IV.9 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-ΡΥΘΜΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ (Α)

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ
1.Ελαστικότητα 2.Ποσοσταία διαφορικά 3.Χαρακτηρισμός ελαστικότητας 4.Ελαστικότητα αντίστροφης 5.Ομογενείς συναρτήσεις 6.Λογισμός ρυθμών και διαφορικών 7.Λογαριθμική κλίμακα.
ΣΧΕΤΙΚΟΣ ΡΥΘΜΟΣ
8.Ρυθμός ανάπτυξης 9.Ημιλογαριθμική κλίμακα

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

1. Ελαστικότητα

Θεωρούμε δύο μεταβλητές $\{x, y\}$ που συνδέονται μεταξύ τους με κάποια εξίσωση, οπότε αντίστοιχα θα συνδέονται και οι **μεταβολές** $\{\Delta x, \Delta y\}$ από κάποιες αρχικές τιμές τους. Σε πολλές εφαρμογές, αντί των μεταβολών χρησιμοποιούμε τις **σχετικές μεταβολές,** ή ισοδύναμα τις **ποσοστιαίες μεταβολές:**

$$\left\{\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}\right\}, \ \left\{\%\Delta x = 100\frac{\Delta x}{x}, \%\Delta y = 100\frac{\Delta y}{y}\right\}$$

Στο **όριο** $\Delta x \to 0$, βρίσκουμε τα παρακάτω μεγέθη:

- Παίρνοντας τον λόγο των μεταβολών βρίσκουμε τον **(οριακό) ρυθμό μεταβολής του** y **ως προς** x**,** που είναι η γνωστή παράγωγο του y ως προς x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx} = y' \qquad \text{Παριστάνεται και με } m = D_x y$$

Μετράει την **μεταβολή του** y **για αύξηση του** x **κατά 1, οριακά.**

- Παίρνοντας τον λόγο των σχετικών ή ισοδύναμα των ποσοστιαίων μεταβολών, βρίσκουμε την **ελαστικότητα του** y **ως προς** x.

$$\frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} \to \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{xy'}{y} \quad \text{Παριστάνεται και με } \varepsilon = E_x y$$

Μετράει την **ποσοστιαία μεταβολή του** y **για αύξηση του** x **κατά 1%, οριακά**

Παρατήρηση. Αντίστοιχα ορίζονται τα παραπάνω μεγέθη και για συναρτήσεις στη μορφή $f(x)$:

$$m = Df(x) = f'(x), \qquad \varepsilon = Ef(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Παράδειγμα. $y = 1 + x^2 \Rightarrow m = y' = 2x$, $\varepsilon = xy'/y = 2x^2/1 + x^2$. Π.χ.

$$x = 2 \Rightarrow m(2) = 4,\ \varepsilon(2) = 8/5 = 1.6$$

Παρατήρηση. Διαπιστώνουμε ότι:
Οι **γραμμικές** $y = mx + c$, έχουν σταθερό ρυθμό ίσο με την κλίση m. Π.χ. $y = 2x + c \Rightarrow m = y' = 2$
Οι **δυνάμεις** $y = cx^{\varepsilon}$, έχουν σταθερή ελαστικότητα ίση με την δύναμη ε. Π.χ.

$$y = c\sqrt{x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{x}{c\sqrt{x}}\frac{c}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Παρατήρηση

1. Στην τομή με τον $x-$άξονα η ελαστικότητα είναι άπειρη, διότι έχουμε:

$$y \to 0 \Rightarrow E_x y = xy'/y \to \infty$$

εκτός αν μηδενίζεται και η παράγωγος: $y' = 0$, οπότε προκύπτει απροσδιοριστία. Παρατηρούμε επίσης ότι για $y \to 0$, η σχετική μεταβολή $\Delta y / y$ και η ποσοστιαία μεταβολή $\%\Delta y$ τείνουν στο άπειρο.

2. Στην τομή με τον $y-$άξονα η ελαστικότητα είναι μηδενική, διότι έχουμε:

$$x \to 0 \Rightarrow E_x y = xy'/y \to 0$$

εκτός αν απειρίζεται η παράγωγος: $y' \to \infty$, οπότε έχουμε απροσδιοριστία. Παρατηρούμε επίσης ότι για $x \to 0$, η σχετική μεταβολή $\Delta x / x$ και η ποσοστιαία μεταβολή $\%\Delta x$ τείνουν στο άπειρο.

▲

2.Σχετικά-ποσοστιαία διαφορικά

Σε αντιστοιχία με τα διαφορικά ορίζονται και τα **σχετικά διαφορικά** ή ισοδύναμα τα **ποσοστιαία διαφορικά** ως εκτιμήσεις των αντίστοιχων σχετικών ή ποσοστιαίων μεταβολών:

$$\left\{\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}\right\} \text{ ή } \left\{\%dx = 100\frac{dx}{x}, \%dy = 100\frac{dy}{y}\right\}$$

Από τον ορισμό τους διαπιστώνουμε ότι όπως η παράγωγος ισούται με το λόγο των διαφορικών, έτσι και **η ελαστικότητα ισούται με το λόγο των σχετικών ή ισοδύναμα των ποσοστιαίων διαφορικών,** οπότε έχουμε**:**

$$\left.\begin{array}{l} dy = mdx \\ \%dy = \varepsilon(\%dx) \end{array}\right\} \text{ όπου: } \left\{\begin{array}{l} m = D_x y = y' \\ \varepsilon = E_x y = xy'/y \end{array}\right.$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = 1 + x^2$, έχει παράγωγο και ελαστικότητα, αντίστοιχα:

$$m = y' = 2x, \quad \varepsilon = xy'/y = 2x^2/(1+x^2)$$

Π.χ. στο $(x = 2, y = 5)$, βρίσκουμε: $m(2) = 4 \Rightarrow (dy) = 4(dx)$, $\varepsilon(2) = 8/5 \Rightarrow (\%dy) = (8/5)(\%dx)$

▲

3. Χαρακτηρισμός ελαστικότητας

Στις παραγώγους μας ενδιαφέρει καταρχήν το **πρόσημο** που καθορίζει και τις ιδιότητες μονοτονίας της συνάρτησης. Στην ελαστικότητα μας ενδιαφέρει κυρίως το μέτρο της, δηλαδή η **απόλυτη ελαστικότητα:**

$$|\varepsilon|$$

Εξάλλου, για θετικές τιμές των μεταβλητών το πρόσημο της ελαστικότητας συμπίπτει με αυτό της παραγώγου, οπότε δεν μας δίνει κάτι καινούργιο. Σε κάθε περίπτωση, λέμε ότι η εξάρτηση του y από το x είναι:

ελαστική αν $|E_x y| > 1$, **ανελαστική** αν $|E_x y| < 1$, **ισοελαστική** αν $|E_x y| = 1$

Έτσι, είναι:

- ***ελαστική*** *αν μια ποσοστιαία μεταβολή του* x *προκαλεί γνήσια* ***μεγαλύτερη*** *ποσοστιαία μεταβολή του* y *σε απόλυτες τιμές, οριακά*
- ***ανελαστική*** *αν μια ποσοστιαία μεταβολή του* x *προκαλεί γνήσια* ***μικρότερη*** *ποσοστιαία μεταβολή του* y *σε απόλυτες τιμές, οριακά.*
- ***ισοελαστική*** *αν μια ποσοστιαία μεταβολή του* x *προκαλεί* ***ίση*** *ποσοστιαία μεταβολή του* y *σε απόλυτες τιμές, οριακά.*

Για μια εναλλακτική διατύπωση των παραπάνω χαρακτηρισμών θεωρούμε την εναλλακτική παράσταση της ελαστικότητας στη μορφή:

$$\varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{y'}{y/x} = \frac{\text{οριακός ρυθμός}}{\text{μέσος ρυθμός}} = \frac{\text{κλίση της εφαπτομένης}}{\text{κλίση της ακτίνας}}$$

Ο μέσος ρυθμός καλείται και *μέση τιμή*. Παίρνοντας τα απόλυτα μεγέθη, διαπιστώνουμε ότι στο τυχόν σημείο (x, y) της καμπύλης του γραφήματος, η **εξάρτηση του** y **από το** x είναι:

- ***ελαστική*** *αν ο οριακός ρυθμός είναι* ***μεγαλύτερος*** *από τον μέσο ρυθμό ως απόλυτα μεγέθη, δηλαδή η εφαπτόμενη είναι περισσότερο απότομη από την ακτίνα.*
- ***ανελαστική*** *αν ο οριακός ρυθμός είναι* ***μικρότερος*** *από τον μέσο ρυθμό ως απόλυτα μεγέθη, δηλαδή η εφαπτομένη είναι λιγότερο απότομη από την ακτίνα.*
- ***ισοελαστική*** *αν ο οριακός ρυθμός είναι* ***ίσος*** *με τον μέσο ρυθμό, ως απόλυτα μεγέθη, δηλαδή η εφαπτομένη είναι το ίδιο απότομη με την ακτίνα.*

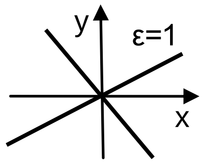
Παρατήρηση. Τα τμήματα ελαστικότητας και ανελαστικότητας χωρίζονται από τα σημεία ισοελαστικότητας:

$$|\varepsilon| = 1 \Rightarrow \varepsilon = \pm 1.$$

ή από ασυνέχειες της ελαστικότητας. Αν δεν υπάρχουν τότε έχουμε παντού ελαστικότητα ή παντού ανελαστικότητα.

Παρατήρηση

1. Οι **γραμμικές ομογενείς** $y = mx$**,** όπως στο γράφημα, είναι **παντού ισοελαστικές** με ελαστικότητα:



$$y = mx \Rightarrow \varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{xm}{mx} = 1$$

2. Οι **υπερβολικές** συναρτήσεις $y = mx^{-1}$**,** είναι **παντού ισοελαστικές.** με ελαστικότητα**:**

$$y = mx^{-1} \Rightarrow \varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{x(-mx^{-2}}{mx^{-1}} = -1$$

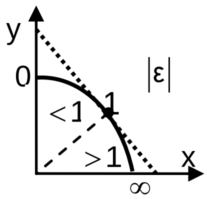
Παρατήρηση. Για τους υπολογισμούς, θέτουμε:

$|\varepsilon| = \varepsilon$, αν η ελαστικότητα είναι **θετική**, $|\varepsilon| = -\varepsilon$, αν η ελαστικότητα είναι **αρνητική**

▲

Παράδειγμα. Θα εξετάσουμε τις ελαστικότητες των παρακάτω συναρτήσεων στη **θετική περιοχή,** οπότε το πρόσημο της ελαστικότητας συμπίπτει με το πρόσημο της παραγώγου**.**

1. $y = 1 - x^2$ για $0 \le x \le 1 \Rightarrow y' = -2x \le 0$, φθίνουσα, με:



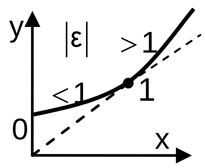
$$|\varepsilon| = -\varepsilon = -\frac{x(-2x)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$

ισοελαστική για $|\varepsilon| = \dfrac{2x^2}{1-x^2} = 1 \Rightarrow x = 1/\sqrt{3}$

ελαστική για $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow x > 1/\sqrt{3}$

ανελαστική για $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow x < 1/\sqrt{3}$

2. $y = e^x$ για $x \ge 0$, αύξουσα, με $|\varepsilon| = \varepsilon = xe^x / e^x = x \ge 0$



ισοελαστική για $|\varepsilon| = x = 1 \Rightarrow x = 1$

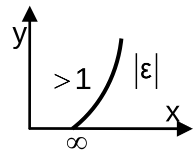
ελαστική για $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow x > 1$

ανελαστική για $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow x < 1$

3. $y = x^2 - 1$, για $x \ge 1 \Rightarrow y' = 2x > 0$, αύξουσα, με:

$$|\varepsilon| = \varepsilon = \frac{x2x}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}, \quad x \ge 1$$

ισοελαστική για $|\varepsilon| = 1 \Rightarrow x^2 = -1$, δεν έχει λύση.



ανελαστική για $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow x^2 < -1$, δεν έχει λύση

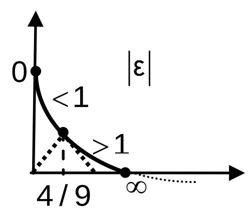
Επομένως είναι παντού ελαστική. Πράγματι:

ελαστική: $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow x^2 > -1$, ικανοποιείται για όλα τα $x \ge 1$

4. $y = 1 - x^{1/2}$

Το γράφημά της είναι η αρνητική ρίζα $-x^{1/2}$ ανεβασμένη κατά $+1$.

Σε κάθε περίπτωση είναι φθίνουσα: $y' = -x^{-1/2}/2 < 0$, με:



$$|\varepsilon| = -\varepsilon = -\frac{xy'}{y} = -\frac{x.(-x^{-1/2}/2)}{1-x^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1-x^{1/2}}$$

ισοελαστικότητα: $|\varepsilon| = 1 \Rightarrow x^{1/2} = 2(1-x^{1/2}) \Rightarrow 3x^{1/2} = 2 \Rightarrow x = 4/9$

ελαστικότητα: $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow x^{1/2} > 2(1-x^{1/2}) \Rightarrow 3x^{1/2} > 2 \Rightarrow x > 4/9$

ανελαστικότητα: $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow x < 4/9 \;\varepsilon > -1 \Rightarrow x < 4/9$

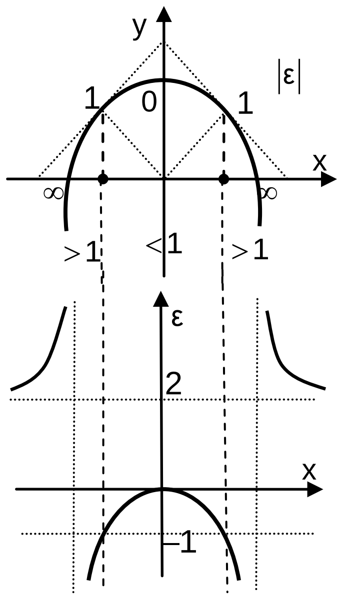
Παρατήρηση. Στο σημείο που κόβει τον $y-$άξονα έχουμε απροσδιοριστία, $x \cdot y' \to 0 \cdot (-\infty)$, η οποία όμως αίρεται: $x \cdot y' = x(-x^{-1/2}) = -x^{1/2} \to 0$, οπότε έχουμε και $\varepsilon = xy'/y \to 0/1 = 0$.

▲

Παράδειγμα. $y = 1 - x^2 \Rightarrow y' = -2x$

Θα εξετάσουμε και την ελαστικότητα μιας συνάρτησης σε ολόκληρο τον x – άξονα. Στο παραπλεύρως γράφημα της συνάρτησης δείχνουμε τα σημεία ισοελαστικότητας, καθώς και τα σημεία με μηδενική ή άπειρη ελαστικότητα. Γενικότερα, έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{xy'}{y} = \frac{x(-2x)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$



1. Ισοελαστικότητα:

$\varepsilon = 1 \Rightarrow 2x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -1$, δεν έχει λύση

$\varepsilon = -1 \Rightarrow 2x^2 = -x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$, δύο σημεία

2. Ανελαστικότητα εντός: $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$

3. Ελαστικότητα εκτός: $x < -1/\sqrt{3}$ ή $1/\sqrt{3} < x$

Στη δεύτερο σχήμα δίνουμε και το γράφημα της ελαστικότητας.

αρνητική στο διάστημα: $-1 < x < 1$,

θετική εκτός του διαστήματος: $x < -1$ ή $1 < x$

▲

4. Ελαστικότητα αντίστροφης

Η ελαστικότητα του x ως προς y είναι **ανάστροφη** της ελαστικότητας του y ως προς x, **στα ίδια** (x, y):

$$F(x,y) = c \Rightarrow E_y x = \frac{yx'(y)}{x} = \frac{y}{xy'(x)} = \frac{1}{E_x y} \quad \text{ή από τον ορισμό:} \quad E_y x = \frac{\%dx}{\%dy}, \; E_x y = \frac{\%dy}{\%dx},$$

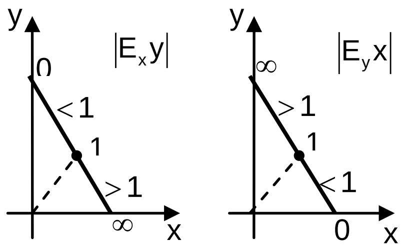
Επομένως, **μεταξύ των αντίστροφων συναρτήσεων** $\{y = y(x), x = x(y)\}$**, έχουμε ισοελαστικότητα στα ίδια σημεία, ενώ εναλλάσσονται τα τμήματα ελαστικότητας και ανελαστικότητας.**

Παράδειγμα. Η $y = x^2$ έχει $E_x y = 2$, ως δύναμη βαθμού 2, και είναι παντού ελαστική.

Οι αντίστροφες $x = \pm y^{1/2}$ έχουν $E_y x = 1/2$, ως δυνάμεις βαθμού $1/2$, και είναι ανελαστικές

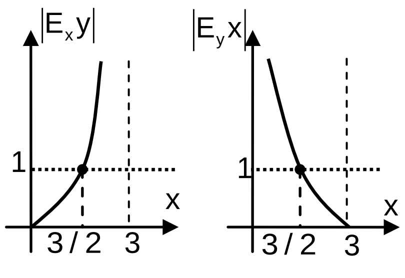
Παράδειγμα. Θεωρούμε τη γραμμική εξίσωση:

$$2x + y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 6, \; y' = -2 \;\; \Rightarrow E_x y = \dfrac{xy'}{y} = \dfrac{-2x}{-2x+6} = \dfrac{x}{x-3} \\ x = -0.5y + 3, \; x' = -0.5 \Rightarrow E_y x = \dfrac{yx'}{x} = \dfrac{-0.5y}{-0.5y+3} = \dfrac{y}{y-6} \end{cases}$$



Εναλλακτικά μπορούμε να την υπολογίσουμε ως αντίστροφη, οπότε θα έχουμε:

$$E_y x = (E_x y)^{-1} = \frac{x-3}{x}$$



Τα παραπάνω ισχύουν σε όλο το επίπεδο. Όσον αφορά την απόλυτη ελαστικότητα, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την περιοχή του επιπέδου, δηλαδή τα πρόσημα των $\{x, y, y'\}$. Ειδικά στο θετικό τεταρτημόριο, έχουμε:

$$|E_x y| = -E_x y = \frac{x}{3-x}, \quad |E_y x| = -E_y x = \frac{3-x}{x} = \frac{3}{x} - 1$$

Το σημείο ισοελαστικότητας είναι το ίδιο στις δύο περιπτώσεις:

$|E_x y| = |E_y x| = 1 \Rightarrow x = 3 - x \Rightarrow x = 3/2$, στο **ενδιάμεσο** σημείο του ευθύγραμμου τμήματος

Τα διαστήματα ανελαστικότητας και ελαστικότητας εναλλάσσονται. Υπενθυμίζουμε ότι **στο δεύτερο σχήμα η ελαστικότητα αφορά την μεταβλητή στον οριζόντιο άξονα ως προς την μεταβλητή στον κατακόρυφο.** ▲

Παρατήρηση. Αναφέρουμε ειδικά τις γραμμικές σχέσεις που εκφράζονται με οριζόντιες ή κατακόρυφες ευθείες. Λέμε ότι **η εξάρτηση του** y **από το** x είναι:

πλήρως ανελαστική αν $y = c \Rightarrow E_x y = 0$, οριζόντιο γράφημα

πλήρως ελαστική αν $x = c \Rightarrow E_x y = 1/E_y x = 1/0 = \infty$, κατακόρυφο γράφημα

Αντίστοιχη ορολογία χρησιμοποιούμε για την εξάρτηση του x από το y.

▲

5. Ομογενείς συναρτήσεις μιας μεταβλητής,

καλούνται οι συναρτήσεις δυνάμεις:

$$f(x) = cx^{\kappa}$$

Έχουν σταθερή ελαστικότητα ίση με τη δύναμη: $\varepsilon \equiv \kappa$, οπότε έχουμε και την σχέση:

$$\%df = \kappa(\%dx)$$

Η ελαστικότητα ομογενούς συνάρτησης καλείται και **βαθμός ομογένειας.** Ειδικά:

ομογενείς βαθμού 1 είναι οι *γραμμικές ομογενείς:* αx

ομογενείς βαθμού 0 είναι οι *σταθερές* συναρτήσεις*:* c

Λέμε ότι η ομογενής συνάρτηση έχει **απόδοση κλίμακας:**

αύξουσα αν $|\kappa| > 1$, **φθίνουσα** αν $|\kappa| < 1$, **σταθερή** αν $|\kappa| = 1$

Παράδειγμα. Η $y = 10x^{-3/2}$ είναι αύξουσας απόδοσης κλίμακας. Αν το x αυξηθεί κατά 1% από *οιαδήποτε αρχική τιμή*, το y θα μεταβληθεί οριακά κατά:

$$\%\Delta y \approx \%dy = \varepsilon(\%dx) = (-3/2)\%$$

Σε απόλυτες τιμές η ποσοστιαία μεταβολή του y είναι γνήσια μεγαλύτερη από του x, **οριακά**.

▲

6. Λογισμός ρυθμών και διαφορικών

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις της ίδιας μεταβλητής:

$$\{u = u(x), v = v(x)\}.$$

- Η **παράγωγος** έχει απλές ιδιότητες ως προς **γραμμικούς συνδυασμούς** των συναρτήσεων, όπου προκύπτει ως ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους παραγώγων:

$$D(\alpha u) = \alpha Du, \quad D(u+v) = Du + Dv, \quad D(u-v) = Du - Dv \qquad \Rightarrow D(\alpha u + \beta v) = \alpha Du + \beta Dv$$

- Η **ελαστικότητα** έχει απλές ιδιότητες ως προς το **γινόμενο** και ως προς το **πηλίκο** των συναρτήσεων, όπου προστίθενται και αφαιρούνται αντίστοιχα οι ελαστικότητες:

$$E(cu) = Eu, \quad E(uv) = Eu + Ev, \quad E(u/v) = Eu - Ev \qquad \Rightarrow E(cu^{\alpha}v^{\beta}) = \alpha Eu + \beta Ev$$

- Στη **σύνθεση** συναρτήσεων**,** και η παράγωγος και η ελαστικότητα προκύπτουν **αμφότερες** πολλαπλασιάζοντας τις επιμέρους παραγώγους και τις επιμέρους ελαστικότητες αντίστοιχα:

$$\{u = u(v),\ v = v(x)\} \Rightarrow u = u(x) \text{ με } \begin{cases} D_x u = (D_v u)(D_x v) \\ E_x u = (E_v u)(E_x v) \end{cases}$$

Απόδειξη. Για την ελαστικότητα του γινομένου βρίσκουμε:

$$E_x(uv) = \frac{x(uv)'}{uv} = \frac{x(u'v + uv')}{uv} = \frac{xu'}{u} + \frac{xv'}{v} = E_x u + E_x v$$

Αντίστοιχα για τα άλλα. Για την ελαστικότητα της σύνθεσης, βρίσκουμε:

$$E_x u = \frac{\%du}{\%dx} = \frac{\%du}{\%dv}\frac{\%dv}{\%dx} = (E_v u)(E_x v)$$

Παρατήρηση. Οι παραπάνω κανόνες για την ελαστικότητα μπορούν να ειδωθούν ως γενικεύσεις των αντίστοιχων κανόνων που αφορούν δυνάμεις, οι οποίες ως γνωστόν έχουν σταθερή ελαστικότητα:

$\left\{u = x^{\kappa},\ v = x^{\lambda}\right\} \Rightarrow \left\{cu = cx^{\kappa},\ uv = x^{\kappa}x^{\lambda} = x^{\kappa+\lambda},\ u/v = x^{\kappa}/x^{\lambda} = x^{\kappa-\lambda}\right\}$, για γινόμενο και πηλίκο

$\{u = v^{\kappa},\ v = x^{\lambda}\} \Rightarrow u = v^{\kappa} = (x^{\lambda})^{\kappa} = x^{\kappa\lambda}$, για σύνθεση

▲

Παρατήρηση. Αντίστοιχο λογισμό έχουν και τα **διαφορικά**, δηλαδή οι οριακές μεταβολές που χρησιμοποιούνται ως εκτιμήσεις των πραγματικών μεταβολών όταν αυτές είναι σχετικά μικρές :

$$d(\alpha u \pm \beta v) = \alpha du \pm \beta dv,$$

$$\%d(\alpha u) = \%du,\ \%d(uv) = \%du + \%dv,\ \%d(u/v) = \%du - \%dv$$

Σε αντίθεση, οι ίδιες οι μεταβολές και οι ποσοστιαίες μεταβολές έχουν πολύπλοκες ιδιότητες.
Απόδειξη. Για το ποσοστιαίο διαφορικό γινομένου, βρίσκουμε:

$$\%d(uv) = E_x(uv)(\%dx) = [E_x u + E_x v](\%dx) = E_x u(\%dx) + E_x v(\%dx) = \%du + \%dv$$

Αντίστοιχα για το γινόμενο με σταθερά και για το πηλίκο συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός με οιαδήποτε σταθερά δεν αλλάζει την ποσοστιαία μεταβολή

▲

7. Λογαριθμική κλίμακα

Θεωρούμε μια συνάρτηση $y = f(x)$. Ως γνωστό, σε κάθε σημείο της η **παράγωγος** παριστάνεται γραφικά με την κλίση της καμπύλης στο **καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων: Oxy. Αντίστοιχα η **ελαστικότητα** παριστάνεται με την κλίση της καμπύλης στο **λογαριθμικό** σύστημα συντεταγμένων Ouv, όπου:

$$\{u = \log|x|,\ v = \log|y|\} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{d\ln|y|}{d\ln|x|} = \frac{xy'}{y}$$

Δηλαδή στους δύο άξονες τοποθετούμε τους λογαρίθμους των μεταβλητών, αντί των ίδιων των μεταβλητών. Παρατηρούμε σχετικά ότι:

στη λογαριθμική κλίμακα οι δυνάμεις γίνονται γραμμικές με κλίση ίση με την ελαστικότητα:

$$y = cx^{\varepsilon} \Rightarrow |y| = |c||x|^{\varepsilon} \Rightarrow \log|y| = \log|c| + \varepsilon\log|x| \Rightarrow v = \varepsilon u + \log|c|$$

Απόδειξη. Οι κανόνες σύνθεσης και αντιστροφής, μας δίνουν ότι η ελαστικότητα στο λογαριθμικό σύστημα συμπίπτει για την παράγωγο στο καρτεσιανό:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = v'(y)y'(x)\frac{1}{u'(x)} = (\ln'|y|)y'\frac{1}{\ln'|x|} = \frac{1}{y}y'\frac{1}{1/x} = \frac{1}{y}y'x = E_x y$$

Το ίδιο ισχύει για οιαδήποτε λογαριθμική βάση

▲

ΣΧΕΤΙΚΟΣ ΡΥΘΜΟΣ

8. Ρυθμός ανάπτυξης

Θεωρούμε δύο μεταβλητές $\{x,y\}$ που συνδέονται μεταξύ τους με κάποια εξίσωση. Για τον ρυθμό μεταβολής και την ελαστικότητα πήραμε τον λόγο των μεταβολών και των σχετικών μεταβολών:

$$m = D_x y = \frac{dy}{dx}, \quad \varepsilon = E_x y = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{\% dy}{\% dx}$$

Γενικά, οι σχετικές μεταβολές είναι χρήσιμες στις εφαρμογές και διότι είναι ανεξάρτητες της μονάδας μέτρησης. Αλλά για ορισμένα μεγέθη, π.χ. τον χρόνο δεν μετρούμε σχετικές μεταβολές. Έτσι αν μια συνάρτηση μετράει την εξέλιξη ενός μεγέθους y στον χρόνο x, τότε αντί των παραπάνω παίρνουμε τον *λόγο της σχετικής μεταβολής του* y *προς την μεταβολή του* x. Στο όριο $\Delta x \to 0$, βρίσκουμε τον (οριακό) **σχετικό ρυθμό** μεταβολής του y ως προς x, με τον τύπο:

$$\frac{dy/y}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y} \qquad \text{Παριστάνεται και με } r = R_x y$$

Μετράει την **σχετική μεταβολή του** y **για μεταβολή του** x **κατά** 1**,** οριακά.

Παρατήρηση. Αν πολλαπλασιάσουμε με 100, βρίσκουμε τον (οριακό) **ποσοστιαίο ρυθμό** μεταβολής. Μετράει την **ποσοστιαία μεταβολή του** y **για μεταβολή του** x **κατά** 1**,** οριακά:

$$\frac{\% dy}{dx} = 100\frac{y'}{y}. \qquad \text{Παριστάνεται και με } \%r = \%R_x y = 100r$$

Στα οικονομικά καλείται **ρυθμός ανάπτυξης** του y**,** όταν αφορά ένα μέγεθος y το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο x. Ο σχετικός ρυθμός ορίζεται και για συναρτήσεις $f(x)$, στη μορφή:

$$r = Rf(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \%r = 100r = 100\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Διαπιστώσαμε προηγουμένως ότι οι γραμμικές συναρτήσεις έχουν σταθερό ρυθμό και οι ομογενείς έχουν σταθερή ελαστικότητα. Αντίστοιχα βρίσκουμε τώρα ότι:

- οι ***εκθετικές*** *συναρτήσεις έχουν σταθερό σχετικό επομένως και ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής*:
  $y = ce^{rx} \Rightarrow R_x y = y'/y \equiv r$, $\%r = 100r$

Παρατήρηση. Ένα μέγεθος y μεταβάλλεται στον χρόνο x:

- γραμμικά: $y = mx + c = mx + y(0)$, αν μεταβάλλεται με σταθερό **ρυθμό** m
- εκθετικά $y = c\exp(rx) = y(0)\exp(rx)$, αν μεταβάλλεται με σταθερό **σχετικό ρυθμό** r, ή ισοδύναμα σταθερό **ποσοστιαίο ρυθμό (ρυθμό ανάπτυξης)** $\%r = 100r$.

▲.

Παράδειγμα.

1. $y = ce^{-0.02x} \Rightarrow r = -0.02$, $\%r = -2\%$. Ελαττώνεται με ρυθμό 2% ετησίως αν το x παριστάνει έτη.

2. $y = 1 + x^2 \Rightarrow m = y' = 2x$, $\varepsilon = xy'/y = 2x^2/1 + x^2$, $r = y'/y = 2x/1 + x^2$

Π.χ. στο $x = 2$: $m(2) = 4$, $\varepsilon(2) = 8/5 = 1.6$, $r(2) = 4/5 = 0.8$, $\%r(2) = 100r = 80\%$

Επομένως οι μεταβολές και οι ποσοστιαίες μεταβολές συνδέονται οριακά με τις σχέσεις:

$$(dy) = 4(dx), \ (\%dy) = (8/5)(\%dx), \ (dy/y) = 0.8(dx), \ (\%dy) = 80(dx)$$

▲

Θεωρούμε τώρα τον λογισμό του σχετικού η ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής ως προς τις διάφορες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, και βρίσκουμε τα εξής:

- Ως προς τις **αλγεβρικές πράξεις** ο σχετικός ρυθμός έχει ίδιες ιδιότητες με την ελαστικότητα:
  $\{u = u(x),\ v = v(x)\} \Rightarrow R(\alpha u) = R(u)$, $R(uv) = Ru + Rv$, $R(u/v) = Ru - Rv$
  $$\Rightarrow R(cu^{\alpha}v^{\beta}) = \alpha Ru + \beta Rv$$
- Ως προς την **σύνθεση** συναρτήσεων**,** ο σχετικός ρυθμός της σύνθεσης βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας την ελαστικότητα με τον σχετικό ρυθμό των επιμέρους συναρτήσεων:
  $\{u = u(v),\ v = v(x)\} \Rightarrow u = u(x)$ με $R_x u = (E_v u)(R_x v)$

Απόδειξη. Για τον ποσοστιαίο ρυθμό του γινομένου συναρτήσεων, βρίσκουμε:

$$\%R_x(uv)=\frac{\%d(uv)}{dx}=\frac{\%du+\%dv}{dx}=\frac{\%du}{dx}+\frac{\%dv}{dx}=\%R_x u+\%R_x v$$

Για την σύνθεση, βρίσκουμε: $\%R_x u=\frac{\%du}{dx}=\frac{\%du}{\%dv}\frac{\%dv}{dx}=(E_v u)(\%R_x v)$ ▲

Παρατήρηση. Οι παραπάνω ιδιότητες είναι γενικεύσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων των εκθετικών συναρτήσεων:

$$\{u=e^{\kappa x},\ v=e^{\lambda x}\}\Rightarrow\{\alpha u=\alpha e^{\kappa x},\ uv=e^{\kappa x}e^{\lambda x}=e^{(\kappa+\lambda)x},\ u/v=e^{\kappa x}/e^{\lambda x}=e^{(\kappa-\lambda)x}\}$$, πράξεις

$$\{u=v^{\kappa},\ v=e^{\lambda x}\}\Rightarrow u=v^{\kappa}=(e^{\lambda x})^{\kappa}=e^{\kappa\lambda x}$$, σύνθεση

▲

9. Ημιλογαριθμική κλίμακα

Τέλος, όσον αφορά την γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι τα τρία μεγέθη που εξετάσαμε παριστάνονται γραφικά με την **κλίση της εφαπτομένης,** ως εξής:

1. Η παράγωγος στο **καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων: $\{x,y\}$.

2. Η ελαστικότητα στο **λογαριθμικό** σύστημα συντεταγμένων: $\{u=\log|x|,\ w=\log|y|\}$.

3. Ο σχετικός ρυθμός στο **ημιλογαριθμικό** σύστημα συντεταγμένων: $\{x, v=\ln|y|\}$

Όσον αφορά το 3, βρίσκουμε:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=(\ln'|y|)y'=\frac{y'}{y}.$$

Παράδειγμα. Έτσι στην ημιλογαριθμική κλίμακα οι εκθετικές γίνονται γραμμικές με κλίση r ίση με τον σχετικό ρυθμό:

$$y=ce^{rx}\Rightarrow|y|=|c|e^{rx}\Rightarrow\ln|y|=\ln|c|+rx\Rightarrow v=rx+\ln|c|$$

▲

Παρατήρηση. Η σχετική και η ποσοστιαία μεταβολή ενός μεγέθους (για μικρές μεταβολές) συμπίπτουν με τα αντίστοιχα της απόλυτης τιμής του:

$$\frac{d|y|}{|y|}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\%d|y|=\%dy$$

Επομένως η ελαστικότητα και ο σχετικός ρυθμός δεν μεταβάλλονται αν αντί των μεγεθών χρησιμοποιήσουμε τις απόλυτες τιμές τους:

$$E|u|=Eu,\ R|u|=Ru$$ ▲