Ef.III.5 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ(Α)

ΠΑΡΑΓΩΓΗ-ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ

1. Κέρδος ανταγωνιστικής παραγωγής

Θεωρούμε παραγωγή ποσότητας Q σε συνθήκες **πλήρους ανταγωνισμού,** με την έννοια ότι η μοναδιαία τιμή είναι δοσμένη εξωγενώς και δεν εξαρτάται από την ζήτηση:

$$P = p$$

Η συνάρτηση **κόστους** θα εκφράζεται ως το άθροισμα του **σταθερού** κόστους και του **μεταβλητού** κόστους, όπου για ευκολία θα υποθέτουμε ως συνήθως ότι το σταθερό κόστος υπάρχει και χωρίς παραγωγή:

$C(Q) = F + VC(Q) \Rightarrow MC(Q) = C'(Q) = VC'(Q)$, **οριακό κόστος**

Η συνάρτηση κόστους είναι συνήθως κυρτή, αλλά όχι απαραίτητα. Τέλος, έχουμε και τα μεγέθη:

$\Pi(Q) = pQ - C(Q)$, **κέρδος**

$V\Pi(Q) = pQ - VC(Q)$, **μεταβλητό** ή **λειτουργικό κέρδος**

Έτσι το (καθαρό) κέρδος προκύπτει αφαιρώντας το σταθερό κόστος από το λειτουργικό κέρδος. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους τίθεται στη μορφή:

$$\max\{\Pi = pQ - C(Q) \,\|\, Q \geq 0\}$$

Θα παριστάνουμε τις μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα, τις βέλτιστες ποσότητες και τις παραμέτρους με μικρά. Έτσι η **βέλτιστη παραγωγή** και το **μέγιστο κέρδος** θα παριστάνονται αντίστοιχα με:

$$q,\ \pi = \Pi(q)$$

Η βέλτιστη παραγωγή q θεωρείται και ως η **προσφορά** προϊόντος για την συγκεκριμένη τιμή p.

Παρατήρηση. Μεγιστοποίηση του λειτουργικού κέρδους θα δώσει την ίδια λύση διότι τα δύο μεγέθη διαφέρουν μόνο κατά το σταθερό κόστος και επομένως έχουν μέγιστο στο ίδιο q. Για το μέγιστο λειτουργικό κέρδος θα χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο συμβολισμό:

$$v\pi = V\Pi(q) = \pi + FC$$

▲

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα ανταγωνιστικής παραγωγής, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του p:

1. $q = 0 \Rightarrow \Pi'(0) = p - C'(0) \leq 0$

Λέμε ότι η τιμή p *είναι* ***μη συμφέρουσα*** *για παραγωγή.* ***Θα έχουμε:*** $\{v\pi = 0,\ \pi = -FC\}$

2. $q > 0 \Rightarrow \{\Pi'(q) = p - C'(q) = 0,\ \Pi''(q) = -C''(q) \leq 0\}$

Λέμε ότι η τιμή p *είναι* ***συμφέρουσα*** *για παραγωγή. Θα έχουμε :* $\{v\pi > 0,\ \ \pi > -FC\}$**.**

Οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες, μπορούν να διατυπωθούν και ως εξής

1. $q = 0 \Rightarrow p \leq MC(0)$*, η μοναδιαία τιμή είναι μικρότερη από το αρχικό οριακό κόστος.*

2. $q > 0 \Rightarrow \{p = MC(q),\ MC'(q) \geq 0\}$, ***στη βέλτιστη παραγωγή το οριακό κόστος διασχίζει την μοναδιαία τιμή από κάτω προς τα πάνω, οπότε είναι μικρότερο πριν και μεγαλύτερο μετά.***

Σε κάθε περίπτωση ισχύουν όλα τα σχετικά για ακρότατα. Ειδικότερα, οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες και δίνουν υποψήφια τοπικά μέγιστα, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις πρέπει να εξετάσουμε και την περίπτωση λύσης στο άπειρο ή σε δεξιό σύνορο αν υπάρχει πάνω φραγμός. Παρατηρούμε τέλος ότι η συμφέρουσα τιμή δίνει θετικό λειτουργικό κέρδος, αλλά δεν είναι απαραίτητα κερδοφόρος. Θα είναι και **κερδοφόρος** αν ισχύει και η πρόσθετη συνθήκη:

3. $\pi > 0 \Leftrightarrow v\pi > FC$

Τώρα το λειτουργικό κέρδος υπερκαλύπτει το σταθερό κόστος και δίνει καθαρό κέρδος.

Παρατήρηση.
1. Αν δεν υπάρχει σταθερό κόστος τότε η συμφέρουσα τιμή είναι και κερδοφόρος
2. Αν υπάρχει σταθερό κόστος, το οποίο όμως εμφανίζεται μόνο με την παραγωγή, δηλαδή $C(0)=0$, τότε η συμφέρουσα τιμή δίνεται από την κερδοφόρο, διότι υπάρχει πάντα η επιλογή της μηδενικής παραγωγής με μηδενικό κόστος

▲

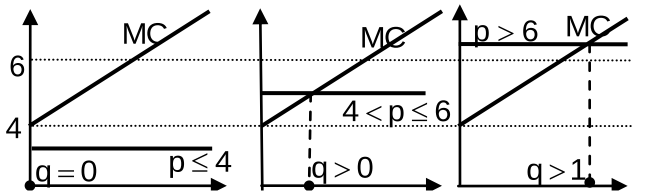
Ισχύει και το παρακάτω
*Αν η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή, δηλαδή με **αύξον οριακό κόστος**, τότε η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη και έχουμε πρόβλημα **Κυρτού Προγραμματισμού** (ΚΠ). Οι παραπάνω συνθήκες γίνονται **ικανές** και μάλιστα για ολικό μέγιστο, και η λύση δίνεται από τις παρακάτω συνθήκες:*
1. $p \le MC(0) \Rightarrow q=0$. *Η μοναδιαία τιμή είναι μη συμφέρουσα.*
2. $p > MC(0) \Rightarrow q>0$, *Η μοναδιαία τιμή είναι συμφέρουσα. Θα είναι η στάσιμη όπου το οριακό κόστος κόβει την μοναδιαία τιμή, ή αν δεν υπάρχει στάσιμη τότε στο δεξιό σύνορο αν υπάρχει τέτοιο, αλλιώς στο άπειρο.*
Παράδειγμα. Θα λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους για ανταγωνιστική παραγωγή με συνάρτηση κόστους:

$$C=1+4Q+Q^2 \Rightarrow MC=C'=4+2Q,\quad \Pi(Q)=pQ-C(Q)=-1+(p-4)Q-Q^2$$

Λύση. Η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή οπότε έχουμε πρόβλημα τύπου ΚΠ, και η λύση δίνεται από τις παραπάνω συνθήκες. Επομένως η λύση q, θα είναι:
1. $q=0$ αν $\Pi'(0)\le 0 \Rightarrow p \le MC(0)=4$, **μη συμφέρουσα**
2. $q>0$ αν $\Pi'(0)\le 0 \Rightarrow p > MC(0)=4$, **συμφέρουσα,**

Σαυτή την περίπτωση, όπως φαίνεται και στα σχήματα, η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής q είναι αυτή στην οποία το αύξον οριακό κόστος κόβει την τιμή p από κάτω προς τα πάνω, και δίνεται από την εξίσωση στασιμότητας:

$$\Pi'(q)=0 \Rightarrow p=MC(q) \Rightarrow p=4+2q$$
$$\text{για } \{q>0 \Leftrightarrow p>4\}$$



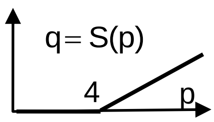
μη συμφέρουσα **συμφέρουσα** **κερδοφόρος**

Δηλαδή, **η προσφορά καθορίζεται από την ποσότητα στην οποία το οριακό κόστος συμπίπτει με την μοναδιαία τιμή.** Δηλαδή, **η μοναδιαία τιμή προσφοράς συμπίπτει με το οριακό κόστος.** Η παραπάνω είναι και **η αντίστροφη συνάρτηση προσφοράς.**
Για το μέγιστο κέρδος βρίσκουμε::

$$\pi=\begin{cases} -C(0)=-1 & \text{αν } p\le 4 \\ pq-C(q)=-1+q^2 & \text{αν } p>4 \end{cases},$$ με **κερδοφορία** αν $\pi=-1+q^2>0 \Rightarrow \{q>1, p>6\}$

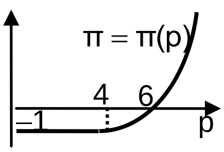
Παρατήρηση. Αντιστρέφοντας στην παραπάνω εξίσωση στασιμότητας, βρίσκουμε την ποσότητα προσφοράς ως συνάρτηση της τιμής, δηλαδή βρίσκουμε την **συνάρτηση προσφοράς**:

$$p=4+2q \Rightarrow q=(p-4)/2 \ \text{ αν } p>4$$



Αντικαθιστώντας στο μέγιστο κέρδος το εκφράζουμε επίσης **ως συνάρτηση της τιμής** p:

$$\pi=\begin{cases} -C(0)=-1 & \text{αν } p\le 4 \\ -1+q^2=-1+(p-4)^2/4 & \text{αν } p>4 \end{cases}$$



Παρατήρηση. Ως συναρτήσεις της τιμής p:
- *Η **προσφορά προϊόντος:*** $q=S(p)$, *είναι αύξουσα.*
- *Το **μέγιστο κέρδος:*** $\pi(p)$, *είναι συνάρτηση αύξουσα **κυρτή,** δηλαδή αυξάνει με αυξανόμενο ρυθμό, οπότε κυμαινόμενες τιμές του προϊόντος είναι κατά μέσο όρο περισσότερο προσοδοφόρες από αντίστοιχες ενδιάμεσες σταθερές.*

3. Κερδοφορία

Θα επανεξετάσουμε τώρα το πρόβλημα της συμφέρουσας και κερδοφόρας τιμής χρησιμοποιώντας το οριακό και τα μέσα κόστη. Καταρχήν εκφράζουμε το κέρδος και το λειτουργικό κέρδος στην παρακάτω μορφή:

$\Pi = pQ - C(Q) = Q[p - AC]$, όπου: $AC = C(Q)/Q$ είναι το **μέσο κόστος**

$V\Pi = pQ - VC(Q) = Q[p - AVC]$, όπου: $AVC = VC(Q)/Q$ είναι το **μέσο μεταβλητό κόστος**

Διαπιστώνουμε τώρα ότι σε μια **ανταγωνιστική** παραγωγή, η μοναδιαία τιμή p είναι:

1. συμφέρουσα $\Leftrightarrow$ *είναι γνήσια μεγαλύτερη από το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος:*

$q > 0 \Leftrightarrow p > p_1 = \min\{AVC\}$,

2. κερδοφόρα $\Leftrightarrow$ *είναι γνήσια μεγαλύτερη από το ελάχιστο μέσο κόστος:*

$\pi > 0 \Leftrightarrow p > p_2 = \min\{AC\}$

Πράγματι, σαυτή την περίπτωση το μέγιστο λειτουργικό κέρδος θα είναι γνήσια θετικό στο 1, και αντίστοιχα το μέγιστο κέρδος θα είναι γνήσια θετικό στο 2. Επομένως, τα δύο μεγέθη της ελάχιστης συμφέρουσας και της ελάχιστης κερδοφόρας τιμής μπορούμε να τα υπολογίσουμε με την γνωστή διαδικασία βελτιστοποίησης:

$p_1 = \min\{AVC\}, \quad p_2 = \min\{AC\}$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω χαρακτηριστική ιδιότητα που αποδείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο:

Σε εσωτερικό ελάχιστο του μέσου κόστους το οριακό κόστος συμπίπτει με το μέσο κόστος, διασχίζοντας το από κάτω προς τα πάνω. Η ίδια ιδιότητα ισχύει για το μέσο μεταβλητό κόστος.

Παράδειγμα. Θα βρούμε πάλι την ελάχιστη συμφέρουσα και την ελάχιστη κερδοφόρα τιμή στο προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τώρα το οριακό και τα μέσα κόστη. Έχουμε:

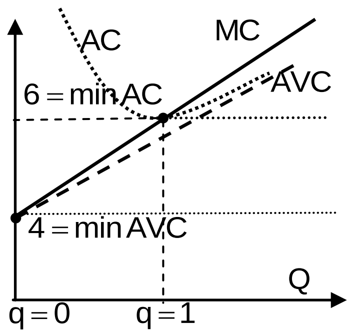
$$C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow \left\{AC = \frac{1}{Q} + 4 + Q,\ AVC = 4 + Q\right\} \text{ με } Q \geq 0$$

1. Το μέσο μεταβλητό κόστος είναι γραμμική συνάρτηση με ελάχιστο:

$AVC = 4 + Q \Rightarrow \{Q = 0, \min AVC = 4\}$

2. Το μέσο κόστος είναι κυρτή συνάρτηση ως άθροισμα κυρτής με γραμμική. Επομένως έχει ελάχιστο στο στάσιμο, εφόσον υπάρχει:

$$AC = \frac{1}{Q} + 4 + Q \Rightarrow AC'(Q) = -\frac{1}{Q^2} + 1 = 0 \Rightarrow \{Q = 1, \min AC = 6\}$$



Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε τα παραπάνω ελάχιστα εξισώνοντας τα αντίστοιχα μέσα με το οριακό κόστος:

$AVC = MC \Rightarrow 4 + Q = 4 + 2Q \Rightarrow \{Q = 0, \min AVC = 4\}$

$$AC = MC \Rightarrow \frac{1}{Q} + 4 + Q = 4 + 2Q \Rightarrow \{Q = 1, \min AC = 6\}$$

Παρατήρηση. Επισημαίνουμε τη διάκριση μεταξύ των παρακάτω δύο συναρτήσεων κέρδους:

1. $\Pi(Q) = pQ - C(Q)$, **άμεση συνάρτηση κέρδους** (direct profit function).

Ως συνάρτηση της ποσότητας Q, εκφράζει το κέρδος *αν το προϊόν παραχθεί στην ποσότητα* Q, για την δεδομένη τιμή p.

2. $\pi(p) = \Pi(q) = pq - C(q)$, **έμμεση συνάρτηση κέρδους** (indirect profit function)

Καλείται και **συνάρτηση μέγιστου κέρδους** (maximal profit function). Ως συνάρτηση της τιμής p εκφράζει το πραγματοποιούμενο κέρδος, όταν *το προϊόν παραχθεί στην βέλτιστη ποσότητα* q για την δεδομένη τιμή p. Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα, βρήκαμε:

$\Pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - (1 + 4Q + Q^2) = -1 + (p-4)Q + Q^2$

$$\pi(p) = \begin{cases} -1 & \text{αν } p \leq 4 \\ -1 + (p-4)^2/4 & \text{αν } p > 4 \end{cases}$$

▲

Παράδειγμα. Θα εξετάσουμε και ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους για ανταγωνιστική παραγωγή, που δεν είναι ΚΠ, δηλαδή το οριακό κόστος δεν είναι αύξον. Θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή συνάρτηση κόστους που εξετάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Είναι κυβική, αρχικά κοίλη πριν καταλήξει να είναι κυρτή, και **το οριακό κόστος είναι στην αρχή φθίνον**:

$$C = 9 + 3Q - Q^2 + Q^3/3$$

$$\Rightarrow MC = 3 - 2Q + Q^2, \quad AC = 9/Q + 3 - Q + Q^2/3, \quad AVC = 3 - Q + Q^2/3$$

1. Στο ελάχιστό του, το μέσο μεταβλητό κόστος συμπίπτει με το οριακό, οπότε βρίσκουμε:

$$AVC = MC \Rightarrow 2Q^2 - 3Q = 0 \Rightarrow \{Q = 1.5,\ AVC(1.5) = 2.25\} \Rightarrow \{q_1 = 1.5,\ p_1 = 2.25\}$$

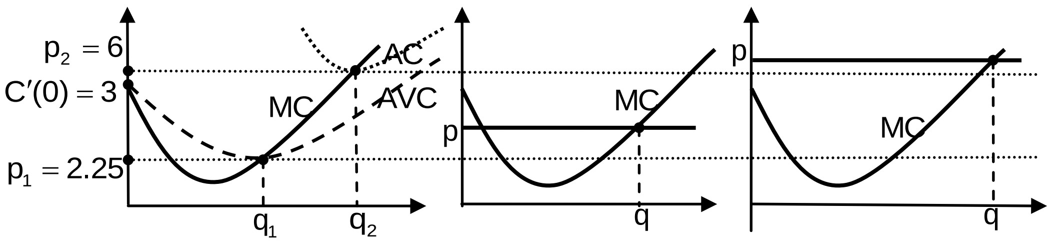
2. Στο ελάχιστό του, το μέσο κόστος συμπίπτει με το οριακό, οπότε βρίσκουμε:

$$AC = MC \Rightarrow 2Q^3 - 3Q^2 - 27 = 0 \Rightarrow \{Q = 3,\ AC(3) = 6\} \Rightarrow \{q_2 = 3,\ p_2 = 6\}$$

Συμπεραίνουμε ότι:

- η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή είναι η $p_1 = 2.25$ με παραγωγή $q_1 = 1.5$
- η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή είναι $p_2 = 6$ με παραγωγή $q_2 = 3$

Στο παρακάτω γράφημα δίνουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της λύσης.



βέλτιστη ανταγωνιστική παραγωγή με $C = 9 + 3Q - Q^2 + Q^3/3$

1. Στο πρώτο σχήμα εντοπίζουμε την ελάχιστη συμφέρουσα τιμή $p_1 = 2.25$ και την ελάχιστη κερδοφόρα $p_2 = 6$. Βρίσκονται στις τομές του οριακού κόστους με τα αντίστοιχα μέσα κόστη. Υπενθυμίζουμε ότι οι αρχικές τιμές οριακού και μέσου μεταβλητού κόστους συμπίπτουν πάντοτε. Εδώ έχουμε:

$$MC(0) = AVC(0) = 3$$

Ως γνωστόν, σε κάθε επίπεδο παραγωγής το λειτουργικό κέρδος δίνεται από το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ της ευθείας p και της καμπύλης οριακού κόστους MC

2. Στο δεύτερο σχήμα, δίνουμε μια συμφέρουσα αλλά μη κερδοφόρα τιμή: $\{p > p_1,\ p \le p_2\}$. Το οριακό κόστος την κόβει δύο φορές. Είναι τα στάσιμα σημεία. Αλλά το πρώτο είναι τοπικό ελάχιστο. Το δεύτερο: $Q = q$ όπου την κόβει από κάτω προς τα πάνω είναι τοπικό και ολικό μέγιστο. Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, τώρα **η τιμή είναι συμφέρουσα παρότι μικρότερη από το αρχικό οριακό κόστος:** $\Pi'(0) = MC(0) = 3$**.** Αρχίζουμε με οριακή ζημιά, αλλά στη συνέχεια έχουμε οριακά κέρδη καθώς το οριακό κόστος πέφτει κάτω από την μοναδιαία τιμή.

3. Σε κάθε περίπτωση **το λειτουργικό κέρδος δίνεται από το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ της ευθείας** p **και της καμπύλης** $MC = C'(Q)$**.** Ειδικότερα το προσημασμένο εμβαδό πρέπει να είναι μηδενικό στην ελάχιστη συμφέρουσα τιμή με παραγωγή q_1, και ίσο με το σταθερό κόστος $F = 9$ στην ελάχιστη κερδοφόρα τιμή με παραγωγή q_2. Ειδικά στο δεύτερο σχήμα, είναι γνήσια θετικό διότι η τιμή είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη συμφέρουσα.

4. Στο τρίτο γράφημα δίνουμε μια κερδοφόρο τιμή: $p > p_2$. Τώρα το προσημασμένο εμβαδό πρέπει να είναι μεγαλύτερο και από το σταθερό κόστος

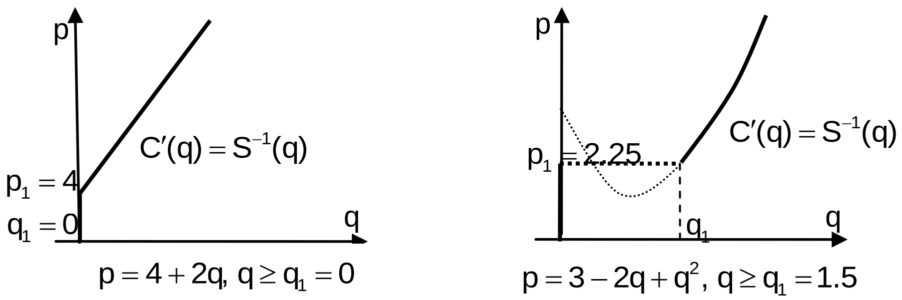
3. Προσφορά προϊόντος

Διαπιστώσαμε ότι στην ανταγωνιστική παραγωγή η προσφορά προϊόντος αρχίζει με την ελάχιστη συμφέρουσα τιμή $p_1 = \min AVC$ και αντίστοιχη ποσότητα q_1, και καθορίζεται έτσι ώστε το οριακό κόστος να συμπίπτει με την τιμή και να είναι αύξον. Στα δύο παραδείγματα παραπάνω, βρήκαμε έτσι τις εξισώσεις προσφοράς, που δίνονται από τις παρακάτω **αντίστροφες συναρτήσεις προσφοράς**:

1. $C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow p = C'(q) \Rightarrow p = 4 + 2q$ για $q \geq q_1 = 0$

2. $C = 9 + 3Q - Q^2 + \dfrac{Q^3}{3} \Rightarrow p = C'(q) \Rightarrow p = 3 - 2q + q^2$ για $q \geq q_1 = 1.5$

Δηλαδή, για **συμφέρουσες τιμές** οι αντίστροφες συναρτήσεις προσφοράς συμπίπτουν με τις συναρτήσεις οριακού κόστους, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα.



συμφέρουσα προσφορά ανταγωνιστικής παραγωγής: $p = C'(q), \quad q \geq q_1$

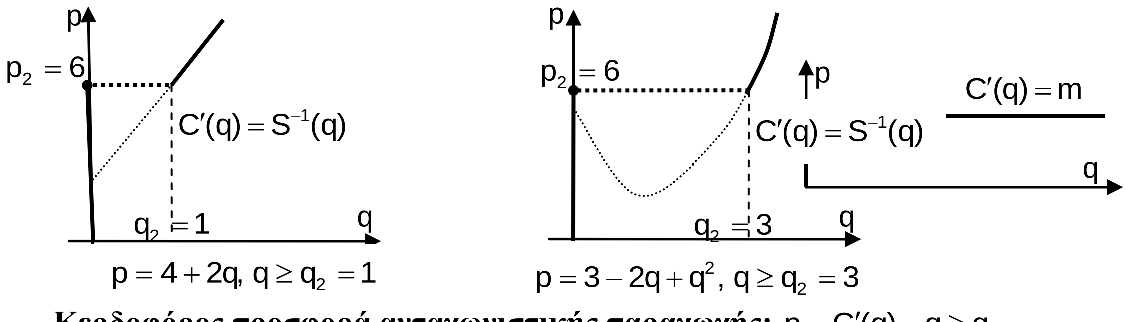
Παρατηρούμε επίσης ότι στο δεύτερο σχήμα, όπου *το οριακό κόστος είναι αρχικά φθίνον*, καθώς η μοναδιαία τιμή περνάει το κατώφλι του $p_1 = \min AVC$ και γίνεται συμφέρουσα, **η παραγωγή εμφανίζει ασυνέχεια** και από μηδενική πηγαίνει στην αντίστοιχη ποσότητα q_1, παρακάμπτοντας τελείως το ενδιάμεσο τμήμα.

Παρατήρηση.

1. Αν υποθέσουμε ότι το σταθερό κόστος εμφανίζεται μόνο με την έναρξη της παραγωγής, τότε η μηδενική παραγωγή θα έχει μηδενικό κόστος:

$$C(0) = 0$$

Σαυτή την περίπτωση έχουμε πάντοτε την επιλογή της μηδενικής παραγωγής με μηδενικό κόστος, οπότε η συμφέρουσα θα δίνεται από την κερδοφόρο. Η παραγωγή θα αρχίσει με τιμή p_2 και ποσότητα q_2. Τώρα η συνάρτηση προσφοράς θα έχει τις παρακάτω μορφές:



Κερδοφόρος προσφορά ανταγωνιστικής παραγωγής: $p = C'(q), \quad q \geq q_2$

2. Αν η συνάρτηση κόστους είναι γραμμική: $C = C_0 + mQ$, τότε η εξίσωση ζήτησης γράφεται:

$$p = C'(q) = m,$$

και η προσφορά είναι πλήρως ελαστική:

$$q = \begin{cases} 0 \text{ αν } p \leq m \\ \infty \text{ αν } p > m \end{cases}$$

Τώρα το μοναδιαίο κόστος είναι σταθερό m, οπότε η παραγωγή είναι συμφέρουσα μόνο αν η τιμή είναι ακόμη και ελάχιστα μεγαλύτερη, μάλιστα για άπειρη ποσότητα παραγωγής. ▲

4. Κέρδος μονοπωλίου

Θεωρούμε τώρα και την περίπτωση μεγιστοποίησης κέρδους σε συνθήκες **ελλιπούς ανταγωνισμού**, ειδικότερα συνθήκες **μονοπωλίου** (monopoly), όπου η μοναδιαία τιμή δεν είναι δοσμένη αλλά συνδέεται με την ποσότητα σύμφωνα με την εξίσωση ζήτησης του προϊόντος, όπου:

$P = P(Q) = D^{-1}(Q)$: αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης

Για το έσοδο και το κέρδος, βρίσκουμε:

$R(Q) = P(Q)Q$

$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$, όπου: $C(Q) = F + VC(Q)$: συνάρτηση κόστους

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους τίθεται στη μορφή:

$\max\{\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q)Q - C(Q) \,||\, Q \geq 0\}$, όπου: $P(Q) = D^{-1}(Q)$

Όσον αφορά την **βέλτιστη ποσότητα** παραγωγής q διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $q = 0 \Rightarrow \Pi'(0) \leq 0 \Rightarrow R'(0) = P(0) \leq C'(0)$, *η παραγωγή είναι **μη συμφέρουσα***

2. $q > 0 \Rightarrow \{\Pi'(q) = 0, \Pi''(q) \leq 0\} \Rightarrow \{R'(q) = C'(q), R''(q) \leq C''(q)\}$. *Η παραγωγή είναι **συμφέρουσα**.*

Οι συνθήκες μπορούν να διατυπωθούν και χρησιμοποιώντας τα οριακά μεγέθη:

1. $q = 0 \Rightarrow MR(0) = P(0) \leq MC(0)$

Η μέγιστη (αρχική) τιμή που δέχεται η κατανάλωση είναι μικρότερη από το αρχικό οριακό κόστος.

2. $q > 0 \Rightarrow \{MR(q) = MC(q), MR'(q) \leq MC'(q)\}$

Στην βέλτιστη παραγωγή η καμπύλη οριακού κόστους κόβει την καμπύλη οριακού εσόδου από κάτω προς πάνω, διότι έχει μεγαλύτερη παράγωγο, είναι μικρότερη πριν και μεγαλύτερη μετά. Αλλά σε αντίθεση με την ανταγωνιστική παραγωγή τώρα στην βέλτιστη παραγωγή το καθένα από τα παραπάνω οριακά μεγέθη μπορεί να είναι αύξον ή φθίνον.

Σε κάθε περίπτωση ισχύουν όλα τα σχετικά για ακρότατα. Δηλαδή, οι παραπάνω συνθήκες είναι μόνο αναγκαίες για υποψήφια τοπικά μέγιστα, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να έχουμε και λύση στο άπειρο ή σε δεξιό σύνορο αν υπάρχει πάνω φραγμός. Παρατηρούμε τέλος ότι η συμφέρουσα παραγωγή δίνει θετικό λειτουργικό κέρδος, αλλά δεν είναι απαραίτητα κερδοφόρος. Θα είναι και **κερδοφόρος** αν ισχύει και η πρόσθετη συνθήκη:

3. $\pi > 0 \Leftrightarrow v\pi > FC$**,**

Τώρα το λειτουργικό κέρδος υπερκαλύπτει το σταθερό κόστος και δίνει καθαρό κέρδος.

Αν έχουμε πρόβλημα ΚΠ τότε οι παραπάνω συνθήκες είναι και ικανές, μάλιστα για ολικό μέγιστο. Δηλαδή, αν κάποια ισχύει τότε μας δίνει τη λύση. Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε τις άλλες, σε κάθε περίπτωση δεν θα ισχύουν. Έτσι:

*Αν η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη, π.χ. έχουμε **φθίνον οριακό έσοδο** και **αύξον οριακό κόστος** τότε έχουμε πρόβλημα **Κυρτού Προγραμματισμού** (ΚΠ). Οι παραπάνω συνθήκες γίνονται ικανές και μάλιστα για ολικό μέγιστο. Σαυτή την περίπτωση, η λύση δίνεται από τις παρακάτω συνθήκες:*

1. $MR(0) = P(0) \leq MC(0) \Rightarrow q = 0$. *Η παραγωγή δεν είναι συμφέρουσα.*

2. $MR(0) = P(0) > MC(0) \Rightarrow q > 0$ *Η παραγωγή είναι συμφέρουσα. Θα είναι η στάσιμη αν υπάρχει, ή αν δεν υπάρχει στάσιμη τότε στο δεξιό σύνορο αν υπάρχει, αλλιώς στο άπειρο.*

Παρατήρηση.

Συγκρίνοντας τις δύο συνθήκες στασιμότητας, για ανταγωνιστική και μονοπωλιακή παραγωγή, παρατηρούμε τα εξής:

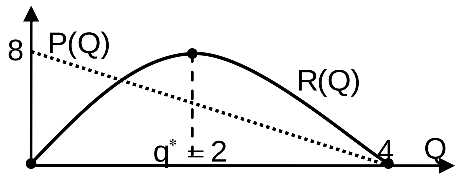
$R'(Q) = C'(Q) \Rightarrow p = C'(Q)$, για ανταγωνιστική παραγωγή

$R'(Q) = C'(Q) \Rightarrow P + P'(Q)Q = C'(Q) \Rightarrow P = C'(Q) - P'(Q)Q$, για μονοπωλιακή παραγωγή

Υποθέτοντας, ως συνήθως, ότι η συνάρτηση ζήτησης είναι φθίνουσα, ο όρος $-P'(Q)Q$ είναι θετικός. Συμπεραίνουμε ότι: *η ίδια ποσότητα* Q *διατίθεται σε ψηλότερη τιμή σε συνθήκες μονοπωλίου απότι σε ανταγωνιστικές συνθήκες:* $P > p$ *για το ίδιο* Q.

Παράδειγμα.
Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση ζήτησης:

$$Q = 4 - P/2 \Rightarrow P = 2(4 - Q)$$



Η συνάρτηση εσόδου είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$$R = PQ = 2(4 - Q)Q = 8Q - 2Q^2$$

$$R'(Q) = 8 - 4Q = 0 \Rightarrow q^* = 2$$

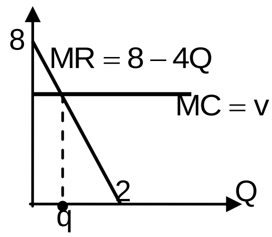
Θεωρούμε και μια γραμμική συνάρτηση κόστους

$C = 2 + vQ$, v : μοναδιαίο κόστος

Θα βρούμε την βέλτιστη παραγωγή, που μεγιστοποιεί το κέρδος:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = -2 + (8 - v)Q - 2Q^2 .$$

Λύση. Έχουμε πρόβλημα ΚΠ διότι η συνάρτηση εσόδων είναι κοίλη και η συνάρτηση κόστους γραμμική κυρτή, δηλαδή η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη.



Η βέλτιστη παραγωγή θα είναι:

1. $q = 0$ αν $\Pi'(0) \le 0 \Rightarrow R'(0) = P(0) \le C'(0) \Rightarrow 8 \le v$, μη συμφέρουσα
2. $q > 0$ αν $\Pi'(0) > 0 \Rightarrow R'(0) = P(0) > C'(0) \Rightarrow 8 > v$, συμφέρουσα

Τώρα η βέλτιστη παραγωγή δίνεται από την εξίσωση στασιμότητας:

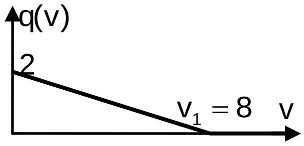
$\Pi(Q) = 0 \Rightarrow R'(Q) = C'(Q) \Rightarrow 8 - 4Q = v \Rightarrow q = (8 - v)/4$ για $v < 8$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε και το μέγιστο κέρδος:

$\pi = \Pi(q) = R(q) - C(q) = (8q - 2q^2) - (2 + vq) = -2 + (8 - v)q - 2q^2 = -2 + (8 - v)^2/8$, για $v < 8$

Θα έχουμε κερδοφορία αν το μοναδιαίο κόστος είναι συμφέρον: $v < 8$, και επιπλέον

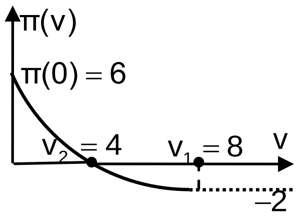
$$\pi = -2 + (8 - v)^2/8 > 0 \Rightarrow v < 4$$



Παρατήρηση. Βρήκαμε ως συναρτήσεις του μοναδιαίου κόστους, την προσφορά προιόντος και το αντίστοιχο (μέγιστο) κέρδος:

$q = (8 - v)/4$, για $v < 8$, μετά μηδενίζεται

$\pi = -2 + (8 - v)^2/8$, για $v < 8$, μετά μένει σταθερό στο $F = -2$,



Διαπιστώσαμε ότι το μέγιστο συμφέρον και το μέγιστο κερδοφόρο μοναδιαίο κόστος της παραγωγής είναι $v_1 = 8$ και $v_2 = 4$, αντίστοιχα.
Επίσης ότι ως συναρτήσεις του μοναδιαίου κόστους v :

1. Η προσφορά προιόντος $q(v)$ είναι φθίνουσα
2. Το κέρδος $\pi(v)$ είναι φθίνουσα κυρτή, οπότε κυμαινόμενα μοναδιαία κόστη είναι κατά μέσο όρο περισσότερο προσοδοφόρα από σταθερό ενδιάμεσο.

▲

5. Κέρδος με συντελεστή παραγωγής

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μια παραγωγική διαδικασία όπου η παραγωγή και το κόστος δεν συνδέονται απευθείας, αλλά μέσω ενός συντελεστή παραγωγής τον οποίο συμβατικά θα αποκαλούμε **εργασία** (**L**abor) L. Τώρα η παραγωγή θα είναι συνάρτηση της εργασίας:

$$Q = Q(L)$$

συνήθως κοίλη συνάρτηση αλλά όχι απαραίτητα. Θα υποθέσουμε **συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού στην αγορά του προιόντος και της εργασίας,** οπότε η μοναδιαία τιμή του προιόντος P, και το μοναδιαίο κόστος της εργασίας W θα είναι παράμετροι, δηλαδή σταθερές καθορισμένες εξωγενώς:

$$P = p,\ W = w$$

Το κόστος και το έσοδο της παραγωγής θα είναι:

$$C = wL,\ R = pQ(L)$$

Υποθέτοντας ως συνήθως ότι το σταθερό κόστος υπάρχει και χωρίς παραγωγή, το παραλείψαμε αν υπάρχει, δεδομένου ότι δεν επηρεάζει την βέλτιστη παραγωγή αλλά μόνο το επίπεδο του κέρδους κατά μια σταθερά. Έτσι, η παρακάτω μελέτη αφορά στην πραγματικότητα το **λειτουργικό κέρδος**:

$$\max_L \{\Pi(L) = pQ(L) - wL \,\|\, L \ge 0\}$$

Μεγιστοποίηση κέρδους με συντελεστή παραγωγής

Όσον αφορά την βέλτιστη ποσότητα εργασίας ℓ, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\ell = 0 \Rightarrow \Pi'(0) \le 0 \Rightarrow \{R'(0) \le C'(0)\}$*, οι τιμές* $\{p, w\}$ *είναι **μη συμφέρουσες***

2. $\ell > 0 \Rightarrow \{\Pi'(\ell) = 0, \Pi''(\ell) \le 0\} \Rightarrow \{R'(\ell) = C'(\ell), R''(\ell) \le C''(\ell)\}$*, οι τιμές* $\{p, w\}$ *είναι **συμφέρουσες***

Οι συνθήκες μπορούν να διατυπωθούν και χρησιμοποιώντας τα οριακά μεγέθη:

1. $\ell = 0 \Rightarrow R'(0) = pQ'(0) \le w$

Το αρχικό οριακό έσοδο είναι μικρότερο από το μοναδιαίο κόστος του συντελεστή

2. $\ell > 0 \Rightarrow \{R'(\ell) = pQ(\ell) = w,\ \ R''(\ell) = pMQ'(\ell) \le 0\}$,

Στην βέλτιστη ποσότητα εργασίας η καμπύλη οριακού εσόδου κόβει το μοναδιαίο κόστος από πάνω προς τα κάτω, είναι μεγαλύτερη πριν και μικρότερη μετά.

Σε κάθε περίπτωση ισχύουν όλα τα σχετικά για ακρότατα. Δηλαδή, οι παραπάνω συνθήκες είναι μόνο αναγκαίες για υποψήφια τοπικά μέγιστα, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να έχουμε και λύση στο άπειρο ή σε δεξιό σύνορο αν υπάρχει πάνω φραγμός. Παρατηρούμε τέλος ότι η συμφέρουσα τιμή δίνει θετικό λειτουργικό κέρδος, αλλά δεν είναι απαραίτητα κερδοφόρος. Θα είναι και κερδοφόρος αν το μέγιστο λειτουργικό κέρδος υπερκαλύπτει και το σταθερό κόστος.

Ισχύει και το παρακάτω

*Αν η συνάρτηση παραγωγής είναι κοίλη, δηλαδή με **φθίνον οριακό προιόν**, τότε η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη και έχουμε πρόβλημα **Κυρτού Προγραμματισμού** (ΚΠ). Οι παραπάνω συνθήκες γίνονται ικανές και μάλιστα για ολικό μέγιστο. Σαυτή την περίπτωση, η λύση δίνεται από τις παρακάτω συνθήκες:*

1. $R'(0) = pMQ(0) \le w \Rightarrow \ell = 0$. *Οι μοναδιαίες τιμές είναι μη συμφέρουσες.*

2. $R'(0) = pMQ(0) > w \Rightarrow \ell > 0$, *οι μοναδιαίες τιμές είναι συμφέρουσες. Η λύση θα είναι η στάσιμη αν υπάρχει, ή αν δεν υπάρχει στάσιμη τότε στο δεξιό σύνορο αν υπάρχει, αλλιώς στο άπειρο.*

Παρατήρηση. Όλες οι συνθήκες εξαρτώνται από τον λόγο των μοναδιαίων τιμών: w/p, ειδικότερα δεν εξαρτώνται από τη νομισματική μονάδα. Λέμε ότι δεν υπάρχει **ψευδαίσθηση χρήματος.**

▲

Λύνοντας το πρόβλημα βρίσκουμε την βέλτιστη λύση ως συνάρτηση των παραμέτρων $\{p, w\}$:

$\ell = \ell(p, w)$, **ζήτηση εργασίας** (labor demand)

Ειδικότερα όσον αφορά την ζήτηση εργασίας, προκύπτει από τα παραπάνω ότι:

- *Αν οι τιμές* $\{p, w\}$ *είναι μη συμφέρουσες τότε η ζήτηση εργασίας είναι μηδενική:* $\ell = 0$.
- *Αν οι τιμές* $\{p, w\}$ *είναι συμφέρουσες τότε η ζήτηση εργασίας* $\ell > 0$ *είναι αυτή στην οποία το **οριακό έσοδο συμπίπτει με το μοναδιαίο κόστος της εργασίας:***

$R'(\ell) = pQ'(\ell) = w \Rightarrow Q'(\ell) = w/p$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς ℓ βρίσκουμε την **συνάρτηση ζήτησης** (demand function) εργασίας για τις συμφέρουσες τιμές. Διαπιστώνουμε ότι η λύση του προβλήματος εξαρτάται μόνο από τον λόγο των τιμών:

w/p

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας βρίσκουμε επίσης την *βέλτιστη ποσότητα παραγωγής*, και το *μέγιστο (λειτουργικό) κέρδος* επίσης ως συναρτήσεις των παραμέτρων:

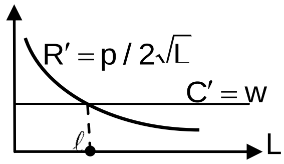
$q(p, w) = Q(\ell)$, **προσφορά προιόντος** (product supply)

$\pi(p, w) = \Pi(\ell) = pQ(\ell) - w\ell$, **μέγιστο κέρδος** (maximal profit)

Παράδειγμα. $Q=\sqrt{L}\Rightarrow \max\{\Pi=p\sqrt{L}-wL \,\|\, L\geq 0\}$

Πρόβλημα ΚΠ με στάσιμη λύση, που θα είναι και η λύση μέγιστου κέρδους.

$$\Pi'(L)=0\Rightarrow \frac{p}{2\sqrt{L}}-w=0\Rightarrow L=\frac{p^2}{4w^2}$$



Η λύση βρίσκεται εκεί όπου το φθίνον οριακό έσοδο κόβει το μοναδιαίο κόστος εργασίας από πάνω προς τα κάτω. Βρίσκουμε:

$\ell=\dfrac{p^2}{4w^2}$, ζήτηση εργασίας

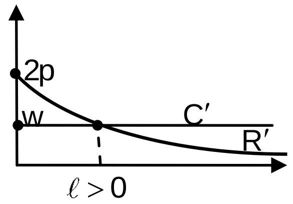
$q=\sqrt{\ell}=\dfrac{p}{2w}$, προσφορά προιόντος

$\pi=pq-w\ell=\dfrac{p^2}{4w}$, μέγιστο κέρδος

Ειδικότερα, όλες οι τιμές $\{p,w\}$ είναι συμφέρουσες. Εξάλλου έχουμε πάντοτε $MR(0)\to+\infty>v$

▲

Παράδειγμα. $Q=2\ln(1+L)\Rightarrow \max\{\Pi=2p\ln(1+L)-wL \,\|\, L\geq 0\}$

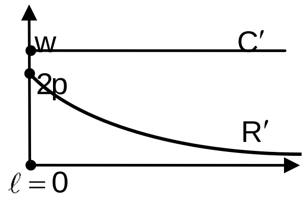


Πρόβλημα ΚΠ. Θα το λύσουμε με την γενική μέθοδο:

1. Στάσιμη εσωτερική:

$$\Pi'(L)=\frac{2p}{1+L}-w=0\Rightarrow \ell=\frac{2p}{w}-1>0 \text{ , αν } \ell>0\Rightarrow w<2p$$

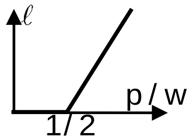
Η λύση βρίσκεται εκεί όπου το φθίνον οριακό έσοδο κόβει το μοναδιαίο κόστος της εργασίας από πάνω προς τα κάτω.



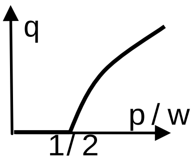
2. Συνοριακή μηδενική: $\ell=0$, αν $\Pi'(0)=2p-w\leq 0\Rightarrow w\geq 2p$

Έτσι θα έχουμε παραγωγή: $\ell>0$ μόνο αν το μοναδιαίο κόστος εργασίας είναι μικρότερο από το διπλάσιο της μοναδιαίας τιμής του προιόντος.

Παρατήρηση. Η λύση παριστάνεται με τον παρακάτω πίνακα.



	ζήτηση εργασίας	προσφορά προιόντος	μέγιστο κέρδος
Συνθήκη	ℓ	q	π
$w<2p$	$2p/w-1$	$2\ln(2p/w)$	$2p\ln(2p/w)-(2p-w)$
$w\geq 2p$	0	0	0



Ως συναρτήσεις των παραμέτρων $\{p,w\}$:

- Η ζήτηση εργασίας $\ell=\ell(p,w)$ και η προσφορά προιόντος $q=q(p,w)$ εξαρτώνται μόνο από τον λόγο p/w και είναι: $p-$αύξουσες, $w-$φθίνουσες.
- Το μέγιστο κέρδος $\pi=\pi(p,w)$ είναι $p-$αύξουσα και $w-$φθίνουσα, **κυρτή** ως προς αμφότερες.

Επομένως κυμαινόμενες τιμές $\{p,w\}$ είναι περισσότερο προσοδοφόρες από ενδιάμεσες σταθερές, κατά μέσο όρο.

▲

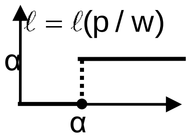
Παράδειγμα. $\{Q=L^{\alpha}$ με $0<\alpha<1\}\Rightarrow \max\{\Pi=pL^{\alpha}-wL \,\|\, L\geq 0\}$,πρόβλημα ΚΠ, με στάσιμη λύση:

$$\Pi'=p\alpha L^{\alpha-1}-w=0\Rightarrow \ell=\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad q=\ell^{\alpha}=\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},\quad \pi=p\ell^{\alpha}-w\ell=(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}w\left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{1}{1-a}}$$

▲

Παράδειγμα. $Q = L^2 \Rightarrow \max\{\Pi = pL^2 - wL \,||\, L \le \alpha\}$

Έχουμε πάνω περιορισμό στην εργασία. Τώρα η συνάρτηση παραγωγής είναι **κυρτή,** το ίδιο και η συνάρτηση κέρδους. Τ**ο μέγιστο κέρδος θα βρίσκεται σένα από τα δύο σύνορα:** $0 \le L \le \alpha$, όπου είναι μεγαλύτερο. Έχουμε:



$$\pi = \max\{\Pi(0) = 0, \Pi(\alpha) = p\alpha^2 - w\alpha\} \Rightarrow \ell = \begin{cases} 0 \text{ αν } p\alpha^2 - w\alpha \le 0 \Rightarrow p / w \le \alpha \\ \alpha \text{ αν } p\alpha^2 - w\alpha > 0 \Rightarrow p / w > \alpha \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε παραγωγή, και μάλιστα την μέγιστη επιτρεπτή, μόνο αν η μοναδιαία τιμή είναι σχετικά μεγάλη. **Η λύση είναι ακραία λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης παραγωγής.** Αν δεν υπήρχε ο πάνω περιορισμός η δεύτερη περίπτωση θα έδινε άπειρη λύση. Στο γράφημα δείχνουμε την ζήτηση εργασίας ως συνάρτηση των $\{p, w\}$

▲

6. Ζήτηση προιόντος στην κατανάλωση

Αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης εμφανίζεται στην κατανάλωση. Θεωρούμε ότι η **κατανάλωση μιας ποσότητας**: $Q \ge 0$, ενός αγαθού έχει κάποια αξία η οποία χαρακτηρίζεται από μια **συνάρτηση χρησιμότητας:** $U(Q)$. Υποθέτουμε, **συνήθως,** ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γνήσια αύξουσα, κοίλη:

$$U(Q) \Rightarrow U'(Q) > 0,\ U''(Q) \le 0$$

Δηλαδή, η **οριακή χρησιμότητα** της κατανάλωσης θα είναι θετική φθίνουσα. Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις παραγωγής η συνάρτηση χρησιμότητας δεν έχει απαραίτητα θετικές τιμές. Αν θεωρήσουμε ότι *εκφράζει το χρηματικό ποσό που θα ήταν διατεθειμένος να δώσει ο καταναλωτής για να αποκτήσει την συγκεκριμένη ποσότητα, τότε το αρνητικό μέγεθος θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως αμοιβή του για να στερηθεί κάποια ποσότητα.*

Η κατανάλωση συνεπάγεται και μια δαπάνη η οποία χαρακτηρίζεται από μια **συνάρτηση κόστους (δαπάνης):** $C(Q)$**.** Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού στην αγορά του προιόντος με την έννοια ότι η μοναδιαία τιμή του αγαθού είναι δοσμένη: $P = p$, και δεν επηρεάζεται από την ζήτηση:, η δαπάνη θα χαρακτηρίζεται από μια γραμμική συνάρτηση κόστους:

$$C = pQ$$

Ως αποτέλεσμα της κατανάλωσης θεωρούμε ότι προκύπτει για τον καταναλωτή ένα **όφελος** (**b**enefit) που ερμηνεύεται ως κέρδος, και δίνεται από την διαφορά:

$$B(Q) = U(Q) - C(Q) = U(Q) - pQ$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης για τον καταναλωτή διατυπώνεται στη μορφή:

$$\max_Q\{B(Q) = U(Q) - pQ \,||\, Q \ge 0\}$$

Από τη μαθηματική σκοπιά το πρόβλημα είναι ίδιο με το προηγούμενο της μεγιστοποίησης κέρδους με συντελεστή παραγωγής, όπου η συνάρτηση χρησιμότητας αντικαθιστά την συνάρτηση εσόδου, και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Μεγιστοποίηση οφέλους

Όσον αφορά την βέλτιστη ποσότητα κατανάλωσης q*, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:*

1. $q = 0$. *Λέμε ότι η τιμή* p *είναι **μη συμφέρουσα** για κατανάλωση, οπότε ισχύσει και η γνωστή συνθήκη για μέγιστο στο αριστερό σύνορο:*

$$B'(0) \le 0 \Leftrightarrow \{U'(0) \le C'(0)\} \Leftrightarrow U'(0) \le p$$

2. $q > 0$. *Λέμε ότι η τιμή* p *είναι **συμφέρουσα** για κατανάλωση, οπότε ισχύει και η γνωστή συνθήκη για εσωτερικό μέγιστο, εφόσον η λύση είναι φραγμένη:*

$$\{B'(q) = 0,\ B''(q) \le 0\} \Leftrightarrow \{U'(q) = C'(q),\ U''(q) \le C''(q)\} \Leftrightarrow \{MU(q) = w,\ MU'(q) \le 0\}$$

Έτσι, αν η τιμή είναι συμφέρουσα, τότε στη βέλτιστη κατανάλωση η οριακή χρησιμότητα είναι ίση με το οριακό κόστος που είναι η μοναδιαία τιμή του αγαθού. Δηλαδή **στη βέλτιστη κατανάλωση η οριακή χρησιμότητα διασχίζει την μοναδιαία τιμή του αγαθού από πάνω προς τα κάτω, οπότε είναι μεγαλύτερη πριν και μικρότερη μετά.**

Λύνοντας το πρόβλημα βρίσκουμε τη λύση που είναι η *βέλτιστη ποσότητα κατανάλωσης* q, ως συνάρτηση της παραμέτρου p, και ερμηνεύεται ως:

$q = D(p)$, **συνάρτηση ζήτησης αγαθού**

Προκύπτει από τα παραπάνω ότι:

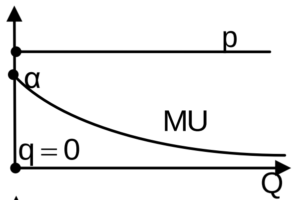
- *Αν η τιμή* p *είναι μη συμφέρουσα τότε η ζήτηση είναι μηδενική:* $q = 0$.
- *Αν η τιμή* p *είναι συμφέρουσα τότε η ζήτηση* $q > 0$ *είναι αυτή στην οποία* ***η οριακή χρησιμότητα συμπίπτει με την μοναδιαία τιμή*** *του αγαθού κόβοντάς την από πάνω προς τα κάτω:*

$U'(q) = p$

Η παραπάνω σχέση ορίζει την **αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης** (inverse demand function).
Αντιστρέφοντας βρίσκουμε την συνάρτηση ζήτησης:

$q = U'^{-1}(p) = D(p)$

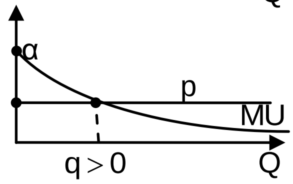
Παράδειγμα. $U = \alpha \ln(1+Q) \Rightarrow \max\{B = \alpha \ln(1+Q) - pQ \,||\, Q \geq 0\}$



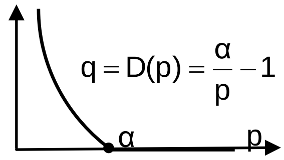
Είναι πρόβλημα ΚΠ, με λύση:

1. Συνοριακή μηδενική: $q = 0$, αν $B'(0) = \alpha - p \leq 0 \Rightarrow p \geq \alpha$

2. Στάσιμη εσωτερική: $B'(Q) = \dfrac{\alpha}{1+Q} - p = 0 \Rightarrow q = \dfrac{\alpha}{p} - 1 > 0$ αν $p < \alpha$



Έτσι θα έχουμε κατανάλωση: $q > 0$ μόνο αν η μοναδιαία τιμή του αγαθού είναι μικρότερη από μια κρίσιμη τιμή α. Η λύση βρίσκεται και γραφικά όπως στο αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους με συντελεστή παραγωγής. Στα δύο γραφήματα παραπλεύρως δείχνουμε μια μη συμφέρουσα και μια συμφέρουσα τιμή. Τέλος δίνουμε το γράφημα της συνάρτησης ζήτησης:



$$q = D(p) = \begin{cases} 0 & \text{αν } p \geq \alpha \\ \alpha / p - 1 & \text{αν } p < \alpha \end{cases}$$

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7. Συνάρτηση μέγιστου κέρδους

Θεωρούμε πάλι το αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους στην ανταγωνιστική παραγωγή:

$$\max\{\Pi = pQ - C(Q) \,||\, Q \geq 0\}$$

Η λύση δίνει την προσφορά προιόντος και το μέγιστο κέρδος ως συναρτήσεις της μοναδιαίας τιμής:

$$q = q(p) = D(p), \quad \pi = \pi(p)$$

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- *Η συνάρτηση ζήτησης είναι αύξουσα*
- *Η συνάρτηση μέγιστου κέρδους είναι αύξουσα κυρτή.*

Τα παραπάνω ισχύουν για οιαδήποτε συνάρτηση κόστους, για συνοριακές και εσωτερικές λύσεις, και επαληθεύονται σόλα τα παραδείγματα που εξετάσαμε

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο για εσωτερικές λύσεις. Αρχίζουμε με τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν σε εσωτερική λύση:

$$\{\Pi'(q) = 0, \Pi''(q) \leq 0\} \Leftrightarrow \{p = C'(q), C''(q) \geq 0\}$$

1. Η λύση $q = q(p)$ ορίζεται από την εξίσωση στασιμότητας, την οποία στη συνέχεια παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς p:

$$p = C'(q) \Rightarrow 1 = C''(q)\,q'(p) \Rightarrow q'(p) = \frac{1}{C''(q)} \geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση ζήτησης είναι αύξουσα διότι έχει θετική παράγωγο.

2. Στη συνέχεια εξετάζουμε την συνάρτηση μέγιστου κέρδους:

$\pi(p) = pq - C(q)$, όπου: $q = q(p)$

Παραγωγίζοντας ως προς p, βρίσκουμε:

$\pi(p) = pq - C(q) \Rightarrow \pi' = q + pq' - C'(q)q' = q + [p - C'(q)]q' = q$, διότι $p - C'(q) = 0$

Διαπιστώνουμε ότι η παράγωγος $q(p)$ είναι θετική αλλά και αύξουσα λόγω του 1, οπότε η συνάρτηση είναι αύξουσα κυρτή

▲

Οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας της συνάρτησης μέγιστου κέρδους μπορούν να διατυπωθούν και ως εξής:

- *Το μέγιστο κέρδος αυξάνει με αύξοντα ρυθμό όταν αυξάνει η τιμή του προϊόντος.*
- *Μεταβαλλόμενες τιμές του προιόντος είναι περισσότερο κερδοφόροι από αντίστοιχες σταθερές ενδιάμεσες τιμές, κατά μέσο όρο.*

Αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν στη μεγιστοποίηση κέρδους με συντελεστή παραγωγής, στη μορφή:

$$\max_L\{\Pi(L) = pQ(L) - wL \,||\, L \geq 0\}$$

Τώρα έχουμε δύο παραμέτρους $\{p, w\}$, και η λύση μας δίνει τις συναρτήσεις:

$\ell(p, w)$*: ζήτηση εργασίας* (labor demand)

$q(p, w) = Q(\ell)$*: προσφορά προϊόντος* (product supply)

$\pi(p, w) = pQ(\ell) - w\ell$*: (μέγιστο) κέρδος* (profit)

Με τον ίδιο βασικά τρόπο όπως και προηγουμένως, αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν τις παρακάτω ιδιότητες ανεξάρτητα της συγκεκριμένης συνάρτησης παραγωγής $Q(L)$, ως εξής:

1. Η συνάρτηση ζήτησης εργασίας $\ell(p, w)$*, είναι:*

p *– αύξουσα,* w *– φθίνουσα, και εξαρτάται μόνο από τον λόγο* p / w

2. Η συνάρτηση προσφοράς προϊόντος $q(p, w)$*, είναι:*

p *– αύξουσα,* w *– φθίνουσα, και εξαρτάται μόνο από τον λόγο* p / w

3. Η συνάρτηση μέγιστου κέρδους $\pi(p, w)$*, είναι:* p *– αύξουσα,* w *– φθίνουσα, κυρτή*

Οι ιδιότητες της συνάρτησης μέγιστου κέρδους εξετάζονται στα πλαίσια της γενικότερης **θεωρίας της περιβάλλουσας.**