# IV.10 ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ (Β)



## ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ

## 1. Μερικές ελαστικότητες

Επεκτείνοντας την θεωρία ελαστικότητας σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$, και ορίζουμε τις **μερικές ελαστικότητες,** σε αντιστοιχία με τις μερικές παραγώγους, ως εξής:

$\varepsilon_x = E_x f = \dfrac{xf_x}{f}$, *ελαστικότητα ως προς* $x$, $\qquad \varepsilon_y = E_y f = \dfrac{yf_y}{f}$, *ελαστικότητα ως προς* $y$

Η ερμηνεία τους είναι όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Π.χ.

$E_x f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\%\Delta f}{\%\Delta x}$ με $\Delta y = 0$

**Παράδειγμα.** Οι συναρτήσεις C-D: $f(x,y) = cx^{\alpha}y^{\beta}$, έχουν σταθερές ελαστικότητες:

$$E_x f = \frac{xf_x}{f} = \frac{xc\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{cx^{\alpha}y^{\beta}} = \alpha, \quad E_y f = \frac{yf_y}{f} = \frac{yc\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}{cx^{\alpha}y^{\beta}} = \beta .$$

Δηλαδή, αύξηση *μόνο* του $x$ κατά $1\%$ προκαλεί μεταβολή στη τιμή της συνάρτησης κατά $\alpha\%$, οριακά. Αντίστοιχα για το $y$. Έτσι, **στις συναρτήσεις C-D, οι εκθέτες ερμηνεύονται ως αντίστοιχες ελαστικότητες.**

▲

## 2. Σχετικά ή ποσοστιαία διαφορικά.

Οι μερικές ελαστικότητες δίνουν τις οριακές ποσοστιαίες μεταβολές στην τιμή μιας συνάρτησης όταν μεταβάλλεται μόνο μία μεταβλητή. Όταν μεταβάλλονται περισσότερες μεταβλητές που συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες εξισώσεις, τότε ως προσεγγίσεις των σχετικών μεταβολών χρησιμοποιούμε τα **σχετικά διαφορικά** καθώς και τα ισοδύναμά τους **ποσοστιαία διαφορικά:**

$$\left\{\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}, \cdots\right\} \Rightarrow \left\{\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \cdots\right\}, \quad \left\{\%dx = 100\frac{dx}{x}, \%dy = 100\frac{dy}{y}, \cdots\right\}$$

Σε προηγούμενα κεφάλαια διαπιστώσαμε ότι τα διαφορικά συνδέονται μέσω των παραγώγων. Αντίστοιχα, τα σχετικά και τα ποσοστιαία διαφορικά συνδέονται μέσω των ελαστικοτήτων. Π.χ.

- Για συναρτήσεις **μιας μεταβλητής**: $y = y(x)$, έχουμε:

  $y = y(x) \Rightarrow \%dy = \varepsilon(\%dx)$ όπου: $\varepsilon = E_x y = \dfrac{xy'}{y}$

- Για συναρτήσεις **δύο μεταβλητών,** έχουμε:

  $z = z(x,y) \Rightarrow \%dz = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy)$ όπου: $\varepsilon_x = E_x z = \dfrac{xz_x}{z}$, $\varepsilon_y = E_y z = \dfrac{yz_y}{z}$

Αντίστοιχα για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

**Παρατήρηση.** Η ίδια σχέση ισχύει για τα σχετικά διαφορικά

$z = z(x,y) \Rightarrow dz/z = \varepsilon_x(dx/x) + \varepsilon_y(dy/y)$

**Απόδειξη.** Από τον τύπο των διαφορικών, διαιρώντας με $z$, βρίσκουμε για τα σχετικά διαφορικά:

$$dz = z_x dx + z_y dy \ \Rightarrow \left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{xz_x}{z}\left(\frac{dx}{x}\right) + \frac{yz_y}{z}\left(\frac{dy}{y}\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας με 100 καταλήγουμε στην παραπάνω σχέση και για τα ποσοστιαία διαφορικά.

▲

Ως προς ορισμένες πράξεις μεταξύ μεταβλητών, ποσοστιαία διαφορικά (και τα σχετικά) έχουν απλό λογισμό. Έτσι, όπως διαπιστώσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, για δύο μεταβλητές $\{u, v\}$, είτε ανεξάρτητες είτε εξαρτημένες από άλλες, έχουμε:

$$\%d(\alpha u) = \%d(u),\ \%d(uv) = \%du + \%dv,\ \%d(u/v) = \%du - \%dv$$

Δηλαδή, στον πολλαπλασιασμό τα ποσοστιαία διαφορικά προστίθενται και στην διαίρεση αφαιρούνται. Παρατηρούμε επίσης ότι αν πολλαπλασιάσουμε με σταθερά, το ποσοστιαίο διαφορικό δεν μεταβάλλεται. Αντίστοιχα ισχύουν και οι υπόλοιπες ιδιότητες των ποσοστιαίων (και των σχετικών) διαφορικών.

**Παράδειγμα.** Αν η μοναδιαία τιμή $P$ ενός προιόντος αυξηθεί κατά $2\%$ και η ποσότητα ζήτησης $Q$ μειωθεί κατά $3\%$, τότε για το έσοδο $R = PQ$ βρίσκουμε το διαφορικό:

$$R = PQ \Rightarrow \%dQ = \%dP + \%dQ = \%\Delta P + \%\Delta Q = 2\% - 3\% = -1\%.$$

Επομένως το έσοδο θα ελαττωθεί κατά $1\%$, **περίπου.**

▲

**Παρατήρηση.** Οι αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων σχετικών και ποσοστιαίων μεταβολών είναι πιο πολύπλοκες. Π.χ. για την σχετική μεταβολή γινομένου, βρίσκουμε:

$$\Delta(uv) = [(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv] = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v \Rightarrow \frac{\Delta(uv)}{uv} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta u}{u}\frac{\Delta v}{v}$$

Πολλαπλασιάζοντας με 100 βρίσκουμε την αντίστοιχη σχέση για τις ποσοστιαίες μεταβολές. Υπενθυμίζουμε ότι **για ανεξάρτητες μεταβλητές** τα διαφορικά, τα σχετικά διαφορικά, και τα ποσοστιαία διαφορικά συμπίπτουν με τις μεταβολές, τις σχετικές μεταβολές και τις ποσοστιαίες μεταβολές αντίστοιχα.

▲

**Παράδειγμα.** Θεωρούμε το εμβαδό ενός ορθογώνιου ως γινόμενο του μήκους των πλευρών του:

$$z = xy$$

Αν η μία πλευρά αυξηθεί κατά $\%\Delta x = 2\%$ και η άλλη αυξηθεί κατά $\%\Delta y = 1\%$, τότε για το εμβαδό βρίσκουμε το ποσοστιαίο διαφορικό:

$$\%dz = \%d(xy) = \%dx + \%dy = \%\Delta x + \%\Delta y = 2\% + 1\% = 3\%.$$

και αντίστοιχα το σχετικό διαφορικό 0.03, που είναι και μια **εκτίμηση** της σχετικής μεταβολής. Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση για την **πραγματική** σχετική μεταβολή θα πρέπει να προσθέσουμε και τον όρο:

$$(\Delta u/u)(\Delta v/v) = (0.02)(0.01) = 0.0002 \Rightarrow 0.02\%.$$

Δηλαδή στην πραγματικότητα το εμβαδό θα μεταβληθεί κατά: $\%\Delta z = 3 + 0.02 = 3.02\%$

▲

# 3. Ελαστικότητα κλίμακας

Για να επεκτείνουμε την έννοια της ομογένειας σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών παίρνουμε το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων και ορίζουμε το μέγεθος:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_y\ ,\ E_r f = E_x f + E_y f$$ , **ελαστικότητα κλίμακας**

Θεωρούμε τώρα τον τύπο του ποσοστιαίου διαφορικού μιας συνάρτησης:

$$f(x, y) \Rightarrow \%df = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy)$$

και παρατηρούμε ότι αν τα $(x, y)$ μεταβληθούν κατά **το ίδιο ποσοστό,** βρίσκουμε:

$$\%df = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\%dr) = \varepsilon_r(\%dr)$$

όπου

$\%dr = \%dx = \%dy$ είναι η κοινή ποσοστιαία μεταβολή

Δηλαδή, η ελαστικότητα κλίμακας δίνει την ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης όταν **αμφότερες** οι ανεξάρτητες μεταβληθούν από τις αντίστοιχες αρχικές τιμές $(x, y)$ κατά $1\%$, οριακά.

**Παράδειγμα**

**1.** $z = \alpha x + \beta y \Rightarrow \varepsilon_x = \dfrac{x\alpha}{\alpha x + \beta y},\ \varepsilon_y = \dfrac{y\beta}{\alpha x + \beta y},\ \varepsilon_r = \dfrac{x\alpha}{\alpha x + \beta y} + \dfrac{y\beta}{\alpha x + \beta y} \equiv 1$, σταθερή

**2.** Διαπιστώσαμε παραπάνω ότι οι συναρτήσεις **C-D**: $f(x,y) = cx^{\alpha}y^{\beta}$, έχουν σταθερές επιμέρους ελαστικότητες που δίνονται από τις αντίστοιχες δυνάμεις. Επομένως η ελαστικότητα κλίμακας θα δίνεται από το άθροισμα των δυνάμεων:

$$z = cx^{\alpha}y^{\beta} \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_\upsilon \equiv \alpha + \beta \text{, σταθερή}$$

Επομένως, *αύξηση* ***αμφότερων*** *των* $(x, y)$ *κατά* $1\%$ *προκαλεί μεταβολή στη τιμή της συνάρτησης κατά* $(\alpha + \beta)\%$***, οριακά.***

Ειδικότερα, μηδενική ελαστικότητα κλίμακας έχουν οι συναρτήσεις της μορφής:

$$z = cx^{\alpha}y^{-\alpha} = c(x / y)^{\alpha} = c(y / x)^{-\alpha} \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_\upsilon \equiv \alpha - \alpha = 0$$

Τώρα, μεταβολή των μεταβλητών κατά το ίδιο ποσοστό, αφήνει αμετάβλητη την τιμή της συνάρτησης.

**3.** Γενικά η ελαστικότητα κλίμακας εξαρτάται από τις αντίστοιχες τιμές $(x, y)$:

$$z = 2x + y + 1 \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{x2}{2x + y + 1}, \ \varepsilon_y = \frac{y}{2x + y + 1} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{2x + y}{2x + y + 1}$$

▲

# ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## 4. Ομογενείς συναρτήσεις

*μιας μεταβλητής,* καλούνται οι συναρτήσεις δυνάμεις:

$$f(x) = cx^{\kappa}$$

Έχουν σταθερή ελαστικότητα ίση με τη δύναμη: $\varepsilon \equiv \kappa$, οπότε έχουμε και την σχέση:

$$\%df = \kappa(\%dx)$$

Η ελαστικότητα ομογενούς συνάρτησης καλείται και **βαθμός ομογένειας.** Ειδικά:

ομογενείς βαθμού $1$ είναι οι *γραμμικές ομογενείς:* $cx$

ομογενείς βαθμού $0$ είναι οι *σταθερές* συναρτήσεις*:* $c$

Λέμε ότι η ομογενής συνάρτηση έχει **απόδοση κλίμακας:**

**αύξουσα** αν $|\kappa| > 1$, **φθίνουσα** αν $|\kappa| < 1$, **σταθερή** αν $|\kappa| = 1$

**Παράδειγμα.** Η $y = 10x^{-3/2}$ είναι αύξουσας απόδοσης κλίμακας. Αν το $x$ αυξηθεί κατά 1% από *οιαδήποτε αρχική τιμή*, το $y$ θα μεταβληθεί οριακά κατά:

$$\%\Delta y \approx \%dy = \varepsilon(\%dx) = (-3/2)\%$$

Σε απόλυτες τιμές η ποσοστιαία μεταβολή του $y$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από του $x$, **οριακά**.

▲

**Ομογενείς** συναρτήσεις *δύο μεταβλητών,* καλούνται οι συναρτήσεις που έχουν **σταθερή ελαστικότητα κλίμακας,** η οποία καλείται και **βαθμός ομογένειας**. Έτσι αν έχουμε:

$$f(x,y) \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_y \equiv \kappa \text{, σταθερό}$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ομογενής βαθμού** $\kappa$. Σαυτή την περίπτωση αν πάρουμε ίσες ποσοστιαίες μεταβολές:

$$\%dr = \%dx = \%dy$$

τότε η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί **οριακά** κατά:

$$\%df = \varepsilon_r(\%dr) = \kappa(\%dr)$$

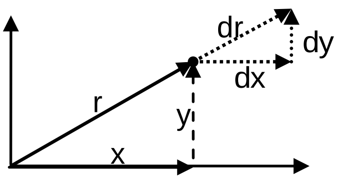
**ανεξάρτητα των αρχικών** $(x,y)$. Παρατηρούμε ότι σε **απόλυτες τιμές** η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης, σε σύγκριση με την παραπάνω κοινή ποσοστιαία μεταβολή των μεταβλητών, θα είναι μεγαλύτερη αν $|\kappa| > 1$, μικρότερη αν $|\kappa| < 1$, ίδια αν $|\kappa| = 1$. Εκφράζουμε αυτή την ιδιότητα λέγοντας ότι μια ομογενής συνάρτηση βαθμού $\kappa$, έχει **απόδοση κλίμακας:**

**αύξουσα** αν $|\kappa| > 1$, **φθίνουσα** αν $|\kappa| < 1$, **σταθερή** αν $|\kappa| = 1$

Αν είναι ομογενής **μηδενικού βαθμού:** $\kappa = 0$, τότε η τιμή της συνάρτησης δεν θα μεταβληθεί.

**Παρατήρηση.** Η ελαστικότητα κλίμακας καλείται και **ακτινωτή ελαστικότητα** διότι μεταβολή των $(x,y)$ κατά το ίδιο ποσοστό αντιστοιχεί σε μεταβολή κατά μήκος της ακτίνας $r$ (κατά το ίδιο αυτό ποσοστό), όπως φαίνεται στο γράφημα:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} = \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$




▲

**Παράδειγμα**

**1.** $f(x,y) = \alpha x + \beta y \Rightarrow \varepsilon_r \equiv 1$, ομογενής βαθμού $\kappa = 1$. Την καλούμε και **γραμμική ομογενή**

2. $f(x,y) = cx^{\alpha}y^{\beta} \Rightarrow \varepsilon_r \equiv \alpha + \beta$, Η συνάρτηση C-D είναι ομογενής βαθμού $\kappa = \alpha + \beta$

▲

Στη συνέχεια θα εξετάζουμε τις ιδιότητες των ομογενών συναρτήσεων για διάφορους βαθμούς ομογένειας. Ειδικότερα, θα εξετάσουμε εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς της ελαστικότητας

# 5. Χαρακτηρισμός ομογενών

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι **ομογενής βαθμού** $\kappa$**,** αν ικανοποιεί οιαδήποτε από τις παρακάτω 4 **ισοδύναμες** συνθήκες:

**1. Για κάθε** $t>0$ **ικανοποιεί** $f(tx,ty)=t^{\kappa}f(x,y)$

**2. Είναι της μορφής** $f(x,y)=x^{\kappa}H(y/x)$ **ή ισοδύναμα:** $f(x,y)=y^{\kappa}G(y/x)$

**3. Έχει σταθερή ελαστικότητα κλίμακας ίση με το βαθμό:** $\varepsilon_r=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\kappa$

**4. Ικανοποιεί την εξίσωση Euler βαθμού** $\kappa$**:** $xf_x+yf_y=\kappa f$

**Παράδειγμα**

**1.** $\sqrt{x+2y}=x^{1/2}\sqrt{1+2(y/x)}$, ομογενής βαθμού $1/2=0.5$, φθίνουσας απόδοσης.

Εναλλακτικά: $\sqrt{tx+ty}=t^{1/2}\sqrt{x+y}$ ,

**2.** $x^2+xy-2y^2=x^2\left[1+(y/x)-2(y/x)^2\right]$ , ομογενής βαθμού $2$, αύξουσας απόδοσης.

**3.** Γενικότερα η τετραγωνική (παραβολική) συνάρτηση είναι ομογενής 2ου βαθμού, μόνο αν δεν υπάρχουν οι γραμμικοί όροι ούτε η σταθερά, οπότε έχουμε την γνωστή **τετραγωνική μορφή**:

$$Q(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$$

**4.** $x^2+x^{3/4}y^{5/4}+y^2=x^2\left[1+(y/x)^{5/4}+(y/x)^2\right]$, ομογενής βαθμού $2$, αύξουσας απόδοσης.

**5.** $(x+y)^{-1}=\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(y/x)}=x^{-1}\left[1+(y/x)\right]^{-1}$, ομογενής βαθμού $-1$, σταθερής απόδοσης.

**6.** $100x^{3/4}y$, ομογενής βαθμού: $\kappa=3/4+1=7/4=1.75$, αύξουσας απόδοσης

▲

Ειδικότερα, μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι **ομογενής μηδενικού βαθμού:** $\kappa=0$**,** αν ικανοποιεί οιαδήποτε από τις παρακάτω 4 **ισοδύναμες** συνθήκες:

**1. Για κάθε** $t>0$**, ικανοποιεί:** $f(tx,ty)=f(x,y)$

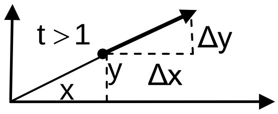
**2. Είναι συνάρτηση μόνο του λόγου** $y/x$**, δηλαδή είναι της μορφής:** $f(x,y)=H(y/x)$

**3. Έχει μηδενική ελαστικότητα κλίμακας:** $\varepsilon_r=\varepsilon_x+\varepsilon_y=0$

**4. Ικανοποιεί την εξίσωση Euler βαθμού** $0$**:** $xf_x+yf_y=0$

**Παρατήρηση.** Η ισοδυναμία των {1,2,3} αφορά την ισοδυναμία των παρακάτω πράξεων:

1. Πολλαπλασιασμός των $(x,y)$ με τον ίδιο συντελεστή $t>0$
2. Μεταβολή των $\{x,y\}$ κατά μήκος της αντίστοιχης ακτίνας (radius)
3. Μεταβολή των $\{x,y\}$ κατά το ίδιο ποσοστό: $\Delta y/y=\Delta x/x$ .




Ειδικότερα, πολλαπλασιασμός με συντελεστή $t>0$ αντιστοιχεί σε σχετική μεταβολή κατά:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{tx-x}{x}=t-1\Rightarrow \%\Delta x=100(t-1)\%.$$ Αυξάνει αν $t>1$, ελαττώνεται αν $t<1$

**Μικρές** σχετικές και ποσοστιαίες μεταβολές αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με συντελεστή $t\approx 1$

Παρατηρούμε επίσης ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι βαθμού $\kappa \Leftrightarrow$ η $f(x,y)/x$, ή ισοδύναμα η $f(x,y)/y$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, δηλαδή συνάρτηση μόνο του λόγου $y/x$

▲

**Παρατήρηση.** Οι παρακάτω είναι παραδείγματα ομογενών συναρτήσεων μηδενικού βαθμού:

$$\frac{y}{x},\ \frac{y+x}{x}=\frac{y}{x}+1,\ \left(\frac{x}{y}\right)^2,\ \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\frac{1+(y/x)}{1+(y/x)^2},\ \ln(2x+y)-\ln y=\ln\frac{2x+y}{y}=\ln(2\frac{x}{y}+1),\ \exp(x/y),$$

Για τον έλεγχο χρησιμοποιούμε συνήθως την ιδιότητα 1. Π.χ. :

$$\frac{x^2+xy}{x^{4/3}y^{2/3}}\Rightarrow\frac{(tx)^2+(tx)(ty)}{(tx)^{4/3}(ty)^{2/3}}=\frac{t^2x^2+t^2xy}{t^{4/3}x^{4/3}t^{2/3}y^{2/3}}=\frac{x^2+xy}{x^{4/3}y^{2/3}}$$, είναι ομογενής μηδενικού βαθμού

▲

## 6. Ιδιότητες ομογενών

Οι παρακάτω ιδιότητες των ομογενών συναρτήσεων είναι αντίστοιχες με τις γνωστές ιδιότητες των συναρτήσεων **δυνάμεων** μιας μεταβλητής:

1. *Ο γραμμικός συνδυασμός ομογενών του **ίδιου βαθμού** δίνει ομογενή του ίδιου βαθμού.*
2. *Πολλαπλασιάζοντας ομογενείς ο βαθμός τους προστίθεται.*
   *Ειδικά, πολλαπλασιάζοντας ομογενή με σταθερά ο βαθμός δεν μεταβάλλεται*
3. *Διαιρώντας ομογενείς ο βαθμός τους αφαιρείται.*
   *Ειδικά **αν διαιρέσουμε ομογενείς του ίδιου βαθμού βρίσκουμε ομογενή μηδενικού βαθμού.***
4. *Υψώνοντας ομογενή συνάρτηση σε δύναμη, πολλαπλασιάζεται ο βαθμός με τη δύναμη.*
5. *Το max/min ομογενών του ίδιου βαθμού, είναι ομογενής του ίδιου βαθμού.*
6. ***Αν μια συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού** $\kappa \neq 0$**, τότε οι πρώτες παράγωγοι είναι ομογενείς βαθμού** $\kappa - 1$.*

**Απόδειξη** της 6. Παραγωγίζοντας ως προς $x$, την εξίσωση Euler, βρίσκουμε:

$$(xf_x + yf_y)_x = (\kappa f)_x \Rightarrow f_x + xf_{xx} = yf_{xy} = \kappa f_x \Rightarrow xf_{xx} + yf_{xy} = (\kappa - 1)f_x$$

που είναι η εξίσωση Euler βαθμού $\kappa - 1$ για την $f_x$. Αντίστοιχα βρίσκουμε για την $f_y$.

**Παράδειγμα**

**1.** Η $g(x,y) = x^{\alpha}$ είναι ομογενής βαθμού $\alpha$, και η $h(x,y) = y^{\beta}$ είναι ομογενής βαθμού $\beta$. Το γινόμενό τους είναι ομογενής βαθμού $\alpha + \beta$: $f(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$.

**2.** Η $f(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ είναι ομογενής βαθμού $\alpha + \beta$. Οι παράγωγοι είναι ομογενείς βαθμού $\alpha + \beta - 1$:

$$f_x = \alpha x^{\alpha - 1}y^{\beta} \ , \ f_y = \beta x^{\alpha}y^{\beta - 1}$$

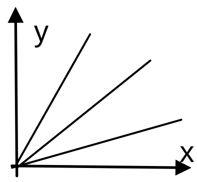
**3.** Η $f = 2x^{-2} + y^{-2}$ είναι ομογενής βαθμού -2.

Επομένως η $h = f^{-1/2} = (2x^{-2} + y^{-2})^{-1/2}$ είναι ομογενής βαθμού $-2(-1/2) = 1$

Πράγματι: $h(tx,ty) = (2(tx)^{-2} + (ty)^{-2})^{-1/2} = (2t^{-2}x^{-2} + t^{-2}y^{-2})^{-1/2} = t(2x^{-2} + y^{-2})^{-1/2}$

▲

## 7. Ισοσταθμικές ομογενών

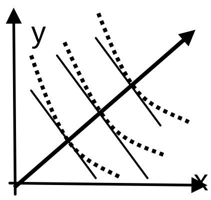



Όσον αφορά τις ισοσταθμικές, παρατηρούμε καταρχήν ότι οι ομογενείς συναρτήσεις μηδενικού βαθμού έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές με τη συνάρτηση

$$g(x,y) = y/x = c \Rightarrow y = cx,$$

δηλαδή **ακτίνες**, διότι είναι **εξαρτημένες** με αυτές.

Στη γενική περίπτωση ισχύει το παρακάτω, σε αντιστοιχία με τις ιδιότητες των γραμμικών ομογενών συναρτήσεων των οποίων οι ισοσταθμικές είναι παράλληλες ευθείες.




***Ισοσταθμικές ομογενών.*** *Οι διάφορες ισοσταθμικές μιας ομογενούς συνάρτησης είναι **παράλληλες** μεταξύ τους με την παρακάτω έννοια:*

**1.** *Αν πολλαπλασιάσουμε τα σημεία* $(x,y)$ *μιας ισοσταθμικής με συντελεστή* $t$ *τότε τα σημεία* $(tx,ty)$ *που προκύπτουν ανήκουν όλα στην ίδια ισοσταθμική.*

**2.** *Έχουν όλες την ίδια κλίση στα σημεία μιας ακτίνας.*

**Απόδειξη.**

1. Αν έχουμε μια ισοσταθμική: $f(x,y) = c$, και πολλαπλασιάσουμε τα σημεία της με τον συντελεστή $t$, τότε τα νέα σημεία θα ικανοποιούν την επίσης ισοσταθμική:

$$f(tx,ty) = t^{\kappa}f(x,y) = t^{\kappa}c$$

2. Η κλίση ισούται με τον ρυθμό υποκατάστασης και δίνεται από την πλεγμένη παράγωγο:

$$f(x,y) = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Αν η $f(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού $\kappa$, τότε οι μερικές παράγωγοι θα είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού $\kappa - 1$ και επομένως ο λόγος τους θα είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, δηλαδή θα εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y/x$, και επομένως θα είναι σταθερός κατά μήκος μιας ακτίνας.

▲

**Παρατήρηση.** Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα 2 των ισοσταθμικών, ο *ρυθμός υποκατάστασης που ορίζει μια ομογενής συνάρτηση εξαρτάται μόνο από τον λόγο των μεταβλητών:*

$$f(x,y)=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=h\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Παράδειγμα.** Η $f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ είναι ομογενής βαθμού $\alpha+\beta$. Οι μερικές παράγωγοι είναι ομογενείς βαθμού $\alpha+\beta-1$, και ο ρυθμός υποκατάστασης είναι πράγματι ομογενής μηδενικού βαθμού, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y/x$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}=-\frac{\alpha y}{\beta x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Έτσι, **στις συναρτήσεις C-D, η ικανότητα υποκατάστασης είναι αντιστρόφως ανάλογη των αρχικών μεγεθών. Όσο αυξάνει η συμμετοχή ενός συντελεστή τόσο μικραίνει η περαιτέρω ικανότητά του να υποκαθιστά τον άλλο. Ειδικά, καθώς το $x$ μεγαλώνει, το $dy/dx$ μικραίνει κατά το ίδιο ποσοστό.**

▲

# 8. Ομοθετικές

καλούνται οι συναρτήσεις $h$ που είναι μετασχηματισμοί ομογενών $f$:

$$h(x,y)=H(f(x,y))$$

Οι ισοσταθμικές τους είναι ίδιες με αυτές των αντίστοιχων ομογενών οπότε ισχύουν και όλες οι παραπάνω ιδιότητες που αφορούν ισοσταθμικές ομογενών.

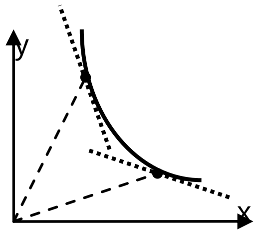
**Παράδειγμα.** Οι παρακάτω συναρτήσεις $h(x,y)$ είναι ομοθετικές χωρίς να είναι ομογενείς.

1. $f=2x+y \Rightarrow h=f+1=2x+y+1,\ h=f^2+f=(2x+y)^2+(2x+y)$
2. $f=x+y \Rightarrow h=\ln f=\ln(x+y),\ h=e^f+f=e^{x+y}+x+y$
3. $f=xy \Rightarrow h=1+xy,\ h=xy+\ln xy,\ h=xy+2(xy)^2$ ▲

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

# 9. Ελαστικότητα υποκατάστασης

Διαπιστώσαμε ότι αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής, τότε ο ρυθμός υποκατάστασης $dy/dx$ εξαρτάται μόνο από τον λόγο $y/x$, **ανεξάρτητα της ισοσταθμικής:**




$$f(x,y)=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την ελαστικότητά του $dy/dx$ ως προς $y/x$ ανεξάρτητα της συγκεκριμένης ισοσταθμικής:

$$E_{y/x}(dy/dx)=\frac{(y/x)h'(y/x)}{h(y/x)}$$

Μετράει πως εξαρτάται η κλίση της εφαπτομένης από την κλίση της ακτίνας καθώς μετακινούμαστε σε μια οιαδήποτε ισοσταθμική.

**Ελαστικότητα υποκατάστασης** καλείται το ανάστροφο του παραπάνω, δηλαδή μετράει την **ελαστικότητα του** $y/x$ **ως προς** $dy/dx$:

$$\sigma=E_{dy/dx}(y/x)=1/E_{y/x}(dy/dx)$$

Μετράει πως εξαρτάται η κλίση της ακτίνας $y/x$ από την κλίση της εφαπτομένης $dy/dx$ καθώς μετακινούμαστε σε μια ισοσταθμική. Μπορεί να οριστεί για οιαδήποτε συνάρτηση επιλέγοντας μια ισοσταθμική, αλλά *για ομογενείς συναρτήσεις είναι ανεξάρτητη της ισοσταθμικής*.

**Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης** (**CES**: Constant Elasticity of Substitution) καλούνται οι ομογενείς συναρτήσεις με σταθερή την παραπάνω ελαστικότητα, οπότε θα έχουμε δύναμη:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=h\left(\frac{y}{x}\right)=c\left(\frac{y}{x}\right)^s$$ , όπου: $\sigma=1/s$ είναι η σταθερή ελαστικότητα υποκατάστασης.

**Παρατήρηση.** Οι ομοθετικές που είναι μετασχηματισμοί συναρτήσεων CES, έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές και επομένως έχουν την παραπάνω ιδιότητα.

**Παράδειγμα.** Οι παρακάτω ομογενείς συναρτήσεις είναι CES

**1. C-D**: $f(x,y)=cx^{\alpha}y^{\beta} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)$, $E_{y/x}(dy/dx)=1 \Rightarrow \sigma=1/E_{y/x}(dy/dx)=1/1=1$

Η λογαριθμική C-D: $g(x,y)=\ln(x^{\alpha}y^{\beta})=\alpha\ln x+\beta\ln y$, θα έχει επίσης $\sigma=1$, ως ομοθετική της.

**2. CES:** $f(x,y)=\alpha x^{\rho}+\beta y^{\rho} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\alpha\rho x^{\rho-1}}{\beta\rho y^{\rho-1}}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho}$, $E_{y/x}(dy/dx)=1-\rho \Rightarrow \sigma=\frac{1}{1-\rho}$,

**3**. Για $\rho=1$, ο παραπάνω τύπος μας δίνει άπειρη ελαστικότητα. Πράγματι αυτές είναι οι **γραμμικές** ομογενείς συναρτήσεις $f(x,y)=\alpha x+\beta y$, και έχουν **άπειρη ελαστικότητα υποκατάστασης**, διότι ο ρυθμός υποκατάστασης $dy/dx$ παραμένει σταθερός καθώς ο λόγος $y/x$ μεταβάλλεται, οπότε:

$$E_{y/x}(dy/dx)=0 \Rightarrow \sigma=1/0\to\infty$$

**4.** Οι συναρτήσεις **Leontief** $\max/\min\{\alpha x,\beta y\}$ έχουν **μηδενική ελαστικότητα υποκατάστασης**, διότι όπως διαπιστώνουμε γραφικά, ο λόγος $y/x$ παραμένει σταθερός στην γωνία καθώς ο ρυθμός υποκατάστασης $dy/dx$ μεταβάλλεται

$$\sigma=E_{dy/dx}(y/x)=0$$

**Παράδειγμα.** Η $f(x,y)=x^2+xy$ είναι ομογενής βαθμού 2, αλλά δεν είναι CES:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{2x+y}{x}=2+\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow E_{y/x}(dy/dx)=\frac{(y/x)h'(y/x)}{h(y/x)}=\frac{\frac{y}{x}\left(2+\frac{y}{x}\right)'}{2+\frac{y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}}=\frac{1}{2(y/x)+1}$$

Η παραγώγιση γίνεται ως προς $y/x$. Η ελαστικότητα υποκατάστασης είναι το ανάστροφο του παραπάνω. ▲