3}$ κατά -1, (προς τα αριστερά)
2. Προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $x^{1/3}$ κατά $+1$, (προς τα δεξιά).
3. Είναι της γνωστής μορφής: $x^{\rho}+y^{\rho}=c$ με $\rho>1$
4. Είναι της γνωστής μορφής: $x^{\rho}+y^{\rho}=c$ με $\rho<1$
5. Προκύπτει από την αρνητική της $x^{1/2}$ με ανέβασμα κατά $+1$.
Σε κάθε περίπτωση είναι φθίνουσα κυρτή: $y'=-x^{-1/2}/2<0,\ y''=x^{-3/2}/4>0$, στο θετικό διάστημα
6. Προκύπτει από την αρνητική της x^3 με ανέβασμα κατά $+1$.
Σε κάθε περίπτωση είναι φθίνουσα κοίλη: $y'=-3x^2<0,\ y''=-6x<0$, στο θετικό διάστημα

▲

28

Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο διάστημα** $x \geq 0$**, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων**

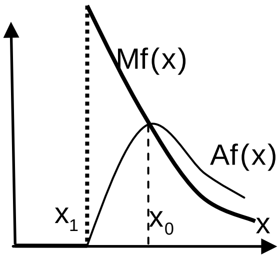
Οριακή τιμή: $Mf(x) = f'(x)$**, Μέση τιμή:** $Af(x) = f(x)/x$



Λύση.

1.Η οριακή τιμή $Mf(x)$ δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης. Είναι μηδενική μέχρι το x_1, όπου αυξάνει απότομα εμφανίζοντας ασυνέχεια (η καμπύλη της συνάρτησης έχει γωνία). Μετά είναι συνεχώς φθίνουσα θετική.

2. Η μέση τιμή $Af(x)$ δίνεται από την κλίση της ακτίνας. Είναι μηδενική μέχρι το x_1 . Μετά αρχίζει να αυξάνει συνεχώς, αλλά μένοντας χαμηλότερα από την οριακή τιμή μέχρι το σημείο x_0 που η ακτίνα συμπίπτει με την εφαπτομένη. Μετά είναι συνεχώς φθίνουσα αλλά μεγαλύτερη από την οριακή τιμή.



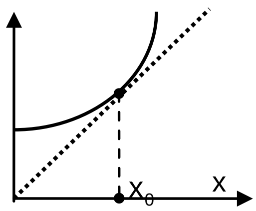
Παρατήρηση. Η μέση τιμή μεγαλώνει όταν η οριακή είναι μεγαλύτερη, και μικραίνει όταν η οριακή είναι μικρότερη, με μέγιστο στο σημείο x_0 όπου συμπίπτουν.

▲

29

Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο θετικό διάστημα** $x \geq 0$**, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων**

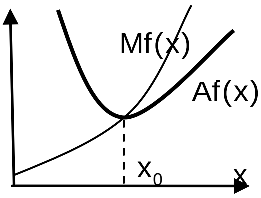
Οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$ **, Μέσης τιμής:** $Af(x) = f(x)/x$



Λύση

1. Η οριακή τιμή $Mf(x)$ δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης. Αρχίζει από τιμή περίπου μηδενική ή λίγο θετική, και αυξάνει συνεχώς.

2. Η μέση τιμή $Af(x)$ δίνεται από την κλίση της ακτίνας. Αρχικά είναι άπειρη και φθίνει συνεχώς μέχρι το x_0 όπου συμπίπτει με την οριακή τιμή. Μετά είναι αύξουσα αλλά μικρότερη από την οριακή.



Παρατήρηση. Η μέση τιμή μικραίνει όταν η οριακή τιμή είναι μικρότερη, και μεγαλώνει όταν η οριακή τιμή είναι μεγαλύτερη, με ελάχιστο στο σημείο x_0 όπου συμπίπτουν.

▲

30. Να βρεθούν στο σημείο $x = 0$**, η γραμμική και η παραβολική προσέγγιση των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:** $\arcsin x = \text{τοξημx}$**,** $\arctan x = \text{τοξεφx}$

Λύση

1. $\arcsin x \Rightarrow \arcsin' x = (1-x^2)^{-1/2} \Rightarrow \arcsin'' x = (-1/2)(1-x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1-x^2)^{-3/2}$

$\arcsin 0 = 0, \arcsin' 0 = (1-0^2)^{-1/2} = 1, \arcsin'' 0 = 0(1-0^2)^{-3/2} = 0$

γραμμική προσέγγιση ίδια με την παραβολική: $\arcsin_{γρ} x = \arcsin_{παρ} x = x$

2. $\arctan x \Rightarrow \arctan' x = (1+x^2)^{-1} \Rightarrow \arctan'' x = -1(1+x^2)^{-2} 2x = -2x(1+x^2)^{-2}$

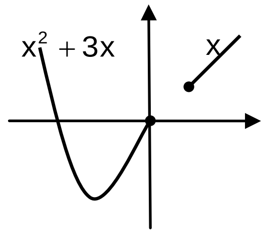
$\arctan 0 = 0, \arctan' 0 = (1-0^2)^{-1} = 1, \arctan'' 0 = -2 \cdot 0(1-0^2)^{-2} = 0$

γραμμική προσέγγιση ίδια με την παραβολική: $\arctan_{γρ} x = \arctan_{παρ} x = x$

Σημ. Οι δύο συναρτήσεις έχουν μηδενική $2^η$ παράγωγο στο $x = 0$, και επομένως η παραβολική προσέγγιση συμπίπτει με την γραμμική. Η διαφοροποίηση αρχίζει με την **κυβική** προσέγγιση.

▲

31. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{αν } x\le 0 \\ x & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$



Να επεκταθεί στο διάστημα $[0,1]$ με πολυώνυμο του ελάχιστου βαθμού, έτσι ώστε να είναι:

α) συνεχής,

β) και παραγωγίσιμη στο $x=0$,

γ) παραγωγίσιμη και στο $x=1$.

Λύση

α). Για συνέχεια χρειαζόμαστε τις τιμές σε δύο σημεία: $\{f(0)=0,\ \ f(1)=1\}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε γραμμική συνάρτηση που έχει 2 σταθερές:

$$f(x)=\alpha+\beta x \Rightarrow \begin{cases} f(0)=\alpha=0 \\ f(1)=\alpha+\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \{\alpha=0,\ \beta=1\} \Rightarrow f(x)=x \text{ στο διάστημα } [0,1]$$

β) Χρειαζόμαστε επιπλέον την παράγωγο στο $x=0: f(x)=x^2+3x \Rightarrow f'(0)=3$

Θα χρησιμοποιήσουμε παραβολική συνάρτηση που έχει 3 σταθερές:

$$f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=\alpha=0 \\ f(1)=\alpha+\beta+\gamma=1 \\ f'(0)=\beta=3 \end{cases} \Rightarrow \{\alpha=0,\ \beta=3,\ \gamma=-2\} \Rightarrow f(x)=3x-2x^2 \text{ στο διάστημα } [0,1]$$

γ) Χρειαζόμαστε επιπλέον την παράγωγο και στο $x=1: f(x)=x \Rightarrow f'(1)=1$

Θα χρησιμοποιήσουμε κυβική συνάρτηση που έχει 4 σταθερές:

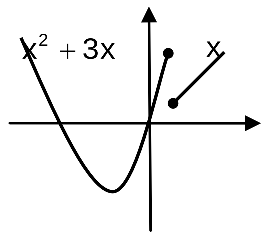
$$f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=\alpha=0 \\ f(1)=\alpha+\beta+\gamma+\delta=1 \\ f'(0)=\beta=3 \\ f'(1)=\beta+2\gamma+3\delta=1 \end{cases} \Rightarrow \{\alpha=0,\ \beta=3,\ \gamma=-4,\ \delta=2\} \Rightarrow f(x)=3x-4x^2+2\delta^3$$

στο διάστημα $[0,1]$

▲

32. Να βρεθεί η (συνεχής) παράγουσα της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} g(x)=x^2+3x & \text{αν } x\le 1 \\ h(x)=x & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$$



Λύση. Ολοκληρώνοντας χωριστά στο κάθε διάστημα, βρίσκουμε την παράγουσα στη μορφή:

$$f(x)=\begin{cases} g(x)=x^2+3x & \text{αν } x\le 1 \\ h(x)=x & \text{αν } x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} G(x)=x^3/3+3x^2/2+\alpha & \text{αν } x\le 1 \\ H(x)=x^2/2+\beta & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$$

Για συνέχεια στο $x=1$, θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη:

$$G(1)=H(1) \Rightarrow 1/3+3/2+\alpha=1/2+\beta \Rightarrow \beta=\alpha+4/3$$

Τελικά η συνεχής παράγουσα θα είναι:

$$F(x)=\begin{cases} G(x)=x^3/3+3x^2/2+\alpha & \text{αν } x\le 1 \\ H(x)=x^2/2+4/3+\alpha & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$$, με μια αυθαίρετη σταθερά $\{\alpha\}$

▲