III.8 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ LAGRANGE

1. Ισοτικός περιορισμός: $\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \,\|\, g(x,y)=c,\, D\}$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τα ακρότατα συναρτήσεων σε ολόκληρες περιοχές του πεδίου ορισμού . Εδώ θα ασχοληθούμε με τα ακρότατα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ μόνο στα σημεία μιας καμπύλης που βρίσκεται στην περιοχή του πεδίου ορισμού D. Θα περιγράφεται με μια εξίσωση:

$$g(x,y)=c$$

η οποία καλείται **εξίσωση περιορισμού.** Η ίδια η συνάρτηση $g(x,y)$ καλείται **συνάρτηση περιορισμού.** Η $f(x,y)$ που αποτελεί το **κριτήριο βελτιστοποίησης** καλείται **αντικειμενική συνάρτηση.** Τέτοια ακρότατα τα ονομάζουμε **περιορισμένα ακρότατα.** Για διάκριση, τα ακρότατα όπως προηγουμένως σε ολόκληρη περιοχή, ονομάζονται και **ελεύθερα ακρότατα.** Τα περιορισμένα ακρότατα διακρίνονται πάλι σε **εσωτερικά** που βρίσκονται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού D και σε **συνοριακά** που βρίσκονται στο σύνορο. Θα δώσουμε συνθήκες μόνο για τα εσωτερικά.

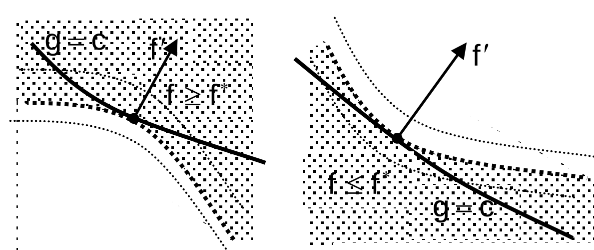
Παρατήρηση. Θεωρητικά μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση του περιορισμού ως προς την μια μεταβλητή την οποία και αντικαθιστούμε στη αντικειμενική συνάρτηση που τώρα θα γίνει συνάρτηση μόνο της μιας μεταβλητής. Δηλαδή, **το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης με δύο μεταβλητές και έναν ισοτικό περιορισμό είναι ισοδύναμο με πρόβλημα ελεύθερης βελτιστοποίησης με μια μεταβλητή.** Αλλά το ζητούμενο είναι να διατυπωθούν συνθήκες χρησιμοποιώντας τις **αρχικές συναρτήσεις.**

2. Περιορισμένη στασιμότητα

Διαπιστώνουμε γεωμετρικά ότι σένα εσωτερικό περιορισμένο ακρότατο **η καμπύλη του περιορισμού θα πρέπει να εφάπτεται της αντίστοιχης ισοσταθμικής της συνάρτησης,** έτσι ώστε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η **μαύρη** καμπύλη του περιορισμού: $g=c$, να βρίσκεται ολόκληρη στην αντίστοιχη:

1. πάνω σταθμική: $f \ge f^*$, αν πρόκειται για min

2. κάτω σταθμική: $f \le f^*$, αν πρόκειται για max



1. $\min\{f \,\|\, g=c\}$ 2. $\max\{f \,\|\, g=c\}$

Συμπεραίνουμε ότι:

Αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης για περιορισμένο εσωτερικό ακρότατο

$$\frac{f_x}{f_y}=\frac{g_x}{g_y} \quad \& \quad g=c$$

Δηλαδή, το περιορισμένο εσωτερικό ακρότατο θα είναι σημείο της καμπύλης περιορισμού στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση και η συνάρτηση του περιορισμού ορίζουν ***τον ίδιο ρυθμό υποκατάστασης.***

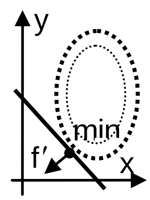
Απόδειξη. Αν η κλήση είναι διαφορετική, τότε η καμπύλη του περιορισμού **θα διασχίζει** την ισοσταθμική πηγαίνοντας από την κάτω σταθμική στην πάνω, οπότε η f θα έχει και μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές στα σημεία της, δηλαδή η τιμή της δεν θα είναι ακρότατη.

▲

Η παραπάνω συνθήκη 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους $\{x, y\}$ καλείται συνθήκη **δεσμευμένης** ή **περιορισμένης στασιμότητας** και οι λύσεις της **δεσμευμένες** ή **περιορισμένες στάσιμες.** Για διάκριση, αν δεν υπάρχουν ισοτικοί περιορισμοί όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι αντίστοιχες συνθήκες ονομάζονται συνθήκες **ελεύθερης στασιμότητας**. Συμπεραίνουμε ότι το περιορισμένο ακρότατο θα **ανήκει στη καμπύλη του περιορισμού** και θα είναι ένα από τα παρακάτω:

- ***Περιορισμένο στάσιμο,*** *στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού.*
- ***Στο σύνορο****, εφόσον η καμπύλη συναντάει το σύνορο του πεδίου ορισμού.*
- **Στο άπειρο,** *εφόσον η καμπύλη δεν είναι φραγμένη.*

Παράδειγμα. $\min\{f = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \mid g = x + y = 1\}$



Λύση1. Βρίσκουμε τα περιορισμένα στάσιμα:

$$\left.\begin{matrix} f_x / f_y = g_x / g_y \\ g = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (4x-4)/(2y-2) = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2/3 \\ y = 1/3 \end{matrix}$$

Δεν έχουμε σύνορο, οπότε το ελάχιστο είτε θα είναι στο παραπάνω περιορισμένο στάσιμο είτε στο άπειρο. Παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι τετραγωνική θετικά ορισμένη με ελάχιστο στο σημείο: $(x_0 = 1, y_0 = 1)$, και με ελλειπτικές ισοσταθμικές.

Από το γράφημα παραπλεύρως διαπιστώνουμε ότι η ευθεία του περιορισμού βρίσκεται στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης και επομένως το σημείο είναι ολικό ελάχιστο.

Λύση2. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με αντικατάσταση της μιας μεταβλητής από τον περιορισμό:

$$g = x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

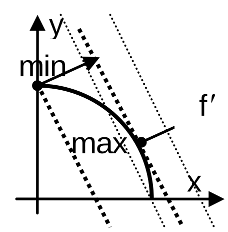
$$\Rightarrow \; f = 2x^2 + (1-x)^2 - 4x - 2(1-x) + 1 = 3x^2 - 4x$$

Προέκυψε κυρτή συνάρτηση μιας μεταβλητής με ολικό ελάχιστο στο στάσιμο που βρήκαμε και προηγουμένως:

$$f' = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2/3, \;\; y = 1 - x = 1/3$$

▲

Παράδειγμα. $\max/\min\{f = 2x + y \,\|\, g = x^2 + y^2 = 5, \;\; D: x \geq 0, \;\; y \geq 0\}$



Λύση 1. Είμαστε στη θετική περιοχή με σύνορο τους θετικούς ημιάξονες

α) Βρίσκουμε τα περιορισμένα στάσιμα:

$$\left.\begin{matrix} f_x / f_y = g_x / g_y = 0 \\ g = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2/1 = 2x/2y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (x = 2, \; y = 1) \\ (x = -2, y = -1) \end{matrix}\right.$$

Αποδεκτή μόνο η θετική λύση: $(x_1 = 2, y_1 = 1)$ με $f_1 = 2x_1 + y_1 = 5$

Το παραπάνω είναι εσωτερικό περιορισμένο στάσιμο και επομένως υποψήφιο.

β) Η καμπύλη είναι φραγμένη και έχει συνοριακά υποψήφια σημεία στους θετικούς ημιάξονες:

$\{x = 0, x^2 + y^2 = 5\} \Rightarrow x = 0, y = \pm\sqrt{5}$. Αποδεκτό το θετικό y: $(x_2 = 0, y_2 = \sqrt{5})$ με $f_2 = 2x_2 + y_2 = \sqrt{5}$

$\{y = 0, x^2 + y^2 = 5\} \Rightarrow y = 0, x = \pm\sqrt{5}$. Αποδεκτό το θετικό x: $(x_3 = \sqrt{5}, y_3 = 0)$ με $f_3 = 2x_3 + y_3 = 2\sqrt{5}$

Βρήκαμε τρία υποψήφια σημεία, με τιμές: $f_1 = 5$, $f_2 = \sqrt{5}$, $f_3 = 2\sqrt{5}$

Έχουμε μέγιστη τιμή $f_1 = 5$ στο περιορισμένο στάσιμο και ελάχιστη τιμή $f_2 = \sqrt{5}$ στο σύνορο με $x = 0$.

Παρατήρηση. Γραφικά, το ακρότατο βρίσκεται στην τομή της καμπύλης του περιορισμού και της ισοσταθμικής της αντικειμενικής συνάρτησης, με τη μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή, για μέγιστο ή ελάχιστο αντίστοιχα. Όπως φαίνεται και στο γράφημα, όπου οι τιμές της f αυξάνουν στην κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου: f', μέγιστο είναι το εσωτερικό περιορισμένο στάσιμο όπου η καμπύλη του περιορισμού εφάπτεται της ισοσταθμικής, ενώ ελάχιστο είναι το συνοριακό όπου και δεν εφάπτεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Στο άλλο συνοριακό η τιμή είναι ενδιάμεση.

Λύση2. Εναλλακτικά, αλλά πιο πολύπλοκο, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μια μεταβλητή από τον περιορισμό:

$$g = x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = (5 - x^2)^{1/2} \geq 0 \text{, με } 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$

οπότε λύνουμε το πρόβλημα ελεύθερης βελτιστοποίησης μιας μεταβλητής σε διάστημα:

$$\max/\min\{f = 2x + \sqrt{5 - x^2} \;\|\; 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f = 2x + \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow f' = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = \frac{2\sqrt{5 - x^2} - x}{2\sqrt{5 - x^2}}$$

Στάσιμο:

$2\sqrt{5 - x^2} - x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{5 - x^2} = x \Rightarrow 4(5 - x^2) = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$, δεχόμαστε μόνο το θετικό

Συγκρίνουμε τις τιμές στο στάσιμο και στα δύο σύνορα, και βρίσκουμε:

$\{x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{5}\}$ με τιμές: $\{f_1 = 5,\ f_2 = \sqrt{5},\ f_3 = 2\sqrt{5}\}$

Συμπεραίνουμε, όπως και προηγουμένως, ότι το μέγιστο βρίσκεται στο στάσιμο, και το ελάχιστο στο αριστερό σύνορο $(x_2 = 0, y_2 = \sqrt{5})$.

Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε και να είχαμε πρώτα χαρακτηρίσει την συνάρτηση και τα τρία σημεία: Η συνάρτηση είναι κοίλη διότι έχει αρνητική 2^{η} παράγωγο:

$$f' = 2 - x(5 - x^2)^{-1/2} \Rightarrow f'' = -(5 - x^2)^{-1/2} - x(5 - x^2)^{-3/2} / 2 = (5 - x^2)^{-3/2}[-(5 - x^2) - x]$$

$$f'' = [-(5 - x^2) - x] / (5 - x^2)^{3/2} < 0.$$

Επομένως, το στάσιμο είναι ολικό μέγιστο: $x = 2 \Rightarrow f(2) = 5$. Το ελάχιστο θα είναι στο σύνορο:

2.1 Αριστερό σύνορο: $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 2 > 0$, γνήσιο τοπικό ελάχιστο

2.2. Δεξιό σύνορο: $x = \sqrt{5} \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = -\sqrt{5} / +0 \to -\infty < 0$, γνήσιο τοπικό ελάχιστο με $f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

Αμφότερα είναι υποψήφια. Η ελάχιστη τιμή βρίσκεται στο αριστερό σύνορο:

$$f(0) = \sqrt{5} < f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

Θα μπορούμε και να συγκρίνουμε απευθείας τις τιμές στα δύο σύνορα, χωρίς να τα χαρακτηρίσουμε.

▲

3. Πολλαπλασιαστής Lagrange

Η συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας γράφεται και στις παρακάτω ισοδύναμες μορφές:

$$\left\{\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x = 0\right\} \text{ ή } \left\{\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}\right\}$$

Ο κοινός λόγος στην τρίτη μορφή καλείται **πολλαπλασιαστής Lagrange** της λύσης και έχει ιδιαίτερη σημασία στις εφαρμογές. Μάλιστα, παριστάνοντας τον με λ, μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας στη μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \lambda \\ g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = c \end{array}\right\} \text{ με λύση: } (x, y, \lambda)$$

Τώρα έχουμε 3 εξισώσεις με 3 αγνώστους, όπου μαζί με τη λύση βρίσκουμε και την τιμή του λ. Οι εξισώσεις σαυτή την μορφή ονομάζονται και **εξισώσεις Lagrange.** Δηλαδή, μπορούμε είτε να βρούμε πρώτα τη λύση (x, y) από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας και να υπολογίσουμε το λ εκ των υστέρων, ή να λύσουμε το παραπάνω σύστημα τριών εξισώσεων οπότε βρίσκουμε το λ ως μέρος της λύσης. Σαυτή την περίπτωση συνήθως λύνουμε τις δύο πρώτες εκφράζοντας τα $\{x, y\}$ ως συναρτήσεις του λ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην τρίτη που είναι και η εξίσωση του περιορισμού και υπολογίζουμε πρώτα το λ. Μετά πάμε πίσω και υπολογίζουμε τα $\{x, y\}$

Παράδειγμα. $\min\{f = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \,\|\, g = x + y = 1\}$

Λύση. Βρήκαμε παραπάνω το ακρότατο ως το περιορισμένο στάσιμο: $\{x = 2/3, y = 1/3\}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πολ/τή Lagrange από τη συνθήκη:

$\lambda = f_x / g_x = 4x - 4 = -4/3$ ή $\lambda = f_y / g_y = 2y - 2 = -4/3$, *τα δύο πρέπει να δίνουν την ίδια τιμή.*

Εναλλακτικά, μπορούμε να το βρούμε ως μέρος της λύσης των εξισώσεων Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 4x - 4 = \lambda \\ 2y - 2 = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda/4 + 1 \\ y = \lambda/2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2/3, y = 1/3 \\ x + y = 1 \Rightarrow \lambda/4 + 1 + \lambda/2 + 1 = 1 \Rightarrow \lambda = -4/3 \end{array}$$

▲

4. Συνάρτηση Lagrange

του προβλήματος περιορισμένου ακρότατου καλείται η παρακάτω συνάρτηση των τριών μεταβλητών $\{x, y, \lambda\}$:

$$\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \,\|\, g(x,y) = c, D\} \Rightarrow L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)]$$

Οι συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας στη μορφή των εξισώσεων Lagrange μπορούν τώρα να διατυπωθούν και ως συνθήκες (ελεύθερης) στασιμότητας της συνάρτησης Lagrange

$$\left.\begin{array}{l} L_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ L_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ L_\lambda = c - g \quad\;\; = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{εξισώσεις Lagrange}$$

Έτσι το ακρότατο θα ανήκει σε μια από τις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

1. Λύση Lagrange   2. Συνοριακό   3. Στο άπειρο

Θα δούμε παρακάτω ότι οι συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας στη παραπάνω μορφή των εξισώσεων Lagrange *γενικεύονται σε περισσότερες μεταβλητές*

5. Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange

Αν σένα πρόβλημα περιορισμένου ακρότατου *η τιμή* c *του περιορισμού δεν είναι συγκεκριμένη αλλά εμφανίζεται ως παράμετρος,* τότε η λύση και ειδικότερα η ακρότατη τιμή θα εκφράζονται ως συναρτήσεις αυτής της παραμέτρου:

$$\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \,\|\, g(x,y) = c\} \Rightarrow \{x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)\},\; f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$$

Σαυτή την περίπτωση:

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange ισούται με την παράγωγο της ακρότατης τιμής f^* *ως προς την τιμή του περιορισμού* c*:*

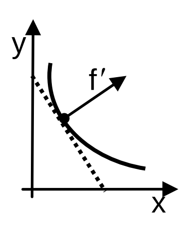
$$f^{*\prime}(c) = \lambda^*(c)$$

Στις εφαρμογές καλείται και **σκιώδης** ή **εσωτερική αξία** του περιορισμού, με την έννοια ότι αν η τιμή του περιορισμού αυξηθεί κατά μια μονάδα τότε η αντίστοιχη ακρότατη τιμή θα μεταβληθεί κατά λ, **οριακά.**

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε την ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange:

$\min\{f = \alpha x + \beta y \,\|\, g = xy = c,\; x \ge 0,\; y \ge 0\}$ με $\alpha > 0, \beta > 0, c > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha = \lambda y \\ \beta = \lambda x \\ xy = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \sqrt{c\beta/\alpha} \\ y = \sqrt{c\alpha/\beta} \\ \lambda = \sqrt{\alpha\beta/c} \end{array}\right\},\quad f^* = \alpha\frac{\sqrt{c\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \beta\frac{\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{\beta}} = 2\sqrt{c\alpha\beta}$$



Παραγωγίζοντας ως προς c, βρίσκουμε: $f^* = 2c^{1/2}\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow f_c^{*\prime} = \sqrt{\alpha\beta}/\sqrt{c} = \lambda(c)$

▲

Παρατήρηση. Κάθε εξίσωση μπορεί να εκφραστεί με το δεξιό μέρος μηδενικό, μεταφέροντας όλους τους όρους αριστερά. Έτσι και ο περιορισμός μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μορφή:

$$h(x,y) = g(x,y) - c = 0$$

Αντίστοιχα εκφράζονται το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης, και η συνάρτηση Lagrange:

$$\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \mid h(x,y) = 0, D\} \Rightarrow L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y)$$

Οι εξισώσεις Lagrange στη νέα μορφή είναι ισοδύναμες με τις προηγούμενες:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= f_x - \lambda h_x = 0 \\ L_y &= f_y - \lambda h_y = 0 \\ L_\lambda &= \quad -h \quad\;\; = 0 \end{aligned}\right\} \text{, διότι: } h_x = g_x,\ h_y = g_y,\ -h = c - g$$

▲

ΠΛΑΙΣΙΩΜΕΝΟΣ ΕΣΣΙΑΝΟΣ

Ο αναλυτικός χαρακτηρισμός ενός περιορισμένου στάσιμου ως ακρότατου γίνεται με τη χρήση παραγώγων $2^{ης}$ τάξης. Όπως και στα ελεύθερα στάσιμα εξετάζουμε πρώτα ένα ειδικότερο πρόβλημα περιορισμένου ακρότατου που αφορά τις τετραγωνικές μορφές.

6. Περιορισμένη τετραγωνική μορφή,

καλείται μια τετραγωνική μορφή περιορισμένη στα σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0,0)$. Θα την παριστάνουμε με:

$$\tilde{Q}:\{Q=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2 \mid E=px+qy=0\}$$

Για διάκριση, οι τετραγωνικές μορφές χωρίς περιορισμούς καλούνται και **ελεύθερες τετραγωνικές μορφές.** Το μηδενικό σημείο ικανοποιεί τον περιορισμό, με μηδενική την τιμή της συνάρτησης:

$$Q(0,0)=0,$$

Για να το χαρακτηρίσουμε ως περιορισμένο ακρότατο αρκεί να βρούμε τα πρόσημα της τετραγωνικής μορφής στα μη μηδενικά σημεία της ευθείας του περιορισμού. Αντικαθιστώντας από τον περιορισμό διαπιστώνουμε ότι είναι ισοδύναμη με την ελεύθερη τετραγωνική μορφή μιας μεταβλητής:

$$y=-\frac{p}{q}x \Rightarrow \tilde{Q}=\alpha x^2-2\beta x\frac{p}{q}x+\gamma\frac{p^2}{q^2}x^2=\frac{\alpha q^2-2\beta pq+\gamma p^2}{q^2}x^2$$

Ο όρος στον αριθμητή είναι το **αρνητικό** της παρακάτω **πλαισιωμένης συμμετρικής ορίζουσας:**

$$\tilde{\Delta}=\left|\begin{array}{cc:c} \alpha & \beta & -p \\ \beta & \gamma & -q \\ \hdashline -p & -q & 0 \end{array}\right|=-\alpha q^2+2\beta pq-\gamma p^2 \Rightarrow \qquad \tilde{Q}=-\frac{\tilde{\Delta}}{q^2}x^2$$

Συμπεραίνουμε ότι **το πρόσημο της περιορισμένης τετραγωνικής μορφής είναι το αντίθετο της παραπάνω ορίζουσας.** Χρησιμοποιούμε την παρακάτω ορολογία, και αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

1α. $\tilde{\Delta}<0 \Leftrightarrow \tilde{Q}>0$: **θετικά ορισμένη,** τιμές θετικές γνήσια, **γνήσιο ελάχιστο**

1β. $\tilde{\Delta}\le 0 \Leftrightarrow \tilde{Q}\ge 0$: **θετικά ημιορισμένη,** τιμές θετικές ή μηδενικές, **ελάχιστο**.

2α. $\tilde{\Delta}>0 \Leftrightarrow \tilde{Q}<0$: **αρνητικά ορισμένη**, τιμές αρνητικές γνήσια, **γνήσιο μέγιστο**.

2β. $\tilde{\Delta}\ge 0 \Leftrightarrow \tilde{Q}\le 0$: **αρνητικά ημιορισμένη**, τιμές αρνητικές ή μηδενικές, **μέγιστο**.

Παρατήρηση.

1.Όπως διαπιστώσαμε, η παραπάνω περιορισμένη τετραγωνική μορφή είναι ισοδύναμη με ελεύθερη τετραγωνική μορφή **μιας** μεταβλητής, και έτσι δεν εμφανίζεται η περίπτωση **3** της **αοριστίας** με τιμές και θετικές και αρνητικές, γνήσια. Εμφανίζεται σε προβλήματα με περισσότερες μεταβλητές.

2.Αν η αρχική ελεύθερη τετραγωνική μορφή είναι ορισμένη, θετικά ή αρνητικά, τότε βέβαια το ίδιο θα ισχύει και για την περιορισμένη. Η διαφοροποίηση εμφανίζεται όταν η ελεύθερη είναι ημιορισμένη ή αόριστη, οπότε ο χαρακτηρισμός θα εξαρτάται από την συγκεκριμένη ευθεία του περιορισμού

▲

Παράδειγμα. $\tilde{Q}:\{Q=xy \,\|\, E=x+y=0\}$

$$\tilde{\Delta}=\begin{vmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-1/2(-1)-1(-1/2)=1>0$$, επομένως αρνητικά ορισμένη

Η αρχική ελεύθερη: $Q=xy$ είναι αόριστη, ενώ η περιορισμένη είναι αρνητικά ορισμένη, διότι η ευθεία του περιορισμού βρίσκεται στα τεταρτημόρια 2 και 4 όπου οι τιμές της ελεύθερης είναι αρνητικές. Εξάλλου, αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε:

$$y=-x \Rightarrow \tilde{Q}=xy=x(-x)=-x^2<0, \text{ για } x\neq 0$$ ▲

Παράδειγμα. $\tilde{Q}:\{Q = x^2 + y^2 \mid E = x + y = 0\}$

Εδώ η ελεύθερη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Επομένως το ίδιο θα ισχύει για την περιορισμένη Πράγματι, το παραπάνω κριτήριο μας δίνει αρνητική πλαισιωμένη ορίζουσα:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(1) = -2 < 0\,,$$

Επομένως η περιορισμένη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Εξάλλου, αντικαθιστώντας από τον περιορισμό βρίσκουμε:

$$y = -x \Rightarrow \tilde{Q} = x^2 + y^2 = x^2 + (-x)^2 = 2x^2 > 0\,, \text{ για } x \neq 0$$

▲

7. Χαρακτηρισμός πλαισιωμένων συμμετρικών πινάκων

Θεωρούμε την παρακάτω αντιστοιχία μεταξύ περιορισμένων τετραγωνικών μορφών δύο μεταβλητών και **πλαισιωμένων συμμετρικών πινάκων** 2×2**,** και μεταφέρουμε τον χαρακτηρισμό των περιορισμένων τετραγωνικών μορφών στους πλαισιωμένους συμμετρικούς πίνακες:

$$\tilde{Q}:\{Q = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \parallel E = px + qy = 0\} \Leftrightarrow \tilde{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -p \\ \beta & \gamma & -q \\ -p & -q & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $\tilde{\Delta} = |\tilde{S}| = -\alpha q^2 + 2\beta pq - \gamma p^2$ είναι η **πλαισιωμένη συμμετρική ορίζουσα.**

Ο **πλαισιωμένος συμμετρικός πίνακας** χαρακτηρίζεται ως:

1α. Θετικά ορισμένος......... $\tilde{S} > 0 \Leftrightarrow \tilde{Q} > 0$ **:** $\tilde{\Delta} < 0$

1β. Θετικά ημιορισμένος...... $\tilde{S} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{Q} \geq 0$ **:** $\tilde{\Delta} \leq 0$

2α. Αρνητικά ορισμένος....... $\tilde{S} < 0 \Leftrightarrow \tilde{Q} < 0$ **:** $\tilde{\Delta} > 0$

2β. Αρνητικά ημιορισμένος $\tilde{S} \leq 0 \Leftrightarrow \tilde{Q} \leq 0$ **:** $\tilde{\Delta} \geq 0$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η περίπτωση 3 της αοριστίας εμφανίζεται σε πλαισιωμένους συμμετρικούς πίνακες μεγαλύτερης διάστασης.

8. Συνθήκες για περιορισμένα τοπικά ακρότατα.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα χαρακτηρισμού των περιορισμένων στάσιμων μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Το απλούστερο τέτοιο πρόβλημα αφορά την παραπάνω περιορισμένη τετραγωνική μορφή. Το μηδενικό σημείο είναι περιορισμένο στάσιμο με μηδενική τιμή της συνάρτησης, οπότε ο χαρακτηρισμός του ως ακρότατου αφορά τα πρόσημα των τιμών της τετραγωνικής μορφής στα μη μηδενικά σημεία του περιορισμού, όπως εξετάσαμε παραπάνω. Για τον χαρακτηρισμό στη γενική περίπτωση θεωρούμε ένα πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης και την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange:

$$\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \parallel g(x,y) = c\} \Rightarrow L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)]\,,$$

Ορίζουμε τον **πλαισιωμένο εσσιανό πίνακα Lagrange** και την αντίστοιχη **πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα Lagrange** του προβλήματος:

$$\tilde{H}_L = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda} \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & -g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & -g_y \\ -g_x & -g_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} & -g_x \\ f_{yx} - \lambda g_{yx} & f_{yy} - \lambda g_{yy} & -g_y \\ -g_x & -g_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_L = |\tilde{H}_L| = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2$$

Παρατήρηση. Ο πλαισιωμένος εσσιανός πίνακας Lagrange μπορεί να παρασταθεί με οιαδήποτε από τις παρακάτω μορφές. Προκύπτει από τις ιδιότητες των οριζουσών ότι έχουν την ίδια ορίζουσα

$$\tilde{H}_L = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & -g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & -g_y \\ -g_x & -g_y & 0 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ -g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}$$

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για περιορισμένο τοπικό ακρότατο.

Ένα εσωτερικό περιορισμένο ακρότατο είναι καταρχήν περιορισμένο στάσιμο, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Lagrange. Επιπλέον:

1. *Αν είναι **ελάχιστο** (τοπικό ή ολικό)**,** τότε ο πλαισιωμένος πίνακας Lagrange είναι **θετικά ημιορισμένος,** δηλαδή έχει αρνητική ορίζουσα**:***

$$\tilde{H}_L \ge 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_L = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2 \le 0$$

*Αντίστροφα, είναι **γνήσιο περιορισμένο τοπικό ελάχιστο** αν είναι **θετικά ορισμένος,** δηλαδή αν έχει γνήσια αρνητική ορίζουσα:*

$$\tilde{H}_L > 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_L = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2 < 0$$

2. *Αν είναι **μέγιστο** (τοπικό ή ολικό) τότε ο πλαισιωμένος πίνακας Lagrange είναι **αρνητικά ημιορισμένος,** δηλαδή έχει θετική ορίζουσα:*

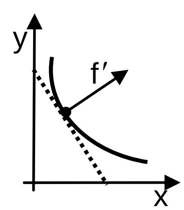
$$\tilde{H}_L \le 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_L = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2 \ge 0$$

*Αντίστροφα, είναι **γνήσιο περιορισμένο τοπικό μέγιστο** αν είναι **αρνητικά ορισμένος,** δηλαδή αν έχει γνήσια θετική ορίζουσα:*

$$\tilde{H}_L < 0 \Rightarrow \tilde{\Delta}_L = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2 > 0$$

Παράδειγμα. $\min\{f = 4x + y \,\|\, g = xy = \alpha,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ με $\alpha > 0$

Με $L = 4x + y + \lambda(\alpha - xy)$, οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν:



$$\left.\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4 &= \lambda y \\ 1 &= \lambda x \\ xy &= \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^* &= \sqrt{\alpha}/2 \\ y^* &= 2\sqrt{\alpha} \\ \lambda &= 2/\sqrt{\alpha} \end{aligned}\right\}$$, αποδεκτή μόνο η θετική λύση

Υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα Lagrange στο παραπάνω σημείο:

$$g = xy \Rightarrow \{g_x = y,\ g_y = x\},$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 4 - \lambda y \\ L_y &= 1 - \lambda x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} L_{xx} &= 0,\ L_{xy} = -\lambda \\ L_{yx} &= -\lambda,\ L_{yy} = 0 \end{aligned}\right., \quad \tilde{\Delta}_L = -L_{xx}g_y^2 + 2L_{xy}g_xg_y - L_{yy}g_x^2 = -2\lambda x^* y^* < 0$$

Είναι γνήσια αρνητική, οπότε ο πλαισιωμένος εσσιανός πίνακας Lagrange είναι θετικά ορισμένος και το σημείο είναι γνήσιο τοπικό περιορισμένο ελάχιστο:

$$(x^* = \sqrt{\alpha}/2,\ y^* = 2\sqrt{\alpha},\ \lambda = 2/\sqrt{\alpha}) \Rightarrow f^* = 4x^* + y^* = 4\sqrt{\alpha}$$

Παρατήρηση. Στην πραγματικότητα είναι ολικό περιορισμένο ελάχιστο διότι ο περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην πάνω σταθμική περιοχή της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως φαίνεται στο παραπάνω γράφημα, και όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με αντικατάσταση από τον περιορισμό:

$$\{f = 4x + y,\ xy = \alpha,\ x \ge 0,\ y \ge 0\} \Rightarrow f = 4x + \alpha/x \quad \text{με} \quad x > 0,\ \alpha > 0$$

Είναι κυρτή συνάρτηση, ως άθροισμα κυρτών, οπότε το στάσιμο είναι ολικό ελάχιστο:

$$f = 4x + \alpha/x \Rightarrow f' = 4 - \alpha/x^2 = 0 \Rightarrow x^* = \alpha/\sqrt{2}$$

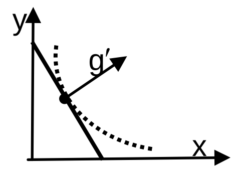
▲

Παράδειγμα. $\max\{g = xy \| \ f = 4x + y = \beta,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ με $\beta > 0$

Θα παραστήσουμε την συνάρτηση Lagrange με:

$M = xy + \mu[\beta - 4x - y]$, όπου μ είναι τώρα ο πολλαπλασιαστής.

Οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν:



$$\left.\begin{array}{l} M_x = y - 4\mu = 0 \\ M_y = x - \mu = 0 \\ M_\mu = \beta - 4x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^* = \beta/8 \\ y^* = \beta/2 \\ \mu = \beta/8 \end{array}\right\},$$

Υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα Lagrange στο παραπάνω σημείο:

$$f = 4x + y \Rightarrow \{f_x = 4,\ f_y = 1\},\quad \left.\begin{array}{l} M_x = y - 4\mu \\ M_y = x - \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M_{xx} = 0,\ M_{xy} = 1 \\ M_{yx} = 1,\ M_{yy} = 0 \end{array}\right.,$$

$$\tilde{\Delta}_M = -M_{xx} f_y^2 + 2M_{xy} f_x f_y - M_{yy} f_x^2 = -0 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot 2^2 = 8 > 0$$

Είναι γνήσια θετική, οπότε ο πλαισιωμένος εσσιανός πίνακας Lagrange είναι αρνητικά ορισμένος και επομένως το σημείο είναι γνήσιο περιορισμένο τοπικό μέγιστο:

$$(x^* = \beta/8,\ y^* = \beta/2,\ \mu = \beta/8) \Rightarrow g^* = x^* y^* = \beta^2/16$$

Στην πραγματικότητα είναι περιορισμένο ολικό μέγιστο, όπως διαπιστώνουμε γραφικά στο παραπάνω γράφημα, διότι ο περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην κάτω σταθμική περιοχή της αντικειμενικής συνάρτησης. Το ίδιο θα διαπιστώσουμε αν λύσουμε το πρόβλημα με αντικατάσταση.

Παρατήρηση. Για τα προηγούμενα δύο προβλήματα λέμε ότι είναι **συμμετρικά** μεταξύ τους, με την έννοια ότι η αντικειμενική συνάρτηση του ενός συμπίπτει με την συνάρτηση περιορισμού του άλλου.

9. Περισσότερες μεταβλητές και περιορισμοί

Η παραπάνω θεωρία γενικεύεται σε περισσότερες μεταβλητές και περιορισμούς χρησιμοποιώντας την διατύπωση μέσω της συνάρτησης Lagrange. Παρατηρούμε σχετικά ότι **ένα πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης με n μεταβλητές μπορεί να έχει μέχρι $n-1$ περιορισμούς, ώστε να υπάρχουν ελεύθερες (ανεξάρτητες) μεταβλητές.** Π.χ. με $n = 3$ μεταβλητές μπορεί να έχουμε 1 ή 2 περιορισμούς.

- **Περιορισμένα ακρότατα με 3 μεταβλητές και 1 περιορισμό:**

  $\max/\min\{f(x,y,z) \| g(x,y,z) = c,\ D\}$

Λύνοντας την εξίσωση του περιορισμού ως προς την μια μεταβλητή και αντικαθιστώντας βρίσκουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελεύθερης βελτιστοποίησης με 2 μεταβλητές. Μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange στην μορφή:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda[c - g(x,y,z)]$$

Η λύση θα ικανοποιεί τις συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας στη μορφή των παρακάτω 4 εξισώσεων Lagrange με 4 αγνώστους $\{x,y,z,\lambda\}$:

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 0 \Rightarrow f_x = \lambda g_x \\ L_y = 0 \Rightarrow f_y = \lambda g_y \\ L_z = 0 \Rightarrow f_z = \lambda g_z \\ L_\lambda = 0 \Rightarrow g = c \end{array}\right\} \Rightarrow \{x^*, y^*, z^*, \lambda\},\ f^*$$

Αν η τιμή του περιορισμού εμφανίζεται ως παράμετρος c, τότε η λύση και ειδικότερα η ακρότατη τιμή f^* θα εκφράζονται ως συναρτήσεις αυτής της παραμέτρου. Σαυτή την περίπτωση *ο πολλαπλασιαστής Lagrange ισούται με την παράγωγο της ακρότατης τιμής f^* ως προς την τιμή του περιορισμού c:*

$$f^{*\prime}(c) = \lambda(c)$$

- **Περιορισμένα ακρότατα με 3 μεταβλητές και 2 περιορισμούς.**

  $\max/\min\{f(x,y,z)\,||\,g(x,y,z)=c,\ h(x,y,z)=e,\ D\}$

Λύνοντας το σύστημα ως προς δύο μεταβλητές και αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελεύθερης βελτιστοποίησης με 1 μεταβλητή. Μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange στην παρακάτω μορφή, *με 2 πολλαπλασιαστές, έναν για τον κάθε περιορισμό:*

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda[c-g(x,y,z)]+\mu[e-h(x,y,z)]$$

Η λύση θα ικανοποιεί τις συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας στη μορφή των εξισώσεων Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} L_x=0 &\Rightarrow f_x=\lambda g_x+\mu h_x\\ L_y=0 &\Rightarrow f_y=\lambda g_y+\mu h_y\\ L_z=0 &\Rightarrow f_z=\lambda g_z+\mu h_z\\ L_\lambda=0 &\Rightarrow g=c\\ L_\mu=0 &\Rightarrow h=e \end{aligned}\right\}\Rightarrow \{x^*,y^*,z^*,\lambda,\mu\},\ f^*$$

Αν οι τιμές των περιορισμών εμφανίζονται ως παράμετροι, τότε η λύση και η ακρότατη τιμή f^* θα είναι συναρτήσεις αυτών των παραμέτρων: $\{c,e\}$. Σαυτή την περίπτωση οι πολλαπλασιαστές Lagrange θα ισούνται με τις μερικές παραγώγους της ακρότατης τιμής f^* ως προς τις αντίστοιχες παραμέτρους:

$$f_c^{*\prime}(c,e)=\lambda(c,e),\ f_e^{*\prime}(c,e)=\mu(c,e)$$

Παράδειγμα. Στον χώρο $Oxyz$, θα βρούμε το σημείο του επιπέδου $x+2y-z=c>0$ σε ελάχιστη απόσταση από την αρχή του συστήματος: $(0,0,0)$, λύνοντας το πρόβλημα:

$$\min_{\{x,y,z\}}\{f=x^2+y^2+z^2\,||\,g=x+2y-z=c\}$$

Λύση. Οι εξισώσεις Lagrange: $\{2x=\lambda,\ 2y=2\lambda,\ 2z=-\lambda,\ x+2y-z=c\}$, μας δίνουν:

$$\{x=c/6, y=c/3, z=-c/6, \lambda=c/3\} \text{ με } f=\frac{c^2}{6} \text{ και } d=\sqrt{f}=c/\sqrt{6}$$

Από την γεωμετρία προκύπτει ότι υπάρχει ελάχιστη απόσταση, που θα είναι υποχρεωτικά η παραπάνω. Μάλιστα η λύση μπορεί να βρεθεί και γεωμετρικά ως η τομή του επιπέδου με την κάθετη ακτίνα.

Παρατήρηση. Για ευκολία αντί της απόστασης: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ελαχιστοποιήσαμε τη συνάρτηση: $f=d^2$. Οι δύο συναρτήσεις έχουν ελάχιστο **στο ίδιο σημείο** διότι η μία είναι **αύξων μετασχηματισμός** της άλλης, αλλά έχουν διαφορετική ελάχιστη τιμή και διαφορετικό πολλαπλασιαστή, ο οποίος για την απόσταση d μπορεί να υπολογιστεί εκ των υστέρων από οιαδήποτε των παρακάτω σχέσεων:

$$\mu=\frac{d_x}{g_x}=\frac{d_y}{g_y}=\frac{d_z}{g_z} \quad \text{Βρίσκουμε: } \mu=d'(c)=1/\sqrt{6}$$

Τόσο θα μεταβληθεί η ελάχιστη απόσταση αν το $c>0$ αυξηθεί κατά 1, οριακά.

Παρατήρηση. Τα περιορισμένα στάσιμα που βρίσκουμε λύνοντας τις εξισώσεις Lagrange μπορούν να χαρακτηριστούν χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο **πλαισιωμένο εσσιανό πίνακα Lagrange** που είναι της παρακάτω μορφής, για έναν και δύο περιορισμούς αντίστοιχα:

$$\tilde{H}_L=\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & -g_x\\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & -g_y\\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & -g_z\\ -g_x & -g_y & -g_z & 0\end{pmatrix} \quad \tilde{H}_L=\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & -g_x & -h_x\\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} & -g_y & -h_y\\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} & -g_z & -h_z\\ -g_x & -g_y & -g_z & 0 & 0\\ -h_x & -h_y & -h_z & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ο χαρακτηρισμός τους παρουσιάζεται στα πλαίσια της γενικότερης θεωρίας των **πλαισιωμένων συμμετρικών πινάκων** στην Γραμμική Άλγεβρα. ▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

10. Περιορισμένα διαφορικά

Θεωρούμε τον χαρακτηρισμό των περιορισμένων στάσιμων στο πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange:

$$\max_{x,y}/\min\{f(x,y) \,\|\, g(x,y)=c\} \Rightarrow L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[c-g(x,y)],$$

Για την απόδειξη θεωρούμε τη σύνθεση της $f(x,y)$ με την συνάρτηση $y=y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση του περιορισμού: $g(x,y)=c$, και βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους κανόνες αλυσωτής και πλεγμένης πρώτης και δεύτερης παραγώγου. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *τα διαφορικά που τώρα θα είναι περιορισμένα διότι λόγω του περιορισμού οι μεταβλητές* (x,y) *δεν είναι ανεξάρτητες*. Το ακρότατο χαρακτηρίζεται από το πρόσημο της μεταβολής Δf για μικρές μεταβολές των (x,y) που ικανοποιούν τον περιορισμό $g=c$. Σύμφωνα με τη σχετική θεωρία τα **περιορισμένα διαφορικά** της $f(x,y)$ είναι:

$$df = f_x dx + f_y dy$$

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2x + f_y d^2y$$

όπου λόγω του περιορισμού $g(x,y)=c$, τα διαφορικά των $\{x,y\}$ θα ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$dg = g_x dx + f_y dy = 0$$

$$d^2g = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 + g_x d^2x + g_y d^2y = 0$$

Θεωρούμε τώρα τα παραπάνω σένα εσωτερικό ακρότατο, οπότε θα ισχύουν οι εξισώσεις Lagrange. Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις των διαφορικών της g με τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ και αφαιρούμε από τα αντίστοιχα διαφορικά της f:

$$df = (f_x - \lambda g_x)dx + (f_y - \lambda g_y)dy$$

$$\begin{aligned} d^2f &= (f_{xx} - \lambda g_{xx})dx^2 + 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})dxdy + (f_{yy} - \lambda g_{yy})dy^2 \\ &\quad + (f_x - \lambda g_x)d^2x + (f_y - \lambda g_y)d^2y \end{aligned}$$

Λόγω των εξισώσεων Lagrange οι δύο όροι του πρώτου διαφορικού και οι δύο τελευταίοι του δεύτερου μηδενίζονται, και βρίσκουμε:

$$df = 0$$

$$\begin{aligned} d^2f &= (f_{xx} - \lambda g_{xx})dx^2 + 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})dxdy + (f_{yy} - \lambda g_{yy})dy^2 \\ &= L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 \end{aligned}$$

Εφόσον το πρώτο περιορισμένο διαφορικό είναι μηδενικό, το πρόσημο της μεταβολής θα δίνεται από το πρόσημο του δεύτερου περιορισμένου διαφορικού παραπάνω, που είναι μια **περιορισμένη τετραγωνική μορφή** διότι τα $\{dx,dy\}$ ικανοποιούν την εξίσωση του περιορισμού:

$$\{d^2f = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 \mid dg = g_x dx + g_y dy = 0\}$$

Συμπεραίνουμε ότι το πρόσημό της χαρακτηρίζεται από τον αντίστοιχο πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης Lagrange, όπως διατυπώθηκε προηγουμένως.