Ef.I.1 ΚΟΣΤΟΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΗ-ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ(Α)

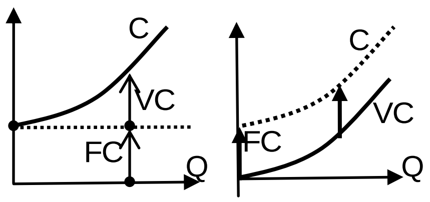
ΚΟΣΤΟΣ. 1.Οριακό κόστος 2. Μέσο κόστος 3. Ελάχιστο μέσο κόστος
ΠΑΡΑΓΩΓΗ. 4.Οριακό προιόν 5.Μέσο προιόν 6. Μέγιστο μέσο προιόν 7.Συντελεστής παραγωγής
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ 8.Χρησιμότητα

ΚΟΣΤΟΣ

1. Οριακό κόστος

Θεωρούμε το **κόστος παραγωγής** (**C**ost) C ενός προιόντος ως συνάρτηση της **ποσότητας παραγωγής** (**Q**uantity of production) Q:

$$C = C(Q) \text{ με } Q \geq 0$$



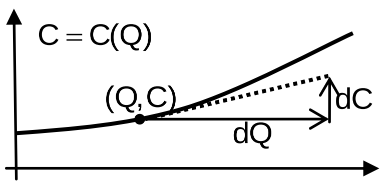
Αποτελείται από το **σταθερό κόστος** (**F**ixed **C**ost) FC, και το **λειτουργικό** ή **μεταβλητό κόστος** (**V**ariable **C**ost) VC ως το πρόσθετο κόστος που αρχίζει να εμφανίζεται με την έναρξη της παραγωγής. Το άθροισμά τους δίνει το κόστος C που καλείται και **συνολικό κόστος** (**T**otal **C**ost) TC:

$$TC = C = FC + VC$$

Το γράφημα του (συνολικού) κόστους προκύπτει ανεβάζοντας αυτό του μεταβλητού κόστους κατά το σταθερό κόστος, όπως στο δεύτερο σχήμα παραπάνω.

Για κάθε παραγωγή Q, το **οριακό κόστος** (**M**arginal **C**ost) δίνεται από την παράγωγο:

$$MC = C'(Q) = \frac{dC}{dQ}$$



Γραφικά παριστάνεται με την κλίση της εφαπτόμενης στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης, όπως στο γράφημα. Είναι ίδιο με το οριακό μεταβλητό κόστος, διότι οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά:

$$VC'(Q) = C'(Q)$$

Ιδιότητες της συνάρτησης κόστους: $C = C(Q)$ με $Q \geq 0$

*1. Ως προς την μονοτονία είναι **γνήσια αύξουσα**, με γνήσια θετικό οριακό κόστος:* $MC = C'(Q) > 0$

*2. Ως προς την κυρτότητα είναι **συνήθως κυρτή**:* $C'' \geq 0$*, δηλαδή έχει αύξον οριακό κόστος, τουλάχιστον τελικά, δηλαδή για μεγάλες ποσότητες παραγωγής. Ειδικότερα, μπορεί να είναι:*

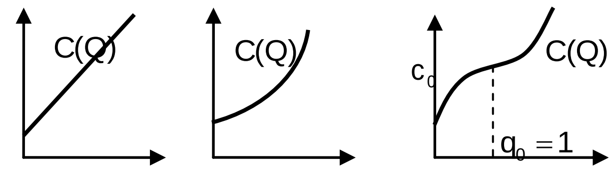
*α) **γραμμική** με σταθερό οριακό κόστος:* $C'' = 0$ *όπως στο πρώτο γράφημα παρακάτω*

*β) **γνήσια κυρτή** με γνήσια αύξον οριακό κόστος:* $C'' > 0$ *όπως στο δεύτερο γράφημα.*

*γ) **αρχικά γνήσια κοίλη** με γνήσια φθίνον οριακό κόστος:* $C'' < 0$*, και **τελικά κυρτή** με αύξον οριακό κόστος* $C'' \geq 0$*, όπως στο τρίτο γράφημα.*

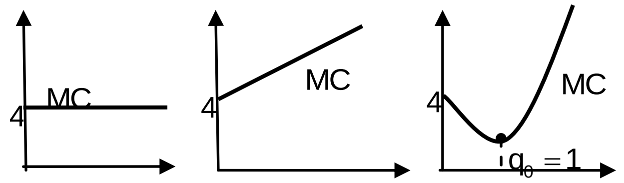
Παρατήρηση. Το μεταβλητό κόστος έχει τις ίδιες ιδιότητες διότι διαφέρει κατά μια σταθερά.

Παράδειγμα. Δίνουμε τα γραφήματα τριών τέτοιων συναρτήσεων κόστους.



κόστος

$C = F + 4Q$ $\quad$ $C = F + 4Q + Q^2$ $\quad$ $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3/3$



οριακό κόστος

$MC \equiv 4$ $\quad$ $MC = 4 + 2Q$ $\quad$ $MC = 4 - 2Q + Q^2$

1. $C = F + 4Q \Rightarrow MC = C' = 4$**, Γραμμική,** με σταθερό οριακό κόστος

2. $C = F + 4Q + Q^2 \Rightarrow C' = 4 + 2Q > 0,\ C'' = 2 > 0$, **Παραβολική**, κυρτή με αύξον οριακό κόστος.

3. $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3/3 \Rightarrow \{C' = 4 - 2Q + Q^2 = 3 + (Q-1)^2 > 0\} \Rightarrow \{C'' = -2 + 2Q\}$,

κυβική αύξουσα, στην αρχή κοίλη με φθίνον οριακό κόστος, στη συνέχεια κυρτή με αύξον οριακό κόστος. Το οριακό κόστος έχει ελάχιστη τιμή στο σημείο καμπής όπου μηδενίζεται η $2^{η}$ παράγωγος:

$$C'' = -2 + 2Q = 0 \Rightarrow q_0 = 1$$

Το οριακό κόστος είναι γνήσια θετικό, διότι παριστάνεται με τετραγωνική συνάρτηση της οποίας η διακρίνουσα είναι γνήσια αρνητική. Έχει ελάχιστη τιμή 3.

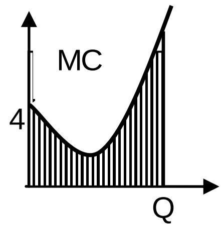
Παρατήρηση. Το μεταβλητό κόστος έχει τις ίδιες ιδιότητες διότι διαφέρει από το συνολικό κατά μια σταθερά.

▲

Αντιστρόφως, **ολοκληρώνοντας** το οριακό κόστος βρίσκουμε το μεταβλητό κόστος για οιαδήποτε παραγωγή Q:

$$\int_0^Q MC(Q)dQ = \int_0^Q C'(Q)dQ = C(Q) - C(0) = VC(Q)$$

Γεωμετρικά, το μεταβλητό κόστος δίνεται από το εμβαδό κάτω από την καμπύλη του οριακού κόστους, από το 0 μέχρι το Q, όπως φαίνεται και στο γράφημα παρακάτω. Έτσι, με οριακό κόστος όπως στο παράδειγμα **3.** παραπάνω:



$$MC = 4 - 2Q + Q^2$$

βρίσκουμε το μεταβλητό κόστος:

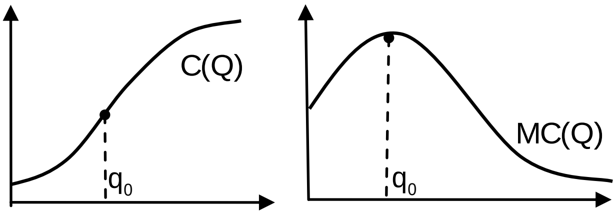
$$VC(Q) = C(Q) - C(0) = \int_0^Q (4 - 2Q + Q^2)dQ = 4Q - Q^2 + Q^3/3 \Big|_0^Q$$

$$4Q - Q^2 + Q^3/3$$

Για το συνολικό κόστος πρέπει να προσθέσουμε και το σταθερό.

▲

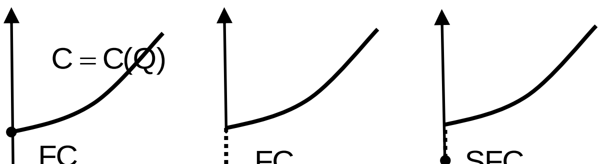
Παρατήρηση. Τα παραπάνω αφορούν **κανονικές** συναρτήσεις κόστους. Ειδικά η σημερινή τεχνολογία επιτρέπει και υπηρεσίες με άλλου είδους συναρτήσεις κόστους, **π.χ.** με φθίνον οριακό κόστος για μεγάλες ποσότητες παραγωγής. Έτσι η συνάρτηση κόστους με το γράφημα παραπλεύρως, είναι στην αρχή κυρτή με αύξον οριακό κόστος αλλά τελικά γίνεται κοίλη με φθίνον οριακό κόστος που μπορεί να τείνει και στο 0 για μεγάλες ποσότητες παραγωγής, οπότε και το συνολικό κόστος μένει σταθερό καθώς αυξάνει η ποσότητα παραγωγής.



Παρατήρηση. Υποθέσαμε για ευκολία, ότι **το σταθερό κόστος υπάρχει και χωρίς παραγωγή,** οπότε έχουμε:

$$C(0) = FC$$

Έτσι, η συνάρτηση κόστους είναι συνεχής στο $Q = 0$ όπως στο πρώτο γράφημα παραπλεύρως. Αντίθετα, αν το σταθερό κόστος εμφανίζεται μόνο με την παραγωγή, τότε η συνάρτηση κόστους θα είναι μη συνεχής στο $Q = 0$, όπως στο δεύτερο γράφημα παραπλεύρως. Θα έχουμε:



$$C(0) = 0,\quad FC = \lim_{Q \to 0} C(Q)$$

Συχνά συνυπάρχουν και οι δύο μορφές σταθερού κόστους, δηλαδή ένα μέρος του εμφανίζεται με την παραγωγή, οπότε αναφέρεται ως **ημισταθερό κόστος** (**S**emi**F**ixed **C**ost)**,** όπως στο τρίτο γράφημα.

▲

2. Μέσο κόστος

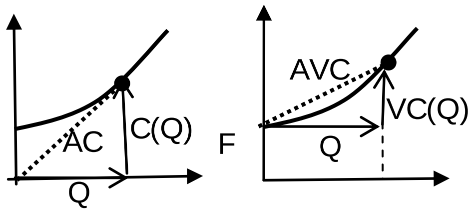
Θεωρούμε το κόστος παραγωγής C ενός προϊόντος ως συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής Q, και το γράφουμε ως άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους:

$$C(Q) = F + VC(Q)$$

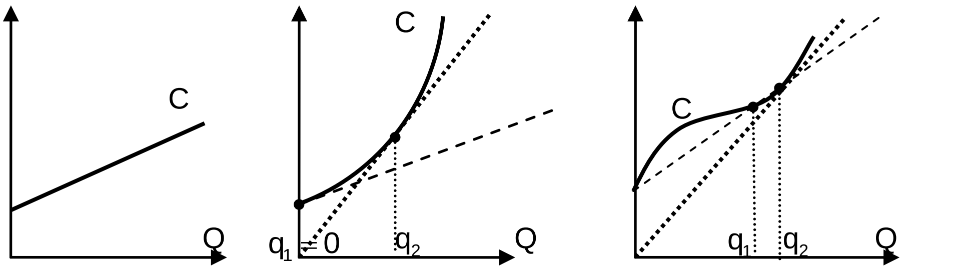
Για κάθε ποσότητα παραγωγής Q, το **μέσο κόστος** (**A**verage **C**ost) και το **μέσο μεταβλητό κόστος** (**A**verage **V**ariable **C**ost) ορίζονται με τα μεγέθη:

$$AC = \frac{C(Q)}{Q}, \quad AVC = \frac{VC(Q)}{Q}$$

αντίστοιχα. Γραφικά παριστάνονται με την κλίση της ακτίνας και της χορδής, όπως στο πρώτο και δεύτερο γράφημα αντίστοιχα, στο σχήμα παραπλεύρως. Ενίοτε λέμε ότι σε κάποια επίπεδα παραγωγής έχουμε **οικονομίες κλίμακας** (scale economies) αν το μέσο κόστος είναι γνήσια φθίνον.

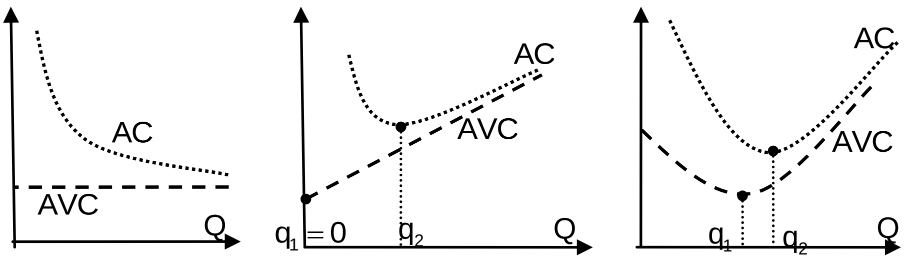


Στο επόμενο σχήμα θεωρούμε τα γραφήματα των τριών συναρτήσεων κόστους που εξετάσαμε προηγουμένως. Κάτω από το καθένα δίνουμε και τα αντίστοιχα γραφήματα των συναρτήσεων μέσου μεταβλητού και μέσου κόστους. Σημειώνουμε με $\{q_1, q_2\}$ τα επίπεδα παραγωγής με **ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος** και **ελάχιστο μέσο κόστος** αντίστοιχα, όπως φαίνεται και από τις κλίσεις στις συναρτήσεις κόστους.



$C = F + 4Q$ $C = F + 4Q + Q^2$ $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3/3$

συναρτήσεις κόστους



$AVC = 4$ $AVC = 4 + Q$ $AVC = 4 - Q + Q^2/3$

$AC = F/Q + AVC$ $AC = F/Q + AVC$ $AC = F/Q + AVC$

συναρτήσεις μέσου μεταβλητού και μέσου κόστους

Παρατηρούμε ότι στα πρώτα δύο παραδείγματα έχουμε κάποια οικονομία κλίμακας που οφείλεται στην ύπαρξη του σταθερού αρχικού κόστους το οποίο διαμοιράζεται στην παραγωγή ρίχνοντας το μέσο κόστος, ενώ το μέσο μεταβλητό κόστος είναι σταθερό ή αύξον. Αντίθετα στο τρίτο γράφημα έχουμε αρχικά μείωση **και** του μέσου μεταβλητού κόστους. Σε όλες τις περιπτώσεις:

*Το μέσο κόστος είναι μεγαλύτερο και συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μέσο μεταβλητό κόστος, διότι διαφέρει από αυτό κατά το **μέσο σταθερό κόστος** που είναι φθίνον τείνοντας στο μηδέν:*

$$AC(Q) - AVC(Q) = FC/Q \to 0 \quad \text{όταν } Q \to \infty$$

3. Ελάχιστο μέσο κόστος

Θεωρούμε τώρα τα τρία μεγέθη, **μέσο κόστος, μέσο μεταβλητό κόστος,** και **οριακό κόστος:**

$AC = C(Q)/Q, \quad AVC = VC(Q)/Q, \quad MC = C'(Q)$

Ιδιότητες μέσου κόστους

Το μέσο κόστος ελαττώνεται οπότε και έχουμε οικονομίες κλίμακας, όταν το οριακό κόστος είναι μικρότερο από το μέσο κόστος, και αυξάνει όταν είναι μεγαλύτερο. Επομένως:

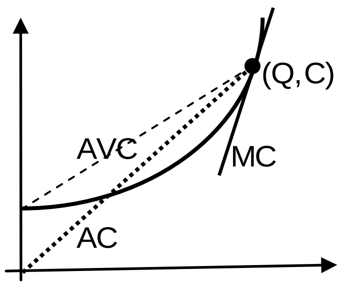
2. Σε εσωτερικό γνήσιο ελάχιστο του μέσου κόστους το οριακό κόστος συμπίπτει με το μέσο κόστος, διασχίζοντας το από κάτω προς τα πάνω.

3. Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για το μέσο μεταβλητό κόστος.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω τύπου για την παράγωγο του μέσου κόστους ως προς Q:

$$\left(\frac{C}{Q}\right)' = \frac{C'Q - C}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left(C' - \frac{C}{Q}\right) > 0 \Leftrightarrow C' > \frac{C}{Q}$$, και αντίστοιχα για αρνητικό

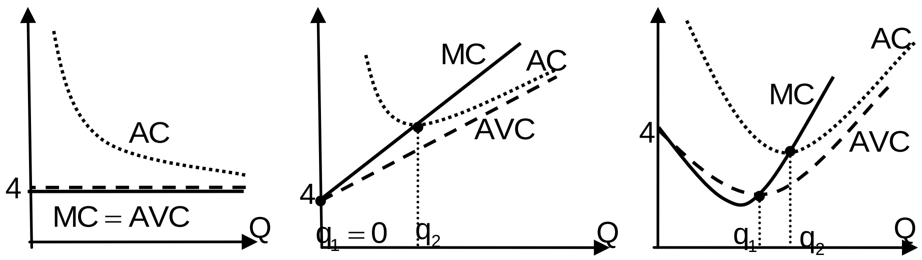
Στο παραπλεύρως γράφημα θεωρούμε μια συνάρτηση κόστους σένα σημείο (Q, C) όπου το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο και από το μέσο μεταβλητό και από το μέσο κόστος, διότι η εφαπτόμενη ευθεία έχει μεγαλύτερη κλίση και από την χορδή και από την ακτίνα. Παρατηρούμε ότι καθώς η παραγωγή αυξάνει από αυτό το επίπεδο, το μέσο μεταβλητό κόστος και το μέσο κόστος επίσης θα αυξάνουν, σύμφωνα και με την παραπάνω θεωρία.



▲

Παρατήρηση. Μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι *το οριακό κόστος* ***τραβάει*** *το μέσο κόστος, προς τα πάνω αν το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο, προς τα κάτω αν είναι μικρότερο,* Το ίδιο ισχύει για το μέσο μεταβλητό κόστος

Παράδειγμα. Οι ιδιότητες αυτές παριστάνονται γραφικά στα παρακάτω γραφήματα, όπου σημειώνουμε με $\{q_1, q_2\}$ τις ποσότητες παραγωγής που δίνουν ελάχιστο του μέσου μεταβλητού και του μέσου κόστους αντίστοιχα, για τις τρεις συναρτήσεις κόστους που εξετάσαμε παραπάνω**.** Είναι πάντοτε εκεί όπου το οριακό τις κόβει από κάτω προς τα πάνω. Το πρώτο σχήμα θέλει ιδιαίτερη αντιμετώπιση.



$C = F + 4Q$	$C = F + 4Q + Q^2$	$C = F + 4Q - Q^2 + Q^3/3$
$MC \equiv 4$	$MC = 4 + 2Q$	$MC = 4 - 2Q + Q^2$
$AVC = 4$	$AVC = 4 + Q$	$AVC = 4 - Q + Q^2/3$
$AC = F/Q + AVC$	$AC = F/Q + AVC$	$AC = F/Q + AVC$

ελάχιστα μέσου μεταβλητού και μέσου κόστους

Παρατήρηση. Σε όλες τις περιπτώσεις, **το αρχικό μέσο μεταβλητό κόστος συμπίπτει με το αρχικό οριακό κόστος**, διότι και τα δύο αρχίζουν με μηδενική παραγωγή.

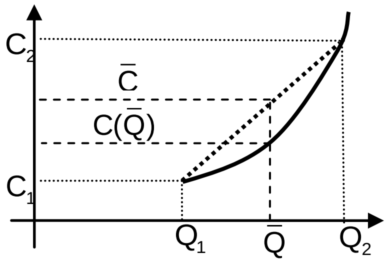
$$\left\{ AVC(0) = \lim_{Q\to 0} \frac{VC(Q)}{Q} = \lim_{Q\to 0} \frac{C(Q) - C(0)}{Q - 0},\ MC(0) = C'(0) = \lim_{Q\to 0} \frac{C(Q) - C(0)}{Q - 0} \right\} \Rightarrow AVC(0) = MC(0)$$

Σόλα τα παραπάνω παραδείγματα είναι ίσο με 4:

▲

Παράδειγμα. Μια επιχείρηση εκτελεί παραγγελία Q με κόστος:

$$C = C(Q)$$



Αν έχει δύο παραγγελίες: $\{Q_1, Q_2\}$, τότε το μέσο κόστος ανά παραγγελία είναι:

$$\bar{C} = [C(Q_1) + C(Q_2)]/2$$

Αν οι παραγγελίες ήταν σταθερές ίσες με το μέσο όρο των παραπάνω, τότε θα είχε κόστος ανά παραγγελία:

$$C(\bar{Q}) \text{ με } \bar{Q} = (Q_1 + Q_2)/2$$

Παρατηρούμε ότι:

Όπου η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή, η κυμαινόμενη παραγωγή έχει μεγαλύτερο μέσο κόστος από τη σταθερή ενδιάμεση παραγωγή. Δηλαδή η σταθερή παραγωγή είναι συμφέρουσα.

$$C(\bar{Q}) = C\left(\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2\right) \le \frac{1}{2}C(Q_1) + \frac{1}{2}C(Q_2) = \bar{C}$$

Το παραπάνω εκφράζει την χαρακτηριστική ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων ότι η καμπύλη της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από την χορδή, και ισχύει για οιοδήποτε αριθμό παραγγελιών.

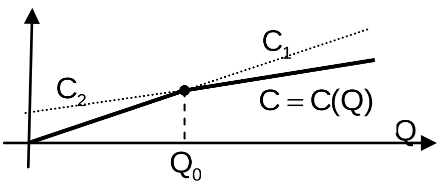
▲

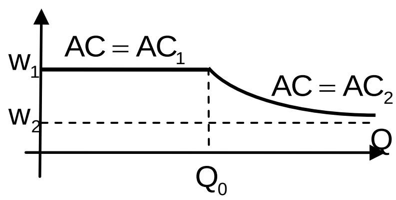
Παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι μια ποσότητα προϊόντος μπορεί να παραχθεί με δύο διαφορετικές διαδικασίες, με αντίστοιχο κόστος:

$$C_1 = w_1 Q, \; C_2 = F + w_2 Q, \text{ όπου } w_2 < w_1$$

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μικρότερο κόστος ανά μονάδα προιόντος, αλλά έχουμε επιπλέον κάποιο σταθερό κόστος. Αν για κάθε επίπεδο παραγωγής επιλέγουμε τη διαδικασία με το μικρότερο συνολικό κόστος, η συνάρτηση κόστους θα ορίζεται τμηματικά ως min γραμμικών συναρτήσεων, με τη σχέση:

$$C = \min\{C_1, C_2\} = \left.\begin{matrix} C_1 = w_1 Q & \text{για } Q \le Q_0 \\ C_2 = F + w_2 Q & \text{για } Q \ge Q_0 \end{matrix}\right\}, \text{ όπου: } F + w_2 Q = w_1 Q \Rightarrow Q_0 = \frac{F}{w_1 - w_2},$$





Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κόστους είναι κοίλη αντί κυρτής, και ότι λόγω του σταθερού κόστους που επιμερίζεται εμφανίζει οικονομίες κλίμακας στις μεγάλες ποσότητες παραγωγής, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παραπάνω:

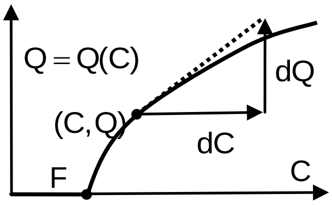
▲

ΠΑΡΑΓΩΓΗ

4. Οριακό προϊόν

Η **αντίστροφη** της συνάρτησης κόστους εκφράζει την ποσότητα παραγωγής ως συνάρτηση της δαπάνης, και καλείται **συνάρτηση παραγωγής** (**P**roduction function):

$$Q = Q(C) \Leftrightarrow C = C(Q)$$



Είναι μηδενική πριν από το επίπεδο δαπάνης που αντιστοιχεί στο σταθερό κόστος F. Για κάθε επίπεδο δαπάνης C το **οριακό προϊόν** (**M**arginal **P**roduct) δίνεται από την παράγωγο:

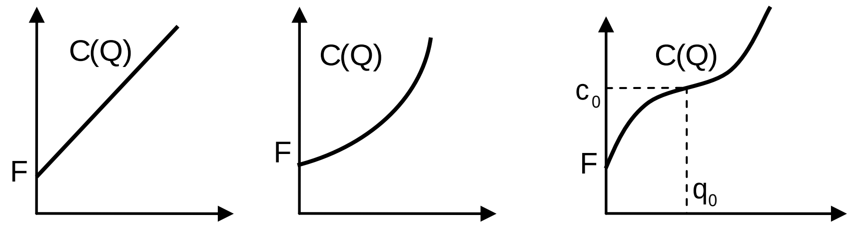
$$MQ = Q'(C) = \frac{dQ}{dC}$$

Γραφικά, ορίζεται από την κλίση της εφαπτομένης στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης, όπως στο γράφημα παραπλεύρως. Λόγω της σχέσης αντιστροφής μεταξύ της συνάρτησης κόστους και της συνάρτησης παραγωγής, το οριακό προϊόν είναι το ανάστροφο του αντίστοιχου οριακού κόστους, για τα ίδια επίπεδα παραγωγής-κόστους $\{Q, C\}$:

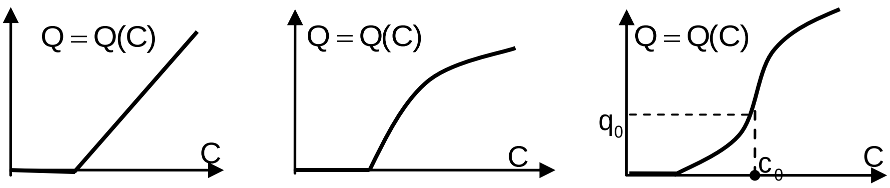
$$Q'(C) = 1/C'(Q) \Rightarrow MQ = 1/MC$$

Παράδειγμα. Οι αντίστροφες των συναρτήσεων κόστους που εξετάσαμε προηγουμένως μας δίνουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγής με τα παρακάτω γραφήματα που προκύπτουν παίρνοντας τα συμμετρικά ως προς την διαγώνιο. Παραβλέποντας το αρχικό κομμάτι, για τις κανονικές συναρτήσεις κόστους/παραγωγής είναι αύξουσα γραμμική ή κοίλη τουλάχιστον τελικά, όπως στο τρίτο παράδειγμα παρακάτω. . Η σημερινή τεχνολογία επιτρέπει και κυρτές συναρτήσεις παραγωγής. Γραφικά βρίσκουμε και τις συναρτήσεις οριακού προιόντος.

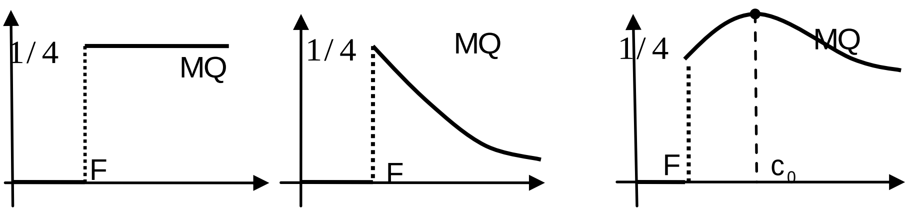
$C = F + 4Q$ $\qquad$ $C = F + 4Q + Q^2$ $\qquad$ $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3/3$



συναρτήσεις κόστους



. **συναρτήσεις παραγωγής**



συναρτήσεις οριακού προϊόντος

Παράδειγμα. Θα βρούμε το οριακό προιόν για τη συνάρτηση παραγωγής που ορίζεται πλεγμένα ως αντίστροφη της συνάρτησης κόστους η οποία αντιστοιχεί στο δεύτερο γράφημα παραπάνω:

$C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow Q = Q(C)$, πήραμε $F = 1$

Λύση 1. Χρησιμοποιώντας την σχέση αντιστροφής βρίσκουμε:

$$MQ = \frac{1}{MC} = \frac{1}{4 + 2Q}$$

Λύση 2. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς C, βρίσκουμε το ίδιο:

$$C' = (1 + 4Q + Q^2)' \Rightarrow 1 = 4Q' + 2QQ' \Rightarrow Q' = \frac{1}{4 + 2Q}$$

Λύση 3. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση παραγωγής λύνοντας ως προς Q την δευτεροβάθμια εξίσωση, και κρατώντας μόνο την θετική ρίζα:

$$C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow Q^2 + 4Q + (1 - C) = 0 \Rightarrow Q = -2 + \sqrt{C + 3} \quad \text{για } C \geq 1 = F$$

Παραγωγίζοντάς την απευθείας βρίσκουμε και το οριακό προιόν στη μορφή:

$$Q = -2 + \sqrt{C + 3} \Rightarrow MQ = Q' = \frac{1}{2\sqrt{C + 3}} \quad \text{για } \ C \geq 1$$

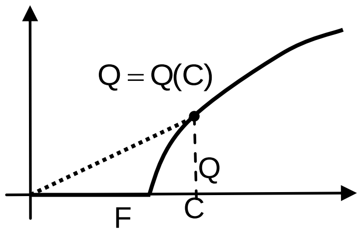
Αντικαθιστώντας $C = 1 + 4Q + Q^2$, θα βρούμε την ίδια παράσταση όπως προηγουμένως.

▲

5. Μέσο προιόν

Θεωρούμε πάλι την συνάρτηση παραγωγής ως αντίστροφη της συνάρτησης κόστους:

$Q = Q(C) \Leftrightarrow C = C(Q)$



Είναι μηδενική πριν από το επίπεδο δαπάνης που αντιστοιχεί στο σταθερό κόστος F. Για κάθε επίπεδο δαπάνης-παραγωγής $\{C, Q\}$ ορίζουμε και την παραγωγή ανά μονάδα δαπάνης:

$AQ = Q(C) / C$, **μέσο προϊόν** (**A**verage **P**roduct)

Γραφικά, ορίζονται από την κλίση της ακτίνας στα διάφορα σημεία της καμπύλης παραγωγής, όπως στο γράφημα παραπλεύρως. Παρατηρούμε ότι σε κάθε επίπεδο παραγωγής-δαπάνης $\{Q, C\}$, το μέσο προιόν και το μέσο κόστος είναι μεγέθη ανάστροφα μεταξύ τους:

$AQ = 1 / AC$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής που ορίζεται πλεγμένα ως αντίστροφη από την συνάρτηση κόστους που αντιστοιχεί στο δεύτερο γράφημα παραπάνω:

$C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow Q = Q(C)$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αντιστροφής βρίσκουμε για το μέσο προιόν το μέγεθος:

$$AQ = \frac{1}{AC} = \frac{Q}{1 + 4Q + Q^2}$$

Παρατήρηση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση βρήκαμε προηγουμένως τη συνάρτηση παραγωγής λύνοντας ως προς Q. Για $C \leq 1$, η παραγωγή είναι μηδενική. Για $C \geq 1$, βρήκαμε την παραγωγή ως λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$C = 1 + 4Q + Q^2 \Rightarrow Q^2 + 4Q + (1 - C) = 0 \Rightarrow Q = -2 + \sqrt{C + 3} \quad \text{για } C \geq 1$$

Επομένως:

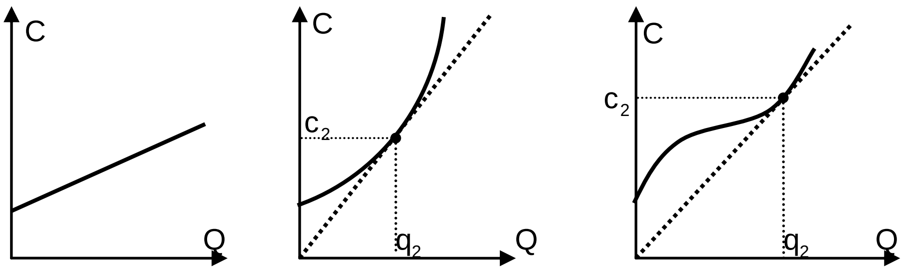
$$Q = -2 + \sqrt{C + 3} \Rightarrow AQ = \frac{-2 + \sqrt{C + 3}}{C} \quad \text{για } \ C \geq 1$$

που είναι ίδια με αυτή που βρήκαμε παραπάνω, αν πάρουμε υπόψη την αντιστοιχία: $Q \leftrightarrow C$.

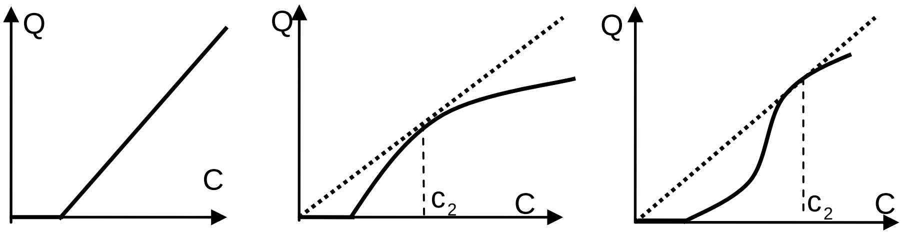
▲

Θεωρούμε πάλι τις συναρτήσεις κόστους που εξετάσαμε παραπάνω καθώς και τις αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγής με τα παρακάτω γραφήματα, που βρίσκονται παίρνοντας τα συμμετρικά ως προς την διαγώνιο.

$C = F + 4Q$ $\qquad$ $C = F + 4Q + Q^2$ $\qquad$ $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3 / 3$

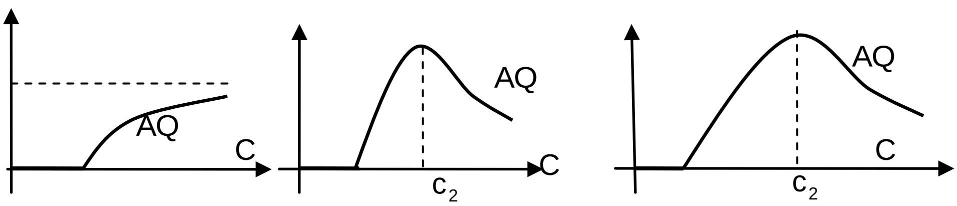


συναρτήσεις κόστους



. **(αντίστροφες) συναρτήσεις παραγωγής**

Δίνουμε και τα γραφήματα των αντίστοιχων συναρτήσεων μέσου προϊόντος. Παρατηρούμε ότι εκτός από το αρχικό διάστημα που είναι μηδενικό, το μέσο προιόν είναι συνεχώς αύξον στην πρώτη περίπτωση, ενώ στις άλλες δύο είναι αύξον μέχρι ένα επίπεδο δαπάνης και στη συνέχεια γίνεται φθίνον. **Το μέσο προιόν είναι μέγιστο όταν το μέσο κόστος είναι ελάχιστο.**



συναρτήσεις μέσου προϊόντος

6. Μέγιστο μέσο προιόν

Μαζί με το μέσο προιόν θεωρούμε τώρα και το οριακό προιόν που εξετάσαμε προηγουμένως και δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης παραγωγής ως προς την δαπάνη:

$$AQ = Q(C) / C, \quad MQ = Q'(C)$$

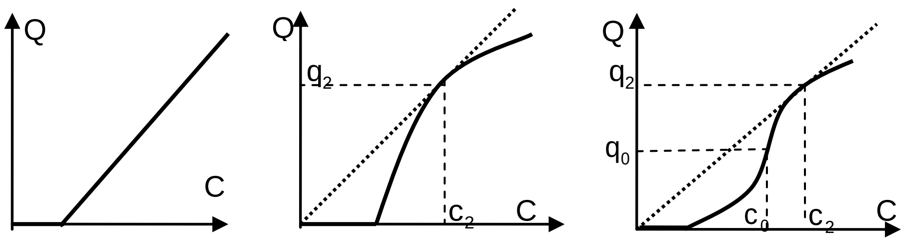
Οι παρακάτω ιδιότητες του μέσου προιόντος είναι αντίστοιχες αυτών του μέσου κόστους και αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο. Ισχύουν και λόγω της σχέσης αντιστροφής των δύο συναρτήσεων.

Ιδιότητες μέσου προιόντος

1.Το μέσο προιόν αυξάνει όταν το οριακό προιόν είναι μεγαλύτερο, και ελαττώνεται όταν είναι μικρότερο.

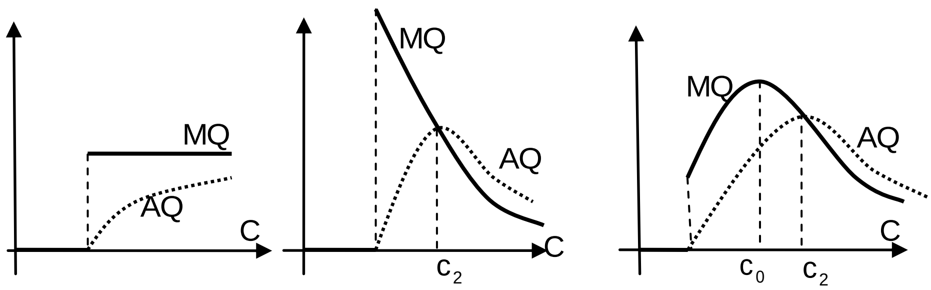
2. Σε εσωτερικό γνήσιο μέγιστο του μέσου προιόντος, το οριακό προιόν συμπίπτει με το μέσο προιόν, διασχίζοντας το από πάνω προς τα κάτω, είναι μεγαλύτερο πριν και μικρότερο μετά.

Για τις συναρτήσεις παραγωγής που εξετάσαμε προηγουμένως δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα των συναρτήσεων οριακού προϊόντος σε σχέση με τις αντίστοιχες συναρτήσεις μέσου προϊόντος.



$C = F + 4Q$ $\qquad$ $C = F + 4Q + Q^2$ $\qquad$ $C = F + 4Q - Q^2 + Q^3 / 3$

συναρτήσεις παραγωγής



συναρτήσεις μέσου και οριακού προϊόντος

Παρατήρηση. Όπως και στην περίπτωση του κόστους, μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι *το οριακό προϊόν **τραβάει** το μέσο προϊόν, προς τα πάνω αν το οριακό προϊόν είναι μεγαλύτερο, προς τα κάτω αν είναι μικρότερο,*

7. Συντελεστής παραγωγής

Η μεταβλητή του κόστους δεν αφορά μόνο χρηματικό μέγεθος. Στη γενική περίπτωση μπορεί να αφορά την χρήση ενός **συντελεστή παραγωγής**, π.χ. **εργασία** (labor) L. Σαυτη την περίπτωση έχουμε συναρτήσεις με αντίστοιχες ιδιότητες:

$Q = Q(L)$, **παραγωγή** της εργασίας

$MQ = Q'(L)$, **οριακό προιόν** της εργασίας, (οριακή παραγωγικότητα)

$AQ = Q(L) / L$, **μέσο προιόν** της εγασίας, (μέση παραγωγικότητα)

Αντίστοιχα ορίζεται και η αντίστροφή της με ιδιότητες όπως αυτές της συνάρτησης κόστους που μελετήσαμε προηγουμένως.

$Q = Q(L) \Leftrightarrow L = L(Q)$, **ζήτηση εργασίας**

Γενικά σε μια παραγωγική διαδικασία συμμετέχουν πολλοί συντελεστές, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Παραπάνω υποθέτουμε ότι *οι άλλοι συντελεστές της παραγωγής είναι σταθεροί, και μεταβάλλεται μόνο η ποσότητα εργασίας.*

ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ

8. Χρησιμότητα

Όλα τα παραπάνω αφορούν την παραγωγή. Θεωρούμε τώρα το άλλο σκέλος της οικονομίας που είναι η κατανάλωση. Σένα πρώτο επίπεδο η διαδικασία κατανάλωσης παρουσιάζει αντιστοιχίες με την διαδικασία παραγωγής, όπου θεωρούμε ότι η **κατανάλωση** (**C**onsumption) X μιας ποσότητας κάποιου αγαθού, «παράγει» κάποια **χρησιμότητα** (**U**tility) U. Η σχέση μεταξύ των μεγεθών $\{X,U\}$ εκφράζεται με μια **συνάρτηση χρησιμότητας** (**U**tility function):

$$U = U(X)$$

Παρατήρηση. Έχει ιδιότητες αντίστοιχες της συνάρτησης παραγωγής: $Q = Q(C)$, όπου η αντιστοιχία είναι: $\{C \leftrightarrow X,\ Q \leftrightarrow U\}$. Δηλαδή όπως μια δαπάνη C παράγει ποσότητα Q, έτσι μια κατανάλωση X παράγει χρησιμότητα U.

▲

Ο βασικός ρόλος της είναι να ορίζει καταρχήν μια **διάταξη προτίμησης** (preference ordering) στο σύνολο $\{X\}$ της ποσότητας κατανάλωσης, οπότε μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες μονοτονίας. Συνήθως είναι γνήσια αύξουσα αλλά μπορεί να έχει και διαστήματα αδιαφορίας όπου είναι σταθερή ή ακόμη και σημείο **κορεσμού** μετά το οποίο γίνεται φθίνουσα. Δύο συναρτήσεις χρησιμότητας: $\{U = U(X),\ V = V(X)\}$ ορίζουν την ίδια διάταξη αν είναι **διατακτικά** ή **μονότονα ισοδύναμες** (order equivalent) με την έννοια ότι η κάθε μία είναι γνήσια αύξων μετασχηματισμός της άλλης:

$$V = V(U) \quad \text{με} \quad V'(U) > 0$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις η χρησιμότητα ποσοτικοποιείται. Συνήθως ποσοτικοποιείται όχι η ίδια η χρησιμότητα, αλλά η διαφορά της από κάποια **κατανάλωση αναφοράς.** Έτσι, η διαφορά:

$$U(X) - U(X_0)$$

μπορεί να εκφράζει την προτίμηση του X ως προς το X_0, στη μορφή του επιπλέον ποσού ή προσπάθειας ή και ρίσκου που είναι διατεθειμένος να καταβάλει ένας καταναλωτής για να αποκτήσει την επιπλέον ποσότητα αν $X > X_0$, ή να εισπράξει για να συμβιβαστεί με τη μικρότερη ποσότητα αν $X < X_0$ οπότε και **θα έχει αρνητική τιμή.** Ειδικότερα, την παραπάνω διαφορά σε σχέση με την **μη κατανάλωση:** $X_0 = 0$, την λέμε και **μεταβλητή** ή **λειτουργική** χρησιμότητα **.** Σαυτό το πλαίσιο η συνάρτηση χρησιμότητας είναι **συνήθως αύξουσα κοίλη,** σε αντιστοιχία με την συνάρτηση παραγωγής, οπότε η **οριακή χρησιμότητα** (**M**arginal **U**tility):

$$MU = U'(X)$$

θα είναι φθίνουσα. Σε μεγάλες ποσότητες κατανάλωσης μπορεί να έχουμε και επίπεδα κορεσμού οπότε η χρησιμότητα γίνεται φθίνουσα και η οριακή χρησιμότητα αρνητική. Δεδομένου ότι η μονάδα μέτρησης και η κατανάλωση αναφοράς ορίζονται συμβατικά, δύο συναρτήσεις χρησιμότητας σ' αυτό το πλαίσιο θα είναι **γραμμικά ισοδύναμες** (linearly equivalent) αν η μια είναι αύξων γραμμικός μετασχηματισμός της άλλης:

$$V = \alpha U + \beta \quad \text{με} \quad \alpha > 0$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε και την αντίστροφη σχέση ολοκλήρωσης:

$$\int_{X_0}^{X} MU(X)dX = \int_{X_0}^{X} U'(X)dX = U(X) - U(X_0)$$

Π.χ. οι παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας είναι διατακτικά ισοδύναμες. Η 1η και η 2η είναι και γραμμικά ισοδύναμες μεταξύ τους. Η 2η και η 4η παίρνουν και αρνητικές τιμές.