IV.11 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (Α)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ
1.Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής ή με αντικατάσταση 2.Ολοκλήρωση κατά μέρη
ΕΙΔΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
3.Ολοκληρώματα ρητών 4.Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών 5.Αντίστροφες τριγωνομετρικές
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
6. Κριτήριο σύγκρισης 7. Αριθμητική ολοκλήρωση.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

Σε προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε το ορισμένο και το αόριστο **ολοκλήρωμα** και την σχέση τους με την **παράγουσα,** ως εξής:

Θεμελιώδες θεώρημα: *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα, τότε ισχύουν τα παρακάτω ισοδύναμα μεταξύ τους:*

I. $F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$ *δηλαδή:* $\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$, *για* $\{\alpha,\beta\}$ *στο διάστημα*

II. $F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x)+c$, *δηλαδή:* $\int F'(x)dx = F(x)+c$, *όπου* c*: αυθαίρετη σταθερά*

Δηλαδή, *το αόριστο ολοκλήρωμα είναι μια παράσταση της παράγουσας.* Από το παραπάνω προέκυψε και ο πίνακας των παρακάτω βασικών ολοκληρωμάτων, χωρίς τις σταθερές:

α) $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ $\quad \int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)$ για $\alpha \neq -1$

β) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$ $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$

γ) $\int e^{x}dx = e^{x}$ $\quad \int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$

δ) $\int \cos x dx = \sin x$ $\quad \int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x)$

ε) $\int \sin x dx = -\cos x$ $\quad \int f'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x)$

Αναφέραμε και την γραμμικότητα που ισχύει για τα ορισμένα και για τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)+\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)]dx, \qquad \int[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx$$

Τα ολοκληρώματα περισσότερο σύνθετων συναρτήσεων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τεχνικές, ορισμένες των οποίων θα αναπτύξουμε στη συνέχεια. Ο στόχος κάθε φορά είναι να καταλήξουμε σένα γνωστό ολοκλήρωμα, δηλαδή σε συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε την παράγουσα.

1. Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής (με αντικατάσταση)

Σε αντίθεση με την διαδικασία παραγώγισης δεν υπάρχουν απλοί κανόνες ολοκλήρωσης, παρότι κάθε κανόνας παραγώγισης μπορεί να αντιστραφεί σε κανόνα ολοκλήρωσης. Η *βασική τεχνική* προκύπτει από τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης, ως εξής. Θεωρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Αν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, αντικαθιστώντας **τυπικά** και το x και το dx:

$$\{x = x(z),\ dx = x'(z)dz\}$$

θα βρούμε ένα νέο ολοκλήρωμα ως προς z. Προκύπτει από τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης ότι αν μπορούμε να υπολογίσουμε το τελευταίο τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και το αρχικό, ως εξής:

$$\int f(x)dx = \int f(x(z))x'(z)dz = \int h(z)dz = H(z) = H(z(x)) = F(x)$$

όπου: $x = x(z) \Rightarrow z = z(x)$, αντιστροφή

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = H'(z(x)) = H'(z)z'(x) = h(z)z'(x) = [f(x)x'(z)]z'(x) = f(x) \quad \text{διότι: } z'(x) = 1/x'(z)$$

▲

Η παραπάνω διαδικασία αντικατάστασης:

$$f(x)dx \to h(z)dz$$

καλείται ολοκλήρωση με **αντικατάσταση** ή με **αλλαγή μεταβλητής.** Αποτελεί την πιο γενική τεχνική ολοκλήρωσης, και ορίζεται καταρχήν είτε στη μορφή $x = x(z)$ είτε αντίστροφα $z = z(x)$. Αν πρόκειται για **ορισμένο ολοκλήρωμα,** τότε μπορούμε είτε να το υπολογίσουμε αφού βρούμε πρώτα το αόριστο, δηλαδή την παράγουσα, όπως παραπάνω, είτε να υπολογίσουμε απευθείας το νέο ορισμένο που προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής, αντικαθιστώντας και τα **όρια** $\{\alpha,\beta\}$ του x με τα αντίστοιχα όρια $\{\gamma,\delta\}$ του z:

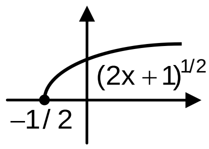
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta h(z)dz \text{ , όπου: } \gamma = z(\alpha),\ \delta = z(\beta)$$

Παρατήρηση. Για επαλήθευση αρκεί να ελέγξουμε ότι το τελικό που βρήκαμε είναι πράγματι η παράγουσά, δηλαδή ότι η παράγωγος του τελικού θα δώσει την αρχική συνάρτηση.

▲

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα, δίνοντας και τα γραφήματα:

1. $\int \sqrt{2x+1}dx$

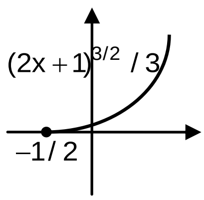


Λύση 1. Με τους τύπους:

$$\int (2x+1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{1/2}\, 2dx = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}(2x+1)^{3/2}] = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$$

Λύση 2. Με αντικατάσταση: $z = 2x+1 \Rightarrow \{x = z/2 - 1/2,\ x'(z) = 1/2\}$

$$\int (2x+1)^{1/2}dx = \int z^{1/2}\frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\frac{1}{3/2}z^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$$



Επαλήθευση: $\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]' = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(2x+1)^{1/2}2 = (2x+1)^{1/2}$

2. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αόριστο που βρήκαμε παραπάνω:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}9^{3/2} - \frac{1}{3}1^{3/2} = \frac{26}{3}$$

Εναλλακτικά μπορούμε μαζί με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής να αλλάξουμε και τα όρια:

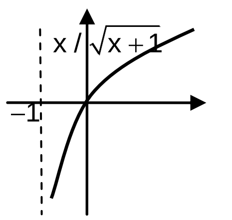
$$\int_{x=0}^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{z=1}^9 z^{1/2}dz = \frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}[9^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{26}{3}, \text{ όπου: } z = 2x+1 \Rightarrow \{z(0)=1,\ z(4)=9\}$$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ με αντικατάσταση: $z = x+1 \Rightarrow \{x = -1+z,\ dx = dz\}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{z-1}{\sqrt{z}}dz = \int\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)dz = \int z^{1/2}dz - \int z^{-1/2}dz$$

$$= \frac{1}{3/2}z^{3/2} - \frac{1}{1/2}z^{1/2} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2}$$

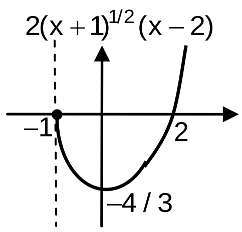
$$= \frac{2}{3}(x+1)^{1/2}[(x+1)-3] = \frac{2}{3}(x+1)^{1/2}(x-2)$$



Επαλήθευση: $\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2}\right]' = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x+1)^{1/2} - 2\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$

$$= (x+1)^{1/2} - (x+1)^{-1/2}$$

$$= (x+1)^{-1/2}[(x+1)-1] = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$



4. $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{1/2}(x-2)\Big|_{-1}^0 = \frac{2}{3}(-2) - 0 = -\frac{4}{3}$, γενικευμένο ολοκλήρωμα, συγκλίνει ▲

2. Ολοκλήρωση κατά μέρη (κατά παράγοντες)

Η επόμενη τεχνική ολοκλήρωσης βασίζεται στον κανόνα παραγώγισης γινομένου:

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$$

Ολοκληρώνοντας αμφότερα τα μέρη βρίσκουμε τον παρακάτω κανόνα **ολοκλήρωσης κατά μέρη,** για το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα αντίστοιχα**:**

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \quad \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

Για να το εφαρμόσουμε εκφράζουμε πρώτα την προς ολοκλήρωση συνάρτηση ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, στη μορφή:

$$f'(x)g(x)$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας την $f'(x)$ και παραγωγίζοντας την $g(x)$, βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$\{f'(x) \to f(x)\}, \quad \{g(x) \to g'(x)\}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση:

ολοκληρώνουμε την νέα συνάρτηση $f(x)g'(x)$ **αντί της αρχικής:** $f'(x)g(x)$**.**

Η βασική ιδέα είναι ότι η παραγώγιση της $g(x)$ θα δώσει απλούστερη συνάρτηση, ενώ η ολοκλήρωση της $f'(x)$ δεν θα δώσει πιο περίπλοκη συνάρτηση.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιείται στα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int x^n e^{\alpha x}dx, \int x^n \ln x dx, \int \cos(\alpha x)x^n dx, \int \sin(\alpha x)x^n dx,$$

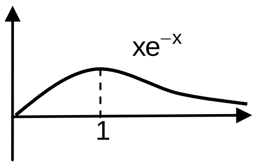
με: $f'(x) = \{e^x, x^n, \sin x, \cos x\}$, $g(x) = \{x^n, \ln x\}$

▲

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα, δίνοντας και τα γραφήματα:

1. $\int xe^{-x}dx = \int e^{-x}xdx$ με $\{f' = e^{-x}, g = x\} \Rightarrow \{f = -e^{-x}, g' = 1\}$

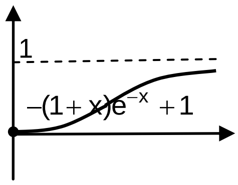
$$= -e^{-x}x - \int(-e^{-x})1dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$$



Στο γράφημα της παράγουσας πήραμε $c = 1$

2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}xdx$ με $\{f' = e^{-x}, g = x\} \Rightarrow \{f = -e^{-x}, g' = 1\}$

$$= -e^{-x}x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty(-e^{-x})1dx = -e^{-x}x\Big|_0^\infty - e^{-x}\Big|_0^\infty = (0-0)-(0-1) = 1$$



Γενικευμένο ολοκλήρωμα που συγκλίνει. Χρησιμοποιήσαμε και το παρακάτω όριο που υπολογίζεται με τον κανόνα l'Hopital:

$xe^{-x} \to 0$ όταν $x \to +\infty$, υπερισχύει το μηδενικό του εκθετικού.

3. $\int x^2e^{-x}dx = \int e^{-x}x^2dx$ με $\{f' = e^{-x}, g = x^2\} \Rightarrow \{f = -e^{-x}, g' = 2x\}$

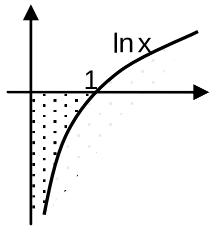
$$= -e^{-x}x^2 - \int(-e^{-x})2xdx = -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}xdx$$

$$= -x^2e^{-x} + 2[-(x+1)e^{-x}] + c = -(x^2+2x+2)e^{-x} + c$$

Εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη δύο φορές, χρησιμοποιώντας και το αποτέλεσμα στην **1**.

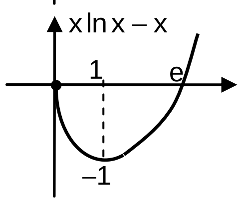
4. $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$ με $\{f' = 1, g = \ln x\} \Rightarrow \{f = x, g' = 1/x\}$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$



5. $\int_0^1 \ln x dx = \int_0^1 1 \cdot \ln x dx$ με $\{f' = 1, g = \ln x\} \Rightarrow \{f = x, g' = 1/x\}$

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x}dx = -0\ln 0 - (1-0) \to 0 - 1 = -1$$



Γενικευμένο ολοκλήρωμα που συγκλίνει. Υπολογίσαμε και το παρακάτω όριο με τον κανόνα l'Hopital:

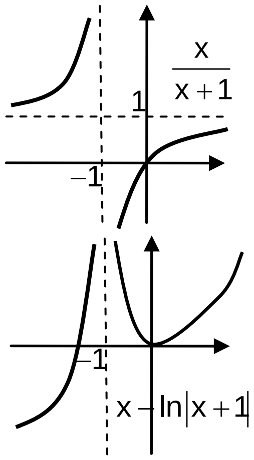
$x\ln x \to 0$ όταν $x \to 0$, υπερισχύει το μηδενικό της δύναμης.

▲

3.Ολοκληρώματα ρητών.

Για το ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με παρανομαστή πολυώνυμο πρώτου βαθμού, μπορούμε είτε να εκτελέσουμε πρώτα τη διαίρεση των πολυώνυμων, είτε να χρησιμοποιήσουμε αντικατάσταση.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα, δίνοντας και το γράφημα της αρχικής συνάρτησης καθώς και μιας παράγουσας:



1. $\int \frac{x}{x+1}dx$, με διαίρεση: $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x+1}dx = \int 1dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + c$$

2. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{x+1}dx$, με αντικατάσταση:

$$w = x+1 \Rightarrow x = w-1,\ x:\{-1,0\} \Rightarrow w:\{0,1\}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x+1}dx = \int_{0}^{1} \frac{w-1}{w}dw = \int_{0}^{1} 1dw - \int_{0}^{1} \frac{1}{w}dw = w\Big|_0^1 - \ln|w|\Big|_0^1 = 1 - [0 - (-\infty)] \to -\infty$$, δεν συγκλίνει

4.Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών.

Πολλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που αποτελούνται από γινόμενα τριγωνομετρικών, απλοποιούνται χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες. Έτσι, αρχίζοντας με τους τύπους

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

και προσθέτοντας ή αφαιρώντας κατά μέρη, βρίσκουμε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$2\sin(A)\cos(B) = \sin(A-B) + \sin(A+B),$$

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

Παράδειγμα. $\int \sin 2x \cos x dx \quad \Rightarrow \sin 2x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x-x) + \frac{1}{2}\sin(2x+x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$

Επομένως το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{6}\cos 3x$$

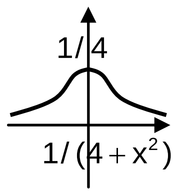
▲

5.Αντίστροφες τριγωνομετρικές.

Από τις παραγώγους των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων που εξετάσαμε στο κεφάλαιο **I.2**, βρίσκουμε τα παρακάτω χρήσιμα ολοκληρώματα:

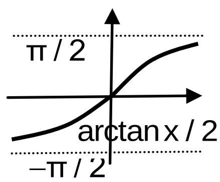
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin f(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x)$$



Παράδειγμα.

1. $\int \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx = \frac{2}{4}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$,



Εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$x = 2z \Rightarrow dx = 2dz$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6. Κριτήριο σύγκρισης.

Στο κεφάλαιο **Ι.1** ορίσαμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα για μη φραγμένες συναρτήσεις ή/και σε μη φραγμένα διαστήματα. Όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα συχνά μπορούμε να μελετήσουμε τις ιδιότητες σύγκλισης συγκρίνοντας με κάποιο γνωστό, ως εξής:

Κριτήριο σύγκρισης. *Θεωρούμε δύο θετικές συναρτήσεις με* $0 \le f(x) \le g(x)$.

- *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της* $g(x)$ *συγκλίνει, θα συγκλίνει και αυτό της* $f(x)$.
- *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της* $f(x)$ *δεν συγκλίνει τότε δεν θα συγκλίνει ούτε αυτό της* $g(x)$.

Η σύγκριση αφορά την συμπεριφορά των συναρτήσεων στο όριο. Δηλαδή, αντί να συγκρίνουμε τις συναρτήσεις σε ολόκληρο το διάστημα ολοκλήρωσης μπορούμε να τις συγκρίνουμε μόνο στο όριο, ως εξής:

Κριτήριο οριακής σύγκρισης. *Θεωρούμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα δύο θετικών συναρτήσεων, και υπολογίζουμε το όριο*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \text{όταν } x \to \begin{cases} \infty & \text{για μη φραγμένο διάστημα} \\ \alpha & \text{για μη φραγμένες συναρτήσεις στο } \alpha \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $0 < c < \infty \Rightarrow f(x) \sim g(x)$*: τα γενικευμένα ολοκληρώματα των δύο συναρτήσεων έχουν τις ίδιες ιδιότητες σύγκλισης.*

2. $c = 0 \Rightarrow f(x) \prec g(x)$*: αν συγκλίνει της (μεγαλύτερης)* g *τότε θα συγκλίνει και της* f *ή ισοδύναμα αν δεν συγκλίνει της (μικρότερης)* f *τότε δεν θα συγκλίνει ούτε της* g

3. $c = \infty \Rightarrow f(x) \succ g(x)$*: αν συγκλίνει της (μεγαλύτερης)* f *τότε θα συγκλίνει και της* g *ή ισοδύναμα αν δεν συγκλίνει της (μικρότερης)* g *δεν θα συγκλίνει ούτε της* f.

Παρατήρηση. Τα ίδια κριτήρια ισχύουν και για μη θετικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας την απόλυτη τιμή τους.

▲

Παράδειγμα

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει διότι για $x > 1$ έχουμε: $x < x^2 \Rightarrow \exp(-x^2) < \exp(-x)$

2. $\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-rx} dx$ συγκλίνει για $\{r > 0, \alpha > 0\}$,

διότι: $\dfrac{f}{g} = \dfrac{e^{-rx/2}}{x^{\alpha} e^{-rx}} \to \dfrac{e^{rx/2}}{x^{\alpha}} \to \infty$ όταν $x \to +\infty$, όπου η μεγαλύτερη $f = e^{-rx/2}$ συγκλίνει.

Για ακέραιες δυνάμεις: $\alpha = n = 1, 2, 3, ...$ μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας επανειλημμένα ολοκλήρωση κατά μέρη, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα.

▲

7. Αριθμητική ολοκλήρωση.

Αν γνωρίζουμε την παράγουσα μιας συνάρτησης τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα εμβαδά που δίνονται από τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να **εκτιμήσουμε αριθμητικά** ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, δηλαδή να βρούμε προσεγγιστικά το αντίστοιχο εμβαδό E, ως εξής:

Διαμερίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$, σε n ίσα υποδιαστήματα, με σημεία:

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

Υποθέτοντας για ευκολία τη συνάρτηση *αύξουσα*, τότε όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, το εμβαδό ΔE_i κάτω από την καμπύλη στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ θα έχει κάτω και πάνω φράγμα, ως εξής:

$$f_{i-1}\Delta x_i \le \Delta E_i \le f_i \Delta x_i \Rightarrow f_{i-1}h \le \Delta E_i \le f_i h$$,όπου: $f_i = f(x_i)$, $h = (\beta - \alpha)/n$

Το συνολικό εμβαδόν E προκύπτει αθροίζοντας τα επιμέρους εμβαδά, και θα βρίσκεται μεταξύ των φραγμάτων:

$$\underbrace{f_0 h + \ldots + f_{n-1}h}_{\underline{S}} \le \underbrace{\Delta E_1 + \ldots + \Delta E_n}_{E} \le \underbrace{f_1 h + \ldots + f_n h}_{\bar{S}}$$

Τα $\{\underline{S}, \bar{S}\}$ καλούνται **κάτω** και **πάνω άθροισμα Riemann** αντίστοιχα.

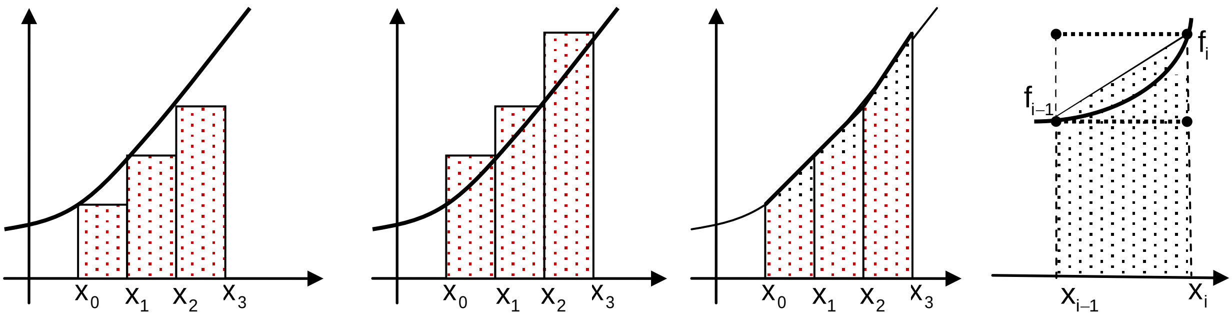
Κανόνας Τραπεζίου. *Ως εκτίμηση του ολοκληρώματος παίρνουμε το ενδιάμεσο των δύο φραγμάτων:*

$$E \simeq \frac{1}{2}(\underline{S} + \bar{S}) = \left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]h$$

οπότε το μέγιστο δυνατό σφάλμα είναι το μισό της διαφοράς, του κάτω από το πάνω φράγμα:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\bar{S} - \underline{S}) = \frac{1}{2}[f_n - f_0]h = \frac{[f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \alpha)}{2n}$$

Ο παραπάνω τύπος προσεγγιστικού υπολογισμού ολοκληρώματος, καλείται **κανόνας τραπεζίου,** διότι η εκτίμηση δίνεται από το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων που σχηματίζονται από τις χορδές, όπως στο παρακάτω σχήμα.



κάτω άθροισμα: $\underline{S}$ πάνω άθροισμα: $\bar{S}$ κανόνας τραπεζίου κανόνας τραπεζίου

Αθροίσματα Riemann

Παράδειγμα. Για το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0,1]$ θα υπολογίσουμε τα αθροίσματα Riemann που αντιστοιχούν σε διαμέριση με $n = 4$:

$$h = \frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_i = x_0 + ih = i/4 \\ f_i = x_i^2 = i^2/16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{S} = [f_1 + f_2 + f_3 + f_4]h = \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}\right)\frac{1}{4} = \frac{15}{32} \\ \underline{S} = [f_0 + f_1 + f_2 + f_3]h = \left(\frac{0}{16} + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right)\frac{41}{} = \frac{7}{32} \end{array}\right.$$

Επομένως έχουμε εκτίμηση:

$$E = \int_0^1 x^2 dx \approx \frac{\underline{S} + \bar{S}}{2} = \frac{22}{64} = 0.344$$ με $\sigma = \frac{\bar{S} - \underline{S}}{2} = 0.125$, δηλαδή: $E = 0.344 \pm 0.125$

Πράγματι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$E = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0.33\cdots$$, μέσα στα παραπάνω όρια: $[0.319,\ 0.469]$. ▲

Παρατήρηση. Όσον αφορά το σφάλμα στην εκτίμηση με τον κανόνα του τραπεζίου, έχουμε:

$$\sigma = \frac{[f(\beta) - f(\alpha)](\beta - \alpha)}{2n} \to 0, \textit{ όταν } n \to \infty$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με **οιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια** επιλέγοντας αρκετά λεπτή διαμέριση, δηλαδή αρκετά μεγάλο n. Π.χ. για να υπολογίσουμε τον λογάριθμο μέχρι κάποιο δεκαδικό αρκεί να υπολογίσουμε με την αντίστοιχη ακρίβεια το ολοκλήρωμα:

$$\ln x = \int_1^x x^{-1} dx$$

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε την τιμή $\ln 2$ με σφάλμα το πολύ 0.01, αρκεί να εκτιμήσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

χρησιμοποιώντας διαμέριση n που θα δώσει σφάλμα $\sigma \le 1/100$.

$$\left\{ f(x) = \frac{1}{x}, \alpha = 1, \beta = 2 \right\} \Rightarrow \sigma = \frac{(2-1)|1/2 - 1/1|}{2n} = \frac{1}{4n} \le \frac{1}{100} \Rightarrow n \ge 25$$

Επομένως αρκεί να πάρουμε διαμέριση του διαστήματος $[1,2]$ σε $n = 25$ υποδιαστήματα.

▲