Ef.I.3 ΖΗΤΗΣΗ-ΠΡΟΣΦΟΡΑ-ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΑ(Α)

ΖΗΤΗΣΗ-ΠΡΟΣΦΟΡΑ

1. Συναρτήσεις ζήτησης-προσφοράς

Θεωρούμε μια αγορά στην οποία έχουμε παραγωγή και κατανάλωση στη μορφή προσφοράς και ζήτησης ενός αγαθού. Η κατανάλωση χαρακτηρίζεται από την **ποσότητα ζήτησης**: Q και από την **μοναδιαία τιμή**: P. Γενικά υπάρχει μία σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών, η οποία παριστάνεται με τη **συνάρτηση ζήτησης** (**D**emand function):

$$Q = D(P)$$

Θα ασχοληθούμε μόνο με **κανονικά αγαθά** (normal goods) για τα οποία η συνάρτηση ζήτησης είναι σταθερή ή γνήσια φθίνουσα. Συνήθως παριστάνουμε την συνάρτηση ζήτησης με τον $Q-$άξονα οριζόντιο οπότε το γράφημα που προκύπτει είναι αυτό της **αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης** (inverse demand function), που εκφράζει την μοναδιαία **τιμή ζήτησης** P για την ποσότητα Q:

$$P = D^{-1}(Q)$$

Από τη μεριά της παραγωγής υπάρχει επίσης μια σχέση μεταξύ της μοναδιαίας τιμής P και της **προσφερόμενης ποσότητας** Q η οποία εκφράζεται τώρα με τη **συνάρτηση προσφοράς** (**S**upply function):

$$Q = S(P)$$

Θα υποθέτουμε ότι είναι γνήσια αύξουσα ή και σταθερή, αλλά στην πραγματικότητα μπορεί να είναι και γνήσια φθίνουσα σε ειδικές περιπτώσεις. Όπως και για τη συνάρτηση ζήτησης αν την παραστήσουμε με τον $Q-$άξονα οριζόντιο, τότε το γράφημα που προκύπτει είναι αυτό της **αντίστροφης συνάρτησης προσφοράς** (inverse supply function):

$$P = S^{-1}(Q)$$

Εκφράζει την μοναδιαία **τιμή προσφοράς** P για την ποσότητα Q.

Παρατήρηση. Λέμε ότι η ζήτηση είναι:

1. **πλήρως ανελαστική (**perfectly inelastic) αν η ζήτηση είναι σταθερή ανεξάρτητα της τιμής, οπότε και το γράφημα της *αντίστροφης συνάρτησης* είναι κατακόρυφη ευθεία: $Q = q$
2. **πλήρως ελαστική** (perfectly elastic), αν η τιμή είναι σταθερή ανεξάρτητα της ζήτησης, οπότε και το γράφημα της *αντίστροφης συνάρτησης* είναι οριζόντια ευθεία: $P = p$

Αντίστοιχη ορολογία χρησιμοποιούμε για την προσφορά.

▲

2. Ισορροπία

Ένα ζεύγος ζήτησης-προσφοράς, δίνει δύο καμπύλες στο επίπεδο των $\{P, Q\}$. Η τομή τους καθορίζει την **ισορροπία της αγοράς** (market equilibrium), όσον αφορά την ποσότητα και την μοναδιαία τιμή. Βρίσκονται λύνοντας το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\left.\begin{array}{l} Q = D(P) \\ Q = S(P) \end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{l} P = D^{-1}(Q) \\ P = S^{-1}(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q) = 0 \Rightarrow (Q = q, P = p)$$

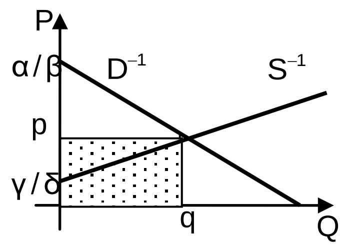
Έτσι, στην ισορροπία η ποσότητα ζήτησης συμπίπτει με την ποσότητα προσφοράς, και η τιμή του καταναλωτή συμπίπτει με την τιμή του προμηθευτή. Στην ισορροπία οι καταναλωτές και οι προμηθευτές αντιμετωπίζουν την ίδια τιμή p και την ίδια ποσότητα q, οπότε το **κόστος της κατανάλωσης** συμπίπτει με το **έσοδο της παραγωγής.** Γραφικά δίνεται από το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου, όπως στο παρακάτω σχήμα:

$$E = pq$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις παρακάτω γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης-προσφοράς, με όλους τους συντελεστές θετικούς:

$$D: Q = \alpha - \beta P \Rightarrow D^{-1}: P = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} Q$$, φθίνουσα

$$S: Q = -\gamma + \delta P \Rightarrow S^{-1}: P = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{\delta} Q$$, αύξουσα



Η ποσότητα και η τιμή ισορροπίας βρίσκονται ως λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} D: Q = \alpha - \beta P \\ S: Q = -\gamma + \delta P \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta},\ q = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta + \delta} \quad \text{με } \alpha\delta > \beta\gamma$$

Παρατήρηση. Για να έχουμε ισορροπία, δηλαδή να τέμνονται οι καμπύλες στη θετική περιοχή και τα παραπάνω μεγέθη να είναι θετικά, πρέπει *η μέγιστη τιμή ζήτησης να είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή προσφοράς,* όπως φαίνεται και στο γράφημα:

$$\alpha / \beta > \gamma / \delta \Rightarrow \alpha\delta > \beta\gamma$$ ▲

3. Φόρος

Αν επιβληθεί φορολογία τότε η αγορά καταλήγει σε μια νέα ισορροπία, για την οποία θα υποθέσουμε πάλι ότι η αγορά *καθαρίζει, δηλαδή η ποσότητα ζήτησης είναι ίδια με την ποσότητα προσφοράς,* αλλά τώρα οι τιμές είναι διαφορετικές διότι διαφέρουν κατά την φορολογία, οπότε θα έχουμε τρεις μεταβλητές:

$$Q,\ \{P_D, P_S\}$$

Θα εξετάσουμε την περίπτωση:

Φόρος στην ποσότητα (quantity tax). Επιβάλλεται *μοναδιαίος φόρος* t, δηλαδή φόρος ανά μονάδα ποσότητας του προϊόντος, όπως π.χ. γίνεται συνήθως στα καύσιμα. Οι τιμές θα ικανοποιούν:

$$P_D - P_S = t$$

Τώρα η ισορροπία θα καθορίζεται από το σύστημα εξισώσεων:

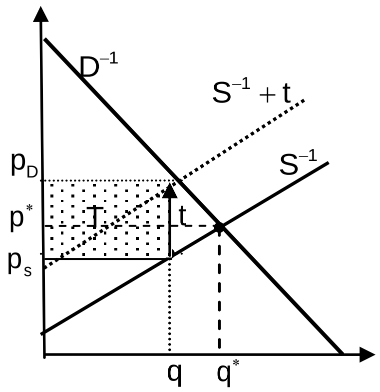
$$\left.\begin{array}{l} P_D = D^{-1}(Q) \\ P_S = S^{-1}(Q) \\ P_D - P_S = t \end{array}\right\}$$

Το παραπάνω σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους καθορίζει τα νέα μεγέθη ισορροπίας:

$$q,\ p_D,\ p_S$$

Αντικαθιστώντας τα $\{P_D, P_S\}$ από τις δύο πρώτες στην τρίτη, βρίσκουμε την **κοινή** ποσότητα, και στη συνέχεια τις δύο τιμές. Όλα τα νέα μεγέθη ισορροπίας εξαρτώνται από τον φόρο t :

$$D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q) = t \Rightarrow q(t) \Rightarrow \{\, p_D(t),\ q_S(t)\}$$



Όπως φαίνεται και στο γράφημα η νέα ποσότητα ισορροπίας q βρίσκεται στην τομή της καμπύλης ζήτησης και αυτής που προκύπτει αν ανεβάσουμε την αντίστροφη συνάρτηση προσφοράς κατά το μέγεθος t, δηλαδή εκεί όπου **η τιμή ζήτησης και η τιμή προσφοράς διαφέρουν κατά τον φόρο** t. Σε κάθε περίπτωση, με την επιβολή φόρου, η ποσότητα κατανάλωσης μικραίνει, ενώ η τιμή ισορροπίας μεγαλώνει για τον καταναλωτή και μικραίνει για τον παραγωγό. Διακρίνουμε και τα εξής μεγέθη ως εμβαδά παραλληλογράμμων:

1. $E^* = p^* q^*$, έσοδο/δαπάνη χωρίς φόρο
2. $E_D = p_D q$, δαπάνη καταναλωτή με φόρο
3. $E_S = p_S q$, έσοδο παραγωγού με φόρο
4. $T = E_D - E_S = qt$, συνολικός φόρος (σκιαγραφημένο τμήμα).

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης/προσφοράς:

$D: Q = 3 - 2P$, $S: Q = -1 + P$

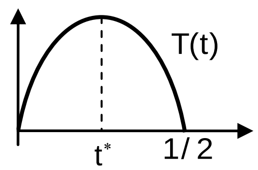
Με επιβολή μοναδιαίου φόρου t, βρίσκουμε το παρακάτω σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους: $\{Q, P_S, P_D\}$. Το λύνουμε και βρίσκουμε όλα τα μεγέθη ως **συναρτήσεις της παραμέτρου** t**,** επαληθεύοντας και τις σχετικές μονοτονίες.

$$\left.\begin{array}{l} Q = 3 - 2P_D \\ Q = -1 + 1P_S \\ P_D = P_S + t \end{array}\right\} \Rightarrow \; p_S = \frac{4}{3} - \frac{2t}{3} \downarrow, \; p_D = p_S + t = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} \uparrow \; , \; q = -1 + p_S = \frac{1}{3} - \frac{2t}{3} \downarrow$$

$$T = tq = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}t^2 = \frac{2}{3}t\left(\frac{1}{2} - t\right)$$ **, συνολικός φόρος**

Παρατήρηση. Το φορολογικό έσοδο T είναι παραβολική συνάρτηση του μοναδιαίου φόρου. Είναι μικρό όταν ο μοναδιαίος φόρος t είναι μικρός αλλά και όταν είναι μεγάλος διότι τότε είναι μικρή η κατανάλωση. *Ενδιάμεσα έχουμε μέγιστο φορολογικό έσοδο όταν:*

$t^* = 1/4$



Αύξηση του μοναδιαίου φόρου t **θα προκαλέσει μείωση του φορολογικού εσόδου** T **αν το** t **είναι μεγαλύτερο από την παραπάνω κρίσιμη τιμή** t^***.**

▲

Παρατήρηση. Αντί για φόρο στην ποσότητα, συνήθως έχουμε φόρο στην αξία, ως εξής:
Φόρος στην αξία (ad valorem, value tax). Είναι ο συνήθης *ποσοστιαίος φόρος* στην μοναδιαία τιμή, δηλαδή στην αξία της ποσότητας. Με *συντελεστή φορολογίας* τ (ποσοστιαίο φόρο: $\%\tau = 100\tau$), οι τιμές θα συνδέονται με τη σχέση:

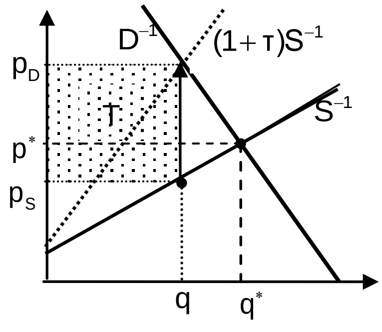
$P_D = P_S + \tau P_S \Rightarrow P_D = P_S(1 + \tau)$, για φόρο στην κατανάλωση

$P_S = P_D - \tau P_D \Rightarrow P_D = P_S / (1 - \tau)$, για φόρο στην παραγωγή

Στην πρώτη περίπτωση ο φόρος προστίθεται στην τιμή του προμηθευτή ενώ στη δεύτερη αφαιρείται από την τιμή του καταναλωτή. Υπολογιστικά, οι δύο περιπτώσεις δεν διαφέρουν πολύ αν το τ είναι μικρό δεκαδικό, ως συνήθως, οπότε και έχουμε την γνωστή γραμμική προσέγγιση:

$$\frac{1}{1 - \tau} \approx 1 + \tau$$

Παραπλεύρως δίνουμε την λύση γραφικά στην περίπτωση που έχουμε ποσοστιαίο φόρο στην **κατανάλωση**. Τώρα η νέα ισορροπία (q, p_D) βρίσκεται στην τομή της καμπύλης ζήτησης και αυτής που προκύπτει αν πολλαπλασιάζουμε την (αντίστροφη) συνάρτηση προσφοράς με τον συντελεστή $(1 + \tau)$:



$$\left.\begin{array}{l} P_D = D^{-1}(Q) \\ P_S = S^{-1}(Q) \\ P_D = (1 + \tau)P_S \end{array}\right\} \Rightarrow D^{-1}(Q) = (1 + \tau)S^{-1}(Q) \Rightarrow \{q, p_D, p_S\}$$

▲

ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΑ

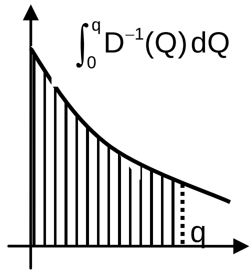
4. Οριακή αξία (Χρησιμότητα) της κατανάλωσης

Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης:

$$P = D^{-1}(Q)$$

έχει καταρχήν την γνωστή ερμηνεία όπου P είναι η μοναδιαία τιμή στην οποία θα ζητηθεί ποσότητα Q του αγαθού. Αλλά επιδέχεται και μια εναλλακτική ερμηνεία ως η **οριακή αξία** για τον καταναλωτή μιας **επί πλέον** των Q μονάδων του αγαθού που ήδη κατέχει, οπότε εκφράζει την παράγωγο μιας συνάρτησης **συνολικής αξίας** ή **χρησιμότητας (**utility)**:**

$$U(Q) \Rightarrow P = U'(Q) = D^{-1}(Q)$$



Το παραπάνω μας επιτρέπει **να υπολογίσουμε** την συνάρτηση χρησιμότητας $U(Q)$ ως παράγουσα, δηλαδή ολοκλήρωμα, της αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης $D^{-1}(Q)$**,** που είναι **μετρήσιμο** μέγεθος. Ειδικότερα, η **υπερβάλλουσα χρησιμότητα** μιας κατανάλωσης $Q = q$ (σε σχέση με την μη κατανάλωση $Q = 0$) θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$U(q) - U(0) = \int_0^q U'(Q)\,dQ = \int_0^q D^{-1}(Q)\,dQ$$

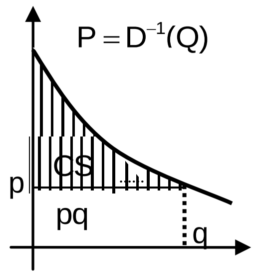
Παρατήρηση. Η μοναδιαία τιμή P ως οριακή αξία ερμηνεύεται και ως **τιμή ασφάλειας** ή **τιμή εκκίνησης** (reservation price), με την παρακάτω έννοια:

Αν η κατανάλωση έχει στην κατοχή της ποσότητα του αγαθού Q*, τότε* P *είναι η (μέγιστη) τιμή που θα δεχτεί να καταβάλει ώστε να αποκτήσει μια επιπλέον μονάδα του αγαθού, ή εναλλακτικά η ελάχιστη που θα δεχτεί για να αποχωριστεί μιας μονάδας του αγαθού, οριακά.*

5. Πλεόνασμα Καταναλωτή

Θεωρούμε μια διαδικασία κατανάλωσης όπου η μοναδιαία τιμή ενός αγαθού είναι δοσμένη: $P = p$. Τότε θα καταναλωθεί ποσότητα q η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση ζήτησης:

$$q = D(p)$$



Παρατηρούμε τώρα ότι, αρχίζοντας από μηδενική ποσότητα, για κάθε επιπλέον μικρή ποσότητα κατανάλωσης ΔQ ο καταναλωτής **θα ήταν διατεθειμένος** να την προμηθευτεί με μοναδιαία τιμή την αντίστοιχη P, ενώ στην πραγματικότητα καταβάλει την χαμηλότερη μοναδιαία τιμή της αγοράς p. Δηλαδή προκύπτει ένα *όφελος του καταναλωτή* ίσο με:

$$[P - p]\Delta Q = [D^{-1}(Q) - p]\Delta Q$$

Καθώς τα διαδοχικά ΔQ προστίθενται, η κατεχόμενη ποσότητα αυξάνει και η τιμή πέφτει, σύμφωνα με την συνάρτηση ζήτησης. Τελικά για την συνολική ποσότητα q η κατανάλωση θα έχει συνολικό όφελος που δίνεται από το άθροισμα των παραλληλόγραμμων εμβαδών στο παραπάνω γράφημα. Μάλιστα ένας **μονοπωλιακός προμηθευτής** θα μπορούσε να αποσπάσει το παραπάνω όφελος είτε διοχετεύοντας στην αγορά σταδιακά τις επιπλέον μικρές ποσότητες είτε κατεβάζοντας την τιμή σταδιακά καλύπτοντας κάθε φορά την επιπλέον ζήτηση. Το εμβαδό αυτό εκφράζεται με το γνωστό ως άθροισμα Riemann, το οποίο στο όριο όταν $\Delta Q \to 0$ συγκλίνει στο ολοκλήρωμα:

$$CS = \int_0^q [D^{-1}(Q) - p]\,dQ = \int_0^q D^{-1}(Q)\,dQ - pq$$, **πλεόνασμα του καταναλωτή** (**C**onsumer **S**urplus)

Δηλαδή, το πλεόνασμα του καταναλωτή εκφράζεται ως το παραπάνω γραμμοσκιασμένο τμήμα, και υπολογίζεται ως η διαφορά των παρακάτω μεγεθών:

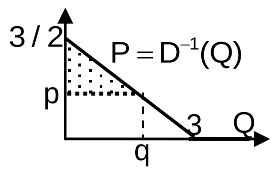
1. Της υπερβάλλουσας χρησιμότητας της κατανάλωσης $Q = q$ (σε σχέση με την μη κατανάλωση $Q = 0$) που όπως είδαμε δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$U(q) - U(0) = \int_0^q U'(Q)\,dQ = \int_0^q D^{-1}(Q)\,dQ$$

2. Της δαπάνης που τελικά καταβάλει και δίνεται από το κόστος της αγοράς:

$$C = pq$$ ▲

Παράδειγμα. Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση ζήτησης με το γράφημα παραπλεύρως:



$$Q = 3 - 2P \Rightarrow P = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}Q$$

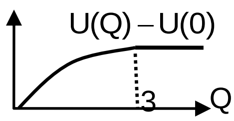
Για τιμή p έχουμε αντίστοιχη κατανάλωση q, και βρίσκουμε:

1. Υπερβάλλουσα χρησιμότητα:

$$U(q) - U(0) = \int_0^q D^{-1}(Q)dQ = \int_0^q \left(\frac{3}{2} - \frac{Q}{2}\right)dQ = \frac{3}{2}q - \frac{1}{4}q^2 \text{ για } q \le 3$$

Δηλαδή, η συνάρτηση χρησιμότητας που δημιουργεί την παραπάνω ζήτηση, δίνεται από την σχέση:

$$U(Q) - U(0) = \frac{3}{2}Q - \frac{1}{4}Q^2 = \frac{1}{4}Q(6 - Q) \text{ για } Q \le 3.$$

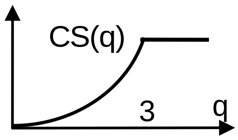


Μετά μένει σταθερή, όπως στο γράφημα παραπλεύρως, διότι η παράγωγος είναι μηδενική. Έχουμε κορεσμό, και δεν υπάρχει ζήτηση για επιπλέον ποσότητα. Η τιμή ζήτησης είναι μηδενική:

2. Δαπάνη:

$$pq = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}q)q = \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}q^2$$

3. Το πλεόνασμα του καταναλωτή δίνεται από την διαφορά τους:



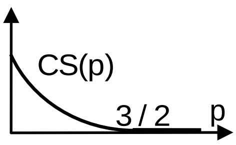
$$CS(q) = [U(q) - U(0)] - pq = [\frac{3}{2}q - \frac{1}{4}q^2] - [\frac{3}{2}q - \frac{1}{2}q^2] = \frac{1}{4}q^2$$

Τα παραπάνω ισχύουν μέχρι το μέγιστο q, που αντιστοιχεί στη μηδενική τιμή:

$$p = 0 \Rightarrow q = 3$$

Μετά μένει σταθερό.

Παρατήρηση. Αντικαθιστώντας $q = D(p)$, μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα παραπάνω μεγέθη ως συναρτήσεις της μοναδιαίας τιμής p. Ειδικότερα, εκφράζουμε το πλεόνασμα του καταναλωτή ως **φθίνουσα** συνάρτηση της μοναδιαίας τιμής:

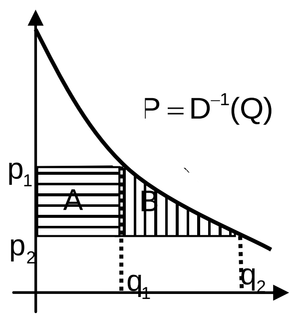


$$q = 3 - 2p \Rightarrow CS(p) = \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}(3 - 2p)^2 = \left(\frac{3}{2} - p\right)^2 \text{ για } p \le 3/2$$

Δεν υπάρχει ζήτηση για μεγαλύτερη τιμή.

▲

Παράδειγμα. Αν η τιμή διάθεσης ενός αγαθού είναι p_1 τότε ο καταναλωτής θα προμηθευτεί μια ποσότητα q_1 που καθορίζεται από την συνάρτηση ζήτησης, και το πλεόνασμα του καταναλωτή θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:



$$CS(q_1) = \int_0^{q_1} [D^{-1}(Q) - p_1]dQ$$

Αν έχουμε μια μεταβολή στην μοναδιαία τιμή: $p_1 \to p_2$, τότε θα έχουμε μεταβολές στην ποσότητα ζήτησης: $q_1 \to q_2$, και στο πλεόνασμα:

$$CS(q_2) - CS(q_1)$$

Στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος παραπλεύρως εκφράζουμε γεωμετρικά *την αύξηση του πλεονάσματος στην περίπτωση που έχουμε πτώση της τιμής*. Αποτελείται από δύο τμήματα:

$A = q_1(p_2 - p_1)$, όφελος από την απόκτηση του αρχικού q_1 στην χαμηλότερη τιμή p_2

$B = \int_{q_1}^{q_2} [D^{-1}(Q) - p_2]dQ$, όφελος από την απόκτηση του πρόσθετου $q_2 - q_1$ στη τιμή p_2

▲

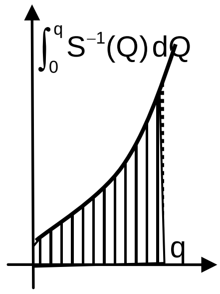
6. Οριακό κόστος της παραγωγής

Αντίστοιχες έννοιες ορίζονται για τον παραγωγό/προμηθευτή. Τώρα η αντίστροφη συνάρτηση προσφοράς:

$$P = S^{-1}(Q)$$

έχει καταρχήν την γνωστή ερμηνεία όπου P είναι η τιμή στην οποία θα προσφερθεί η ποσότητα Q. Αλλά επιδέχεται και μια εναλλακτική ερμηνεία ως το **οριακό κόστος** μιας μονάδας του προϊόντος, οπότε εκφράζεται ως η παράγωγος μιας συνάρτησης συνολικού **κόστους (cost):**

$$C(Q) \Rightarrow P = C'(Q) = S^{-1}(Q)$$



Το παραπάνω μας επιτρέπει **να υπολογίσουμε** την συνάρτηση κόστους $C(Q)$ ως παράγουσα, δηλαδή ολοκλήρωμα, της αντίστροφης συνάρτησης προσφοράς: $S^{-1}(Q)$, που είναι **παρατηρήσιμο** μέγεθος. Ειδικότερα, το **λειτουργικό (μεταβλητό) κόστος** μιας παραγωγής $Q = q$ (σε σχέση με την μηδενική: $Q = 0$) θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

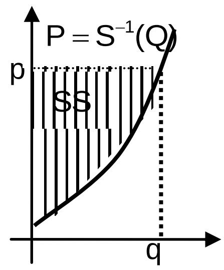
$$C(q) - C(0) = \int_0^q C'(Q)\,dQ = \int_0^q S^{-1}(Q)\,dQ$$

Παρατήρηση. Η παραπάνω τιμή προσφοράς εκφράζεται και ως **τιμή ασφάλειας** ή **τιμή εκκίνησης** (reservation price) για τον προμηθευτή, με την παρακάτω έννοια:
Αν έχει ήδη προσφέρει μια ποσότητα του προϊόντος Q, *τότε* P *είναι η ελάχιστη τιμή στην οποία θα προσφέρει μια επιπλέον μονάδα του προϊόντος. Δίνεται από το οριακό κόστος.*

7. Πλεόνασμα του προμηθευτή

Θεωρούμε τώρα μια διαδικασία παραγωγής όπου η μοναδιαία τιμή του προϊόντος είναι δοσμένη: $P = p$. Τότε θα διατεθεί ποσότητα q η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση προσφοράς:

$$q = S(p) \Rightarrow p = S^{-1}(q)$$



Παρατηρούμε τώρα ότι, αρχίζοντας από μηδενική ποσότητα, για κάθε επιπλέον μικρή ποσότητα ΔQ η παραγωγή θα ήταν πρόθυμη να την διαθέσει με μοναδιαία τιμή $P = S^{-1}(Q)$, ενώ στην πραγματικότητα την διαθέτει στην μοναδιαία τιμή της αγοράς p. Δηλαδή προκύπτει ένα *όφελος του προμηθευτή* ίσο με:

$$[p - P]\Delta Q = [p - S^{-1}(Q)]\Delta Q$$

Καθώς τα διαδοχικά ΔQ προστίθενται, η παραγόμενη ποσότητα αυξάνει και η τιμή ανεβαίνει σύμφωνα με την συνάρτηση προσφοράς. Τελικά για την συνολική ποσότητα q η παραγωγή θα έχει συνολικό όφελος που δίνεται από το άθροισμα των παραλληλόγραμμων εμβαδών στο παραπάνω γράφημα. Μάλιστα ένας **μονοψωνικός καταναλωτής** θα μπορούσε να αποσπάσει το παραπάνω όφελος είτε ζητώντας σταδιακά τις επιπλέον μικρές ποσότητες είτε ανεβάζοντας την τιμή σταδιακά καταναλώνοντας κάθε φορά την πρόσθετη προσφορά. Το εμβαδό αυτό εκφράζεται με το γνωστό άθροισμα Riemann, το οποίο στο όριο όταν $\Delta Q \to 0$ συγκλίνει στο παρακάτω ολοκλήρωμα και καλείται **πλεόνασμα του προμηθευτή** (**S**upply **S**urplus):

$$SS(q) = \int_0^q [p - S^{-1}(Q)]dQ = pq - \int_0^q S^{-1}(Q)dQ$$

Γεωμετρικά δίνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στο παραπάνω σχήμα.

Παρατήρηση. Διαπιστώνουμε ότι το πλεόνασμα του προμηθευτή εκφράζεται ως η διαφορά των παρακάτω δύο μεγεθών:

1. Το μεταβλητό (υπερβάλλον, λειτουργικό) κόστος της συνολικής παραγωγής $Q = q$ που σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$C(q) - C(0) = \int_0^q C'(Q)\,dQ = \int_0^q S^{-1}(Q)\,dQ$$

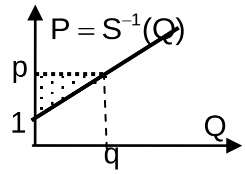
2. Το έσοδο που στην πραγματικότητα εισπράττει και δίνεται από το μέγεθος:

$$R = pq$$

▲

Παράδειγμα. Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση προσφοράς:

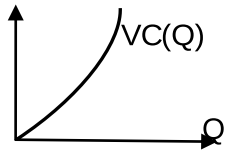
$Q = -1 + P \Rightarrow P = 1 + Q$,



Για τιμή p και αντίστοιχη προσφορά q, βρίσκουμε:

1. Λειτουργικό κόστος:

$$C(q) - C(0) = \int_0^q S^{-1}(Q)dQ = \int_0^q (1+Q)\,dQ = q + \frac{1}{2}q^2$$

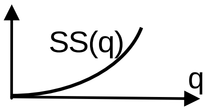


Δηλαδή, η συνάρτηση μεταβλητού κόστους, είναι:

$$VC(Q) = C(Q) - C(0) = Q + \frac{1}{2}Q^2$$

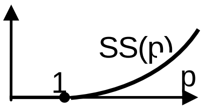
2. Έσοδο:

$$pq = p(1+q) = q + q^2$$



3. Πλεόνασμα του προμηθευτή:

$$SS(q) = pq - [C(q) - C(0)] = (q + q^2) - (q + \frac{1}{2}q^2) = \frac{1}{2}q^2 \quad \text{για } q \geq 0$$



Παρατήρηση. Αντικαθιστώντας από την συνάρτηση προσφοράς μπορούμε να εκφράσουμε το πλεόνασμα και ως αύξουσα συνάρτηση της τιμής p

$$q = -1 + p \Rightarrow SS(p) = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}(p-1)^2 \quad \text{για } p \geq 1$$

Για μικρότερες τιμές p δεν υπάρχει προσφορά *ούτε κόστος,* και το πλεόνασμα είναι μηδενικό.

▲

8. Συνολικό πλεόνασμα στην ισορροπία

Θεωρούμε την ζήτηση και την προσφορά σε ισορροπία, οπότε η ποσότητα και η τιμή ζήτησης θα συμπίπτουν με την ποσότητα και την τιμή προσφοράς:

$$\left.\begin{matrix} Q = D(P) \\ Q = S(P) \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left.\begin{matrix} P = D^{-1}(Q) \\ P = S^{-1}(Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (q, p)$$

Επίσης, η δαπάνη της κατανάλωσης θα συμπίπτει με το έσοδο της παραγωγής:

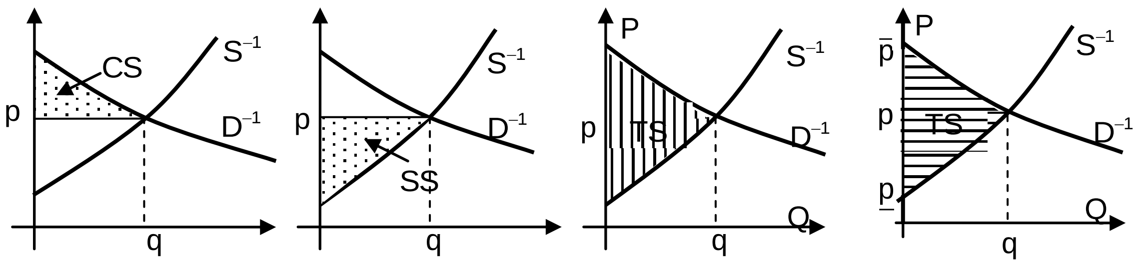
$$R = C = pq$$

Στο πρώτο γράφημα παρακάτω, δείχνουμε το πλεόνασμα καταναλωτή:

$$CS = \int_0^q D^{-1}(Q)dQ - pq$$

Στο δεύτερο γράφημα δείχνουμε το πλεόνασμα προμηθευτή:

$$SS = pq - \int_0^q S^{-1}(Q)dQ$$



πλεονάσματα στην ισορροπία

Το άθροισμά τους καλείται **συνολικό πλεόνασμα** (**T**otal **S**urplus), όπως στο τρίτο γράφημα. Στο άθροισμα ο ενδιάμεσος όρος pq απαλείφεται και βρίσκουμε ότι:

*Το συνολικό πλεόνασμα στην ισορροπία ισούται με τη διαφορά της **λειτουργικής χρησιμότητας** για τον καταναλωτή και του **λειτουργικού κόστους** για τον προμηθευτή:*

$$TS = CS + SS = [U(q) - U(0)] - [C(q) - C(0)]$$

$$= \int_0^q D^{-1}(Q)dQ - \int_0^q S^{-1}(Q)dQ$$

Γεωμετρικά δίνεται από το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης ζήτησης και της καμπύλης προσφοράς, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Υπολογίζεται και απευθείας ως το ολοκλήρωμα της διαφοράς των δύο αντίστροφων συναρτήσεων, ζήτησης και προσφοράς:

$$TS = \int_0^q [D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q)]dQ$$

Παρατήρηση. Εναλλακτικά, μπορεί να υπολογιστεί και με άξονα ολοκλήρωσης τον P, ως το εμβαδό κάτω από τις καμπύλες των δύο συναρτήσεων, προσφοράς και ζήτησης, όπως στο τέταρτο γράφημα παραπάνω όπου η ολοκλήρωση γίνεται στον κατακόρυφο άξονα:

$$TS = \int_{\underline{p}}^{p} S(P)dP + \int_{p}^{\bar{p}} D(P)dP$$

Παραστήσαμε με $\underline{p}$ την ελάχιστη τιμή προσφοράς που μπορεί να είναι και μηδενική, και $\bar{p}$ την μέγιστη τιμή ζήτησης που μπορεί να είναι και άπειρη.

▲

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης-προσφοράς που εξετάσαμε στα δύο προηγούμενα παραδείγματα και υπολογίζουμε πρώτα τα μεγέθη ισορροπίας:

$$\left.\begin{array}{l} D: Q = 3 - 2P \\ S: Q = -1 + P \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D^{-1}: P = 3/2 - Q/2 \\ S^{-1}: P = 1 + Q \end{array}\right\} \Rightarrow \{p = 4/3,\ q = 1/3\}$$

Για το συνολικό πλεόνασμα βρίσκουμε:

$$TS = \int_0^q [D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q)]dQ = \int_0^{1/2} [(3/2 - Q/2) - (1+Q)]dQ = \int_0^{1/2} (1/2 - 3Q/2)dQ$$

$$= Q/2 - 3Q^2/4 \Big|_0^{1/3} = 1/6 - 3/36 = 3/36 = 1/12$$

Παρατήρηση. Το ίδιο βρίσκουμε αν αθροίσουμε τα πλεονάσματα στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, για $q = 1/3$:

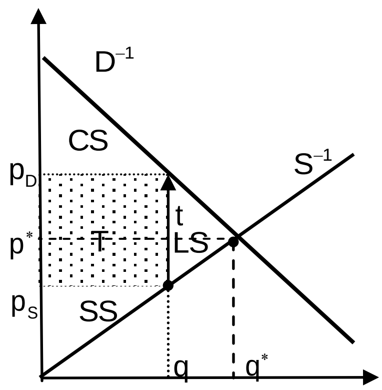
$$CS(q) + SS(q) = q^2/4 + q^2/2 \Rightarrow CS + SS = 1/36 + 1/18 = 3/36 = 1/12$$

▲

9. Φόρος-Απώλεια πλεονάσματος

Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση του φόρου στα πλεονάσματα. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως, η επιβολή φόρου t ανά μονάδα προϊόντος έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της ποσότητας κατανάλωσης, την αύξηση της τιμής για τον καταναλωτή και την μείωση της τιμής για τον προμηθευτή, σε σχέση με τα αρχικά μεγέθη ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα:

$\{q^*, p^*\} \to \{q(t), p_S(t), p_D(t)\}$ όπου: $p_D - p_S = t$: φόρος



Παράδειγμα. Θεωρούμε τις εξισώσεις ζήτησης-προσφοράς:

$$\left.\begin{array}{l} D: Q = 2 - P \\ S: Q = -1 + P \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D^{-1}: P = 2 - Q \\ S^{-1}: P = 1 + Q \end{array}\right\},\ (q^* = 1/2,\ p^* = 3/2)$$

Η επιβολή φόρου t θα μας δώσει τις νέες τιμές ισορροπίας:

$$\left.\begin{array}{l} Q = 2 - P_D \\ Q = -1 + P_S \\ P_D = P_S + t \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{1-t}{2},\ p_S = \frac{3-t}{2},\ p_D = \frac{3+t}{2} \quad \text{για } 0 \le t \le 1$$

Τα σχετικά μεγέθη υπολογίζονται ως εξής:

1. Το πλεόνασμα καταναλωτή, δίνεται από το εμβαδό της τριγωνικής περιοχής CS:

$$CS(t) = \int_0^q [D^{-1}(Q) - p_D]dQ = \int_0^q [2 - Q - p_D]dQ = (2 - p_D)q - q^2/2 = (1-t)^2/8$$

2. Το πλεόνασμα προμηθευτή δίνεται από το εμβαδό της τριγωνικής περιοχής SS:

$$SS(t) = \int_0^q [p_S - S^{-1}(Q)]dQ = \int_0^q [p_S - 1 - Q]dQ = (p_S - 1)q - q^2/2 = (1-t)^2/8$$

3. Το συνολικό πλεόνασμα είναι:

$$TS = CS + SS = (1-t)^2/4$$

4. Ο φόρος δίνεται από το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής:

$$T = tq = t(1-t)/2$$

5. Το **απολεσθέν πλεόνασμα (L**ost **S**urplus) δίνεται από το εμβαδό της τριγωνικής περιοχής LS:

$$LS(t) = \int_q^{q^*} [D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q)]dQ = \int_q^{1/2} (1-2Q)dQ = Q - Q^2 \Big|_q^{1/2} = 1/4 - (q - q^2)$$

$$= 1/4 - (1-t)/2 + (1-t)^2/4 = t^2/4$$

Το άθροισμα των παραπάνω {3,4,5} είναι είναι ίσο με το αρχικό πλεόνασμα $1/4$ που αντιστοιχεί σε μηδενικό φόρο. ▲