Ef.IV.8 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ (Α)

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ
1.Παραδείγματα αναλυτικά 2.Παραδείγματα αριθμητικά
ΖΗΤΗΣΗ-ΠΡΟΣΦΟΡΑ
3.Ελαστικότητα ζήτησης 4.Ελαστικότητα προσφοράς 5.Κέρδος μονοπωλίου 6.Ελαστικότητες στη διαφοροποίηση τιμών
ΠΑΡΑΓΩΓΗ. 7.Οικονομίες κλίμακας

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ

1. Παραδείγματα αναλυτικά

Παράδειγμα. Σε μια οικονομία αυξάνουν το εθνικό εισόδημα Y με ετήσιο ρυθμό 6%, και ο πληθυσμός L με ετήσιο ρυθμό 3%. Να βρεθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλήν εισοδήματος $y = Y/L$, και αν αυξάνει να εκτιμηθεί ο χρόνος διπλασιασμού του κατά κεφαλή εισοδήματος.

Λύση. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του λόγου ισούται με τη διαφορά των δύο ρυθμών:

$$y = \frac{Y}{L} \Rightarrow \frac{\%dy}{dt} = \frac{\%dY}{dt} - \frac{\%dL}{dt} = 6 - 3 = 3\% \text{ ετησίως}$$

Επομένως **αυξάνει** με σχετικό ρυθμό $r = 0.03$.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας σχετικούς ρυθμούς: $y = \frac{Y}{L} \Rightarrow r_y = r_Y - r_L = 0.06 - 0.03 = 0.03$

Εφόσον μεταβάλλεται με σταθερό σχετικό ρυθμό θα μεταβάλλεται εκθετικά:

$$y(t) = y(0)e^{rt} = y(0)e^{0.03t}$$

Θα διπλασιαστεί μετά από χρόνο τ που δίνεται από την σχέση:

$$y(\tau) = 2y(0) \Rightarrow 2y(0) = y(0)e^{0.03\tau} \Rightarrow 2 = e^{0.03\tau} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{0.03} \approx \frac{0.7}{0.03} = \frac{70}{3} = 23.33 \text{ χρόνια}$$

Σημ. Γενικά ο χρόνος διπλασιασμού ενός μεγέθους με **σταθερό ρυθμό αύξησης** $\%r$ δίνεται από τον τύπο:

$$\tau = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0.7}{r} = \frac{70}{\%r}$$

Παράδειγμα. Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή και Q η ποσότητα ζήτησης. Αν η τιμή αυξάνει με ρυθμό 0.5% ετησίως, και η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -3$, να εκτιμηθούν ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου, καθώς και το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι E_0.

Λύση.

1. Εφόσον έχουμε γινόμενο: $E = QP$, ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εσόδου ισούται με το άθροισμα των δύο, της ζήτησης και της τιμής:

$$\frac{\%dE}{dt} = \frac{\%dQ}{dt} + \frac{\%dP}{dt} \text{ όπου: } \frac{\%dP}{dt} = 0.5\% \text{ ετησίως}$$

2. Η μεταβολή της ζήτησης με τον χρόνο προκύπτει ως σύνθεση: $\{Q = Q(P), P = P(t)\} \Rightarrow Q = Q(t)$

Επομένως ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με τον ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής της τιμής:

$$\frac{\%dQ}{dt} = \frac{\%dQ}{\%dP}\frac{\%dP}{dt} = (-3)(0.5\%) = -1.5\% \text{ ετησίως}$$

3 Αντικαθιστώντας στο 1, βρίσκουμε:

$$\frac{\%dE}{dt} = -1.5 + 0.5 = -1\%$$

Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο πέφτει 1% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = -0.01$. Επομένως το έσοδο μετά από 4 έτη θα είναι:

$E = E_0e^{rt} = E_0e^{(-0.01)4} = E_0e^{-0.04} \approx E_0[1 + (-0.04) + (-0.04)^2/2] = E_0 0.9608$, παραβολική προσέγγιση ▲

2. Παραδείγματα αριθμητικά

Έχουμε δύο τρόπους εκτίμησης της ελαστικότητας και του σχετικού ρυθμού, από αριθμητικά δεδομένα:

1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς:

$$y = y(x) \Rightarrow E_x y \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x\Delta y}{y\Delta x}, \qquad R_x y \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{y\Delta x}$$

Αν έχουμε δύο σημεία: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, τότε ως αρχικές τιμές (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οιοδήποτε από τα δύο σημεία, ή το ενδιάμεσο με συντεταγμένες:

$$\tilde{x} = (x_1 + x_2)/2, \ \tilde{y} = (y_1 + y_2)/2$$

Η εκτίμηση θα είναι ακριβής αν η συνάρτηση είναι γραμμική, δηλαδή έχει σταθερή κλίση.

2. Χρησιμοποιώντας την (ημι)λογαριθμική παράσταση

$$y = y(x) \Rightarrow E_x y \approx \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x}, \qquad R_x y \approx \frac{\Delta \ln y}{\Delta x}$$

Τώρα η εκτίμηση θα είναι ακριβής αν η συνάρτηση είναι δύναμη ή εκθετική αντίστοιχα, δηλαδή αν έχει σταθερή ελαστικότητα ή σχετικό ρυθμό αντίστοιχα.

3. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τις παραβολικές προσεγγίσεις:

$$x \approx 0 \Rightarrow \ e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \ , \ \ \ln(1+x) \approx x - x^2/2$$

▲

Παράδειγμα. Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y και ο πληθυσμός L κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, \ t_2 = 2010\}$, βρέθηκαν να έχουν αντίστοιχα τις τιμές:

$\{Y_1 = 500, \ Y_2 = 600\}$ δισεκατομμύρια ευρώ, $\{L_1 = 10, L_2 = 11\}$ εκατομμύρια

α) Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εθνικού εισοδήματος, του πληθυσμού, και του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Υποθέτοντας το τελευταίο σταθερό, να εκτιμηθεί το κατά κεφαλή εισόδημα κατά το έτος 2020.

Λύση.

α) $$r_Y \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta t} = \frac{(Y_2 - Y_1)/Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{100/500}{10} = \frac{1}{50} = 0.02 \Rightarrow \%r_Y = 100 r_Y = 2\%$$

$$r_L \approx \frac{\Delta L / L}{\Delta t} = \frac{(L_2 - L_1)/L_1}{t_2 - t_1} = \frac{1/10}{10} = \frac{1}{100} = 0.01 \Rightarrow \%r_L = 100 r_L = 1\%$$

$$y = Y/L \Rightarrow r_y = r_Y - r_L \approx 0.02 - 0.01 = 0.01 \Rightarrow \%r_y = 100 r_y = 1\%$$

Μεταβάλλονται με ρυθμό $\{2\%, 1\%, 1\%\}$ ετησίως, αντίστοιχα.

β). Μεγέθη που μεταβάλλονται με σταθερό σχετικό ρυθμό εξελίσσονται εκθετικά, οπότε μετά από 10 χρόνια το κατά κεφαλή εισόδημα θα είναι:

$$y(2020) = y(2010)e^{r_y 10} = \frac{600}{11}e^{(0.01)10} = 54.55e^{0.1}$$

$$\approx 54.55(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}) \approx 60.3 \ \frac{\text{δισεκατομμύρια ευρώ}}{\text{εκατομμύριο πληθυσμό}} = 60.3 \frac{\text{χιλιάδες ευρώ}}{\text{κάτοικο}}$$

Παρατήρηση. Όπως αναφέραμε παραπάνω, έχουμε και εναλλακτικούς τύπους εκτίμησης των παραπάνω μεγεθών. Π.χ.

1. Στον παρονομαστή της σχετικής μεταβολής αντί των αρχικών: $\{Y_1, L_1\}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα $\{Y_2, L_2\}$ ή τα ενδιάμεσα: $\tilde{Y} = (Y_1 + Y_2)/2, \tilde{L} = (L_1 + L_2)/2$

2. Αντί για τις σχετικές μεταβολές μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ημιλογαριθμικές.

3. Μπορεί να υπολογιστεί πρώτα το κατά κεφαλή εισόδημα στις δύο περιόδους:

$$y_1 = Y_1 / L_1, \ y_2 = Y_2 / L_2$$

▲

Παράδειγμα. Το ΑΕΠ X ενός πληθυσμού N ήταν $\{X_1 = 200, X_2 = 250\}$ δισεκατομμύρια ευρώ κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, αντίστοιχα.

α). Να εκτιμηθεί ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του ΑΕΠ.

β). Υποθέτοντας σταθερό ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής του ΑΕΠ, να εκτιμηθεί το ΑΕΠ για το έτος 2020.

γ). Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι ο πληθυσμός N ελαττώνεται με ρυθμό 2% ετησίως να εκτιμηθεί ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή ΑΕΠ; $x = X / N$.

Λύση.

α). Θα εκτιμήσουμε τον σχετικό ρυθμό μεταβολής r χρησιμοποιώντας την ημιλογαριθμική παράσταση:

$$r = \frac{\ln Y_2 - \ln Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln(Y_2 / Y_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\ln(250/200)}{10} = \frac{\ln(1.25)}{10} \Rightarrow \%r = 100r = 10\ln 1.25$$

$$\approx 10[0.25 - (0.25)^2 / 2] \approx 2.2\%$$

β). Με σταθερό σχετικό ρυθμό το εισόδημα αυξάνει εκθετικά. Αρχίζοντας με το έτος 2010 το εισόδημα για το έτος 2020 θα είναι:

$$N(2020) = 250e^{r(2020-2010)} = 250e^{10r} = 250e^{\ln 1.25} = 250(1.25) = 312.5$$

γ). Θα ισούται με την διαφορά των δύο ρυθμών:

$$[10\ln 1.25 - (-2)]\% = [10\ln 1.25 + 2]\% \approx 2.2 + 2 = 4.2\%.$$

▲

3. Ελαστικότητα ζήτησης

Θεωρούμε την ζήτηση Q ως συνάρτηση της μοναδιαίας τιμής P ενός αγαθού. Με τον $Q-$άξονα οριζόντιο, η **ελαστικότητα ζήτησης** (**D**emand **E**lasticity) αφορά την ελαστικότητα της ποσότητας Q στον **οριζόντιο** άξονα ως προς την τιμή P στον **κατακόρυφο**, και δίνεται από τα παρακάτω μεγέθη:

$$Q = D(P) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_D = E_P Q = \frac{dQ/Q}{dP/p} = \frac{\%dQ}{\%dP} = \frac{PQ'}{Q} = \frac{P}{QP'}$$

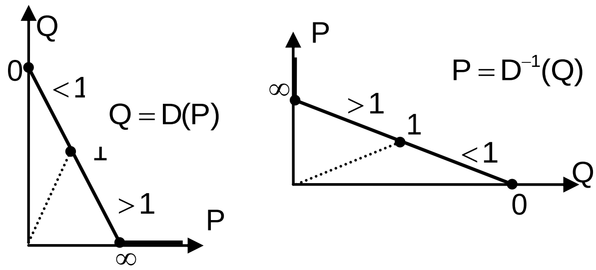
Θα ασχοληθούμε μόνο με **κανονικά αγαθά** που έχουν φθίνουσες συναρτήσεις ζήτησης, οπότε και η ελαστικότητα είναι αρνητικό μέγεθος. Λέμε ότι η ζήτηση είναι:

ελαστική αν $|\varepsilon_D| = -\varepsilon_D > 1$, ανελαστική αν $|\varepsilon_D| = -\varepsilon_D < 1$, ισοελαστική αν $|\varepsilon_D| = -\varepsilon_D = 1$

Δηλαδή:

Η ζήτηση είναι ελαστική αν αύξηση της τιμής προκαλεί μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση στη ζητούμενη ποσότητα ή ισοδύναμα αν αύξηση της ποσότητας προκύπτει από μικρότερη ποσοστιαία μείωση στην τιμή.

Στα δύο γραφήματα παραπλεύρως έχουμε την **ίδια εξίσωση ζήτησης,** στο πρώτο την συνάρτηση ζήτησης D με τον $P-$άξονα οριζόντιο, και στο δεύτερο την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης D^{-1} με τον $Q-$άξονα οριζόντιο. Σημειώνουμε και ενδεικτικές τιμές του **μέτρου** της ελαστικότητας ζήτησης.



μέτρο της ελαστικότητας ζήτησης: $|\varepsilon_D|$

Παρατήρηση

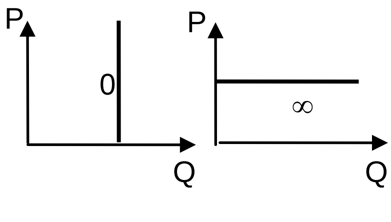
1. Μια συνάρτηση ζήτησης μπορεί να μην έχει σημείο ισοελαστικότητας οπότε θα είναι παντού ελαστική ή παντού ανελαστική. Ειδικά αυτό ισχύει αν έχει σταθερή ελαστικότητα διαφορετική της -1

2. Εφόσον η ελαστικότητα ζήτησης αφορά την ελαστικότητα του Q ως προς το P, συμπεραίνουμε ότι στο **ίδιο** $\{P, Q\}$ *η ελαστικότητα ζήτησης (το μέτρο) μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η κλίση του γραφήματος* D, *δηλαδή όσο μικραίνει η κλίση του γραφήματος* D^{-1}.

Στο όριο βρίσκουμε τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

3. Το κατακόρυφο γράφημα του πρώτου σχήματος αντιστοιχεί σε μηδενική ελαστικότητα και λέμε ότι η ζήτηση είναι **πλήρως ανελαστική** (totally inelastic), με την έννοια ότι η ποσότητα ζήτησης είναι σταθερή και δεν επηρεάζεται από την τιμή

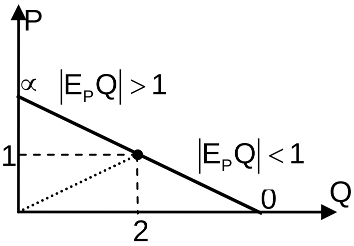
4. Το οριζόντιο γράφημα του δεύτερου σχήματος αντιστοιχεί σε άπειρη ελαστικότητα όπου η ζήτηση είναι **πλήρως ελαστική** (totally elastic), με την έννοια ότι η τιμή είναι δοσμένη, ανεξάρτητα της ποσότητας ζήτησης.



Παράδειγμα

1. $Q = \alpha P^{-1} \Rightarrow P = Q^{-1}/\alpha$ είναι παντού ισοελαστική με $\varepsilon \equiv -1$
2. $Q = \alpha P^{-2} \Rightarrow P = \alpha^{1/2} Q^{-1/2}$ είναι παντού ελαστική με $\varepsilon = -2$
3. $Q = \alpha P^{-1/2} \Rightarrow P = \alpha^2 Q^{-2}$ είναι παντού ανελαστική με $\varepsilon = -1/2$
4. $Q = 4 - 2P \Rightarrow P = 2 - Q/2$ έχει ισοελαστικότητα όταν:

$$\frac{PQ'}{Q} = \frac{P(-2)}{4-2P} = -1 \Rightarrow (P = 1, Q = 2)$$



Είναι ανελαστική στα μικρότερα P, ελαστική στα μεγαλύτερα P. ▲

4. Ελαστικότητα προσφοράς

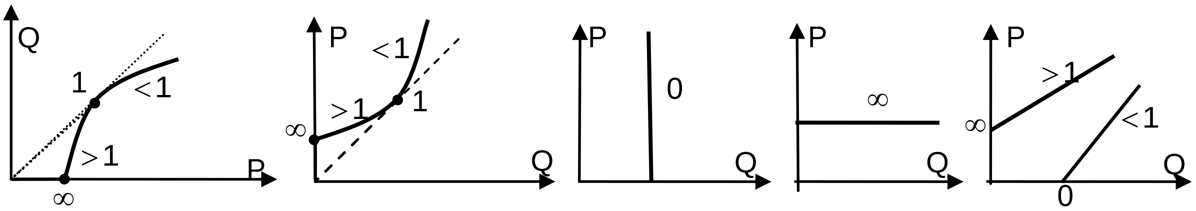
Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η ελαστικότητα για την προσφορά Q ως συνάρτησης της μοναδιαίας τιμής P ενός αγαθού. Με τον $Q-$άξονα οριζόντιο, η **ελαστικότητα προσφοράς** (**S**upply **E**lasticity) αφορά την ελαστικότητα της ποσότητας στον **οριζόντιο** άξονα ως προς την τιμή στον **κατακόρυφο**, και δίνεται από τους τύπους:

$$Q = S(P) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_S = E_P Q = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{\%dQ}{\%dP} = \frac{PQ'}{Q} = \frac{P}{QP'}$$

Είναι θετική εφόσον η συνάρτηση προσφοράς είναι αύξουσα. Συνήθως ένα σημείο ισοελαστικότητας χωρίζει τα σημεία ελαστικότητας από τα σημεία ανελαστικότητας, όπως στα δύο πρώτα γραφήματα παρακάτω που αφορούν την ίδια σχέση αλλά με τους άξονες ανεστραμμένους. Μια συνάρτηση προσφοράς μπορεί να μην έχει σημείο ισοελαστικότητας οπότε μπορεί να είναι παντού ελαστική ή παντού ανελαστική, όπως στο τελευταίο γράφημα παρακάτω. Όπως και στην ζήτηση, **στο ίδιο** (Q,P) *η ελαστικότητα προσφοράς (το μέτρο) μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η κλίση του γραφήματος* S *ή ισοδύναμα μικραίνει η κλίση του γραφήματος* S^{-1}. Ειδικά έχουμε τις παρακάτω ακραίες περιπτώσεις, ως όρια:

1 . Για το κατακόρυφο γράφημα του τρίτου γραφήματος με μηδενική ελαστικότητα λέμε ότι η προσφορά είναι **πλήρως ανελαστική** (totally inelastic), π.χ. όταν η διαθέσιμη ποσότητα είναι περιορισμένη.

2. Για το οριζόντιο γράφημα του τέταρτου γραφήματος με άπειρη ελαστικότητα λέμε ότι η προσφορά είναι **πλήρως ελαστική** (totally elastic).



μέτρο της ελαστικότητας προσφοράς: $|\varepsilon_S| = |E_P Q|$

Τέλος θεωρούμε και την ισορροπία που προκύπτει ως τομή των συναρτήσεων ζήτησης και προσφοράς, και παρατηρούμε ότι:

Υποθέτοντας τον $Q-$*άξονα* ***οριζόντιο, σ****την ισορροπία προσφοράς και ζήτησης:* $\{Q^*,P^*\}$, *μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας, δηλαδή μεγαλύτερη ευαισθησία ως προς μεταβολές στην τιμή, (της ζήτησης ή της προσφοράς), θα έχει η καμπύλη με την μικρότερη* ***(απόλυτη)*** *κλίση,:*

$$\varepsilon_D = \frac{P^*D'}{Q^*},\ \ \varepsilon_S = \frac{P^*S'}{Q^*} \Rightarrow \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_S} = \frac{D'}{S'} = \frac{S^{-1\prime}}{D^{-1\prime}}$$, το ίδιο για τις απόλυτες τιμές τους

5. Κέρδος μονοπωλίου

Αν μια παραγωγή ποσότητας Q διατεθεί με μοναδιαία τιμή P, θα προκύψει **έσοδο** (Revenue):

$$R = PQ$$

Διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις, ως εξής:

1. Η μοναδιαία τιμή είναι σταθερή εξωγενώς καθορισμένη, οπότε λέμε ότι επικρατούν συνθήκες **πλήρους ανταγωνισμού** (full competition). Έχουμε:

$$P(Q) \equiv p \Rightarrow R = pQ$$

2. Η μοναδιαία τιμή είναι συνάρτηση της ποσότητας σύμφωνα με την **εξίσωση ζήτησης**:

$$P = P(Q) \Rightarrow R = P(Q)Q$$, όπου: $P(Q) = D^{-1}(Q)$

Λέμε ότι επικρατούν συνθήκες **ελλιπούς ανταγωνισμού**, ειδικότερα συνθήκες **μονοπωλίου** (monopoly). Σαυτή την περίπτωση θα υποθέτουμε ότι το αγαθό είναι **συνηθισμένο**, οπότε η ζήτηση θα είναι γνήσια φθίνουσα συνάρτηση της τιμής και η ελαστικότητα θα είναι γνήσια αρνητική:

$$Q = Q(P) \Rightarrow \varepsilon_D = \frac{PQ'}{Q} = \frac{P}{QP'} < 0$$

Παρατήρηση. Από μαθηματικής σκοπιάς, η συνθήκη 1 του πλήρους ανταγωνισμού μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση της συνθήκης 2 του ελλιπούς ανταγωνισμού στο όριο όταν η ζήτηση είναι πλήρως ελαστική: $\varepsilon_D \to -\infty$

▲

Στην περίπτωση του ελλιπούς ανταγωνισμού, ορίζουμε τα μεγέθη:

$AR = \frac{R}{Q} = P$, **Μέσο Έσοδο** (**A**verage **R**evenue)

$MR = R' = P + P'Q = \left(1 + \frac{P'Q}{P}\right)P = \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_D|}\right)P$, **Οριακό Έσοδο** (**M**arginal **R**evenue),

Σε αντίθεση με την περίπτωση της ανταγωνιστικής παραγωγής, το οριακό έσοδο είναι τώρα γνήσια μικρότερο από την μοναδιαία τιμή P :

Η αύξηση του εσόδου λόγω αυξημένης ποσότητας μετριάζεται από την ταυτόχρονη πτώση της τιμής.

Διαπιστώνουμε ότι:

Ως συνάρτηση της ποσότητας Q*, το έσοδο:* $R = P(Q)Q$ *αυξάνει όταν η ζήτηση είναι ελαστική:* $|\varepsilon_D| > 1$*, δηλαδή όταν αύξηση της ποσότητας αντιστοιχεί σε μικρότερη ποσοστιαία μείωση της μοναδιαίας τιμής του προϊόντος, και ελαττώνεται στην αντίθετη περίπτωση* $|\varepsilon_D| < 1$.

Σε εσωτερικό ακρότατο του εσόδου η ζήτηση είναι ισοελαστική.

Απόδειξη1. Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο, η συνάρτηση $R(Q)$ είναι αύξουσα όταν:

$$R' = \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_D|}\right)P > 0 \Rightarrow |\varepsilon_D| > 1$$

Απόδειξη2. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από την εξέταση του πρόσημου της ελαστικότητας του R ως προς Q, η οποία υπολογίζεται εύκολα επειδή έχουμε γινόμενο συναρτήσεων. Για θετικά μεγέθη το πρόσημο της ελαστικότητας συμπίπτει με το πρόσημο της παραγώγου, οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα:

$$R = P(Q)Q \Rightarrow E_Q R = E_Q P + E_Q Q = E_Q P + 1 = \frac{1}{\varepsilon_D} + 1 = -\frac{1}{|\varepsilon_D|} + 1 > 0 \Rightarrow |\varepsilon_D| > 1$$

Παρατήρηση. Αν υποθέσουμε, ως συνήθως, ότι η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική στις μικρότερες ποσότητες Q και ανελαστική στις μεγαλύτερες, τότε καθώς η ποσότητα αυξάνει, η συνάρτηση εσόδου θα είναι στην αρχή αύξουσα μέχρι ένα επίπεδο παραγωγής που δίνει μέγιστο έσοδο και στη συνέχεια θα γίνεται φθίνουσα, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παρακάτω.

▲

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

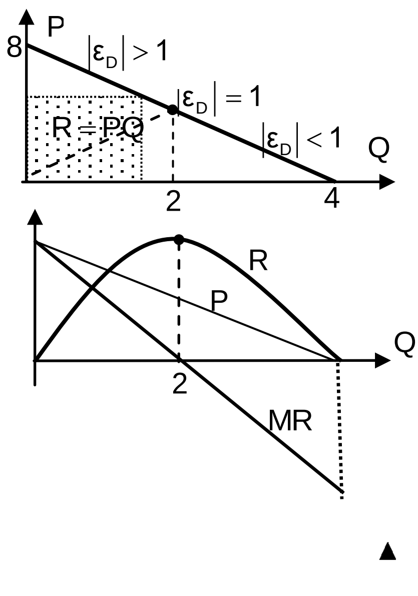
$Q = 4 - P/2 \Rightarrow P = 2(4 - Q)$

Γεωμετρικά, το έσοδο που αντιστοιχεί σε κάθε Q εκφράζεται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου που έχει βάση Q και ύψος $P = D^{-1}(Q)$, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα. Η συνάρτηση εσόδου είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$R = PQ = 2(4 - Q)Q = 8Q - 2Q^2$

$R'(Q) = 8 - 4Q = 0 \Rightarrow q^* = 2$

Είναι ακριβώς το ενδιάμεσο σημείο ισοελαστικότητας, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα. Έχουμε ελαστικότητα για μικρότερες ποσότητες ζήτησης, ανελαστικότητα για μεγαλύτερες. Παρατηρούμε ότι ως συνάρτηση της ποσότητας το έσοδο είναι αύξον όταν η ζήτηση είναι ελαστική, φθίνον όταν η ζήτηση είναι ανελαστική



▲

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα **μεγιστοποίησης του κέρδους** σε συνθήκες μονοπωλίου ή γενικότερα ελλιπούς ανταγωνισμού:

$$\max\{\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - C(Q) \,||\, Q \geq 0\}$$

Υποθέτουμε ότι η παραγωγή είναι **συμφέρουσα,** δηλαδή η βέλτιστη παραγωγή που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι γνήσια θετική:

$$q > 0$$

Υποθέτοντας επίσης ότι είναι φραγμένη, θα ικανοποιεί την συνθήκη στασιμότητας:

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_D|}\right)P(q) = C'(q), \quad \textit{συνθήκη 1ης τάξης}$$

Συμπεραίνουμε ότι, **στην βέλτιστη παραγωγή (μέγιστου κέρδους) η ζήτηση είναι ελαστική.** Πράγματι, το οριακό κόστος στο δεξιό μέρος είναι πάντοτε θετικό, οπότε θετικό θα είναι και το οριακό έσοδο στο αριστερό μέρος. Δηλαδή to ίδιο το έσοδο θα είναι αύξον, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα η ζήτηση θα είναι ελαστική.

Παράδειγμα. Με την γραμμική συνάρτηση ζήτησης του προηγούμενου παραδείγματος, θεωρούμε και την γραμμική συνάρτηση κόστους

$$C = 2 + Q$$

Θα βρούμε την βέλτιστη παραγωγή, που μεγιστοποιεί το κέρδος.

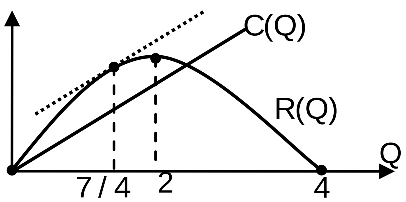
Λύση. Έχουμε πρόβλημα ΚΠ διότι η συνάρτηση εσόδων είναι κοίλη και η συνάρτηση κόστους γραμμική κυρτή :

$$\Pi = R - C = (8Q - 2Q^2) - (2 + Q) = -2 + 7Q - 2Q^2$$

Το μέγιστο κέρδος θα βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$$\Pi' = 7 - 4Q = 0 \Rightarrow q = 7/4 < 2$$

Είναι σημείο ελαστικότητας, σύμφωνα και με την παραπάνω θεωρία.



▲

6. Ελαστικότητες στην διαφοροποίηση τιμών.

Το πρόβλημα διαφοροποίησης τιμών που εξετάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο αντιμετωπίζεται πιο συστηματικά χρησιμοποιώντας τις ελαστικότητες ζήτησης. Εξετάζουμε την διάθεση ποσοτήτων $\{X, Y\}$ του ίδιου προϊόντος σε **δύο διαφορετικές αγορές**, ενδεχόμενα με διαφορετικές μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$. Σε αντιστοιχία με τις συναρτήσεις ζήτησης στις δύο αγορές:

$$V = V(X), \quad W = W(Y)$$

θωρούμε και τις αντίστοιχες ελαστικότητες:

$$\varepsilon_X = E_V X = \frac{VX'}{X} = \frac{V}{XV'} \leq 0, \;\; \varepsilon_Y = E_W Y = \frac{WY'}{Y} = \frac{W}{YW'} \leq 0$$

Επανεξετάζουμε πάλι το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους με διαφοροποίηση τιμών:

$$\max\{\Pi = R - C = V(X)X + W(Y)Y - C(X + Y)\}$$

και διαπιστώνουμε τα εξής:

Σε συνθήκες μεγιστοποίησης του κέρδους με διαφοροποίηση τιμών, και υποθέτοντας διάθεση του προϊόντος σε αμφότερες τις αγορές, ισχύουν τα παρακάτω :

1. Το οριακό έσοδο στις δύο αγορές θα είναι ίδιο και θετικό

2. Η ζήτηση θα είναι ελαστική σε αμφότερες τις αγορές:

$$|\varepsilon_X| > 1, \; |\varepsilon_Y| > 1$$

3. Η τιμή διάθεσης θα είναι μικρότερη όπου η ελαστικότητα της ζήτησης είναι μεγαλύτερη:

$$v < w \Leftrightarrow |\varepsilon_X| > |\varepsilon_Y|$$

δηλαδή η τιμή είναι μικρότερη στην αγορά που είναι περισσότερο ευαίσθητη στην τιμή.

Απόδειξη. Υποθέσαμε λύση εσωτερική, οπότε θα έχουμε την συνθήκη στασιμότητας:

$$\left.\begin{matrix}\Pi_X = 0\\ \Pi_Y = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}R_X = C'\\ R_Y = C'\end{matrix}\right\} \Rightarrow R_X = R_Y = C' > 0$$

Για το οριακό έσοδο στις δύο αγορές βρίσκουμε:

$$R = V(X)X + W(Y)Y \Rightarrow \begin{cases} R_X = V + V'X = V\left(1 + \dfrac{XV'}{V}\right) = V\left(1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_X|}\right) \\ R_Y = W + W'Y = V\left(1 + \dfrac{YW'}{W}\right) = W\left(1 - \dfrac{1}{|\varepsilon_Y|}\right) \end{cases}$$

Η ιδιότητα:

$$R_X = R_Y = C' > 0$$

μας δίνει όλα τα ζητούμενα. Υπενθυμίζουμε ότι όπως διαπιστώσαμε παραπάνω:
το οριακό έσοδο σε μια αγορά είναι γνήσια θετικό $\Leftrightarrow$ η ζήτηση είναι ελαστική $|\varepsilon| > 1$.

▲

Παράδειγμα. Με γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και κόστους:

$$V = 4 - 2X,\ \ W = 5 - Y,\ \ C(Q) = 2 + 2Q,$$

η συνάρτηση κέρδους γράφεται :

$$\Pi = VX + WY - C(X,Y) = (4-2X)X + (5-Y)Y - [2 + 2(X+Y)]$$
$$= -2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2$$

Είναι χωριζομένων μεταβλητών κοίλη, με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\left.\begin{matrix}\Pi_X = 2 - 4X = 0\\ \Pi_Y = 3 - 2Y = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x = 0.5,\ v = 3\\ y = 1.5,\ w = 3.5\end{matrix}\right\} \quad \text{με} \quad \pi = 0.75$$

Η τιμή διάθεσης είναι μικρότερη στη πρώτη αγορά. Παρατηρούμε τώρα ότι οι αντίστοιχες ελαστικότητες είναι:

$$\left\{E_V X = \frac{V}{XV'} = \frac{3}{0.5(-2)} = -3,\ E_W Y = \frac{W}{YW'} = \frac{7/2}{3/2(-1)} = -\frac{7}{3} = -2.33\right\}$$

Η ζήτηση είναι ελαστική σε αμφότερες τις αγορές. Είναι *περισσότερο ελαστική στην πρώτη όπου και έχει τη μικρότερη τιμή.* ▲

Παράδειγμα. Αν η ζήτηση είναι ελαστική με σταθερή ελαστικότητα τότε η αγορά με τη μεγαλύτερη ελαστικότητα της ζήτησης θα επιτύχει μικρότερη τιμή. Έτσι αν η ζήτηση στις δύο αγορές είναι :

$$\{X = \alpha V^{-2} \text{ με } |\varepsilon_X| = 2\}\ \&\ \{Y = \beta W^{-3} \text{ με } |\varepsilon_Y| = 3\}$$

αντίστοιχα, τότε η τιμή θα είναι μικρότερη στη δεύτερη αγορά που έχει μεγαλύτερη ελαστικότητα ζήτησης:

$$V\left(1 - \frac{1}{2}\right) = W\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow w = \frac{3}{4}v.$$

▲

7. Οικονομίες κλίμακας

Θεωρούμε μια συνάρτηση κόστους και το αντίστοιχο μέσο και οριακό κόστος ως συναρτήσεις της παραγόμενης ποσότητας:

$$C = C(Q)\ ,\ \ AC = \frac{C(Q)}{Q},\ \ MC = C'(Q)$$

Θεωρούμε και τις διάφορες παραστάσεις της ελαστικότητας της συνάρτησης κόστους:

$$C = C(Q) \Rightarrow \varepsilon_C = E_Q C = \frac{\%dC}{\%dQ} = \frac{QC'}{C} = \frac{C'(Q)}{C/Q} = \frac{MC}{AC}$$

Όλα τα επί μέρους μεγέθη είναι θετικά διότι η συνάρτηση κόστους είναι γνήσια αύξουσα. Ως άμεση συνέπεια βρίσκουμε ότι σε τυχόν επίπεδο παραγωγής Q τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

- *Το μέσο κόστος είναι φθίνον. Λέμε ότι έχουμε* ***οικονομίες κλίμακας***
- *Το οριακό κόστος είναι μικρότερο από το μέσο κόστος:* $MC < AC$*, και το τραβάει προς τα κάτω*
- *Η συνάρτηση κόστους είναι ανελαστική:* $0 < \varepsilon_C < 1$

Απόδειξη1. Έχουμε:

$$AC = C/Q \Rightarrow \%d(AC) = \%dC - \%dQ$$

Καθώς το Q αυξάνει, αν η συνάρτηση κόστους είναι ανελαστική τότε το κόστος θα ανεβεί κατά μικρότερο ποσοστό, δηλαδή θα έχουμε: $\%dC < \%dQ$, και επομένως η παραπάνω διαφορά είναι αρνητική, δηλαδή το AC ελαττώνεται. .

Απόδειξη2. Το μέσο κόστος ελαττώνεται όταν η παράγωγός του είναι αρνητική. Στη θέση της παραγώγου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ελαστικότητα του μέσου κόστους η οποία έχει ίδιο πρόσημο με την παράγωγο επειδή τα μεγέθη $\{Q, C\}$ είναι θετικά. Η ελαστικότητα πηλίκου ισούται με την διαφορά των ελαστικοτήτων των όρων, και έχουμε:

$$AC = \frac{C}{Q} \Rightarrow E_Q(AC) = \Rightarrow E_Q C - E_Q Q = \varepsilon_C - 1 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_C < 1$$

που είναι το ζητούμενο.

▲

Ισχύουν βέβαια και τα αντίθετά τους, οπότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- *Το μέσο κόστος είναι αύξον.*
- *Το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το μέσο κόστος:* $MC > AC$*, και το τραβάει προς τα πάνω*
- *Η συνάρτηση κόστους είναι ελαστική:* $\varepsilon_C > 1$

▲

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι:

Στο ελάχιστο του μέσου κόστους:

- *Το οριακό κόστος είναι ίσο με το μέσο κόστος:* $MC = AC$
- *Η συνάρτηση κόστους είναι ισοελαστική:* $\varepsilon_C = 1$

Παρατήρηση. Όλα τα παραπάνω ισχύουν ως έχουν αν αντικαταστήσουμε το κόστος και το μέσο κόστος με τα αντίστοιχα μεταβλητά, παραλείποντας το σταθερό κόστος. Υπενθυμίζουμε ότι το οριακό κόστος παραμένει το ίδιο.

▲