ΙΙ.4 ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ-ΙΑΚΩΒΙΑΝΕΣ (Β)

ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ

1. Εξίσωση υποκατάστασης-Ρυθμός υποκατάστασης

Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$z = f(x, y)$$

Προηγουμένως εξετάσαμε την σχέση της εξαρτημένης ως προς κάθε μια ανεξάρτητη μεταβλητή, κρατώντας την άλλη σταθερή. Τώρα θεωρούμε **σταθερή την εξαρτημένη:** $z = c$ οπότε βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ των $\{x, y\}$, στη μορφή εξίσωσης:

$$f(x, y) = c$$

Καλείται και **εξίσωση υποκατάστασης.** Η εξίσωση υποκατάστασης ορίζει πλεγμένα δύο συναρτήσεις μιας μεταβλητής που είναι αντίστροφες μεταξύ τους:

$$f(x, y) = c \Rightarrow \{y = y(x) \text{ ή } x = x(y)\}$$

Καλούνται **συναρτήσεις υποκατάστασης.** Τώρα τα $\{x, y\}$ δεν είναι πλέον ανεξάρτητα. *Καθώς το ένα μεταβάλλεται το άλλο επίσης μεταβάλλεται, έτσι ώστε το* z *να παραμένει σταθερό.* Ο (οριακός) ρυθμός αυτής της μεταβολής καλείται **ρυθμός υποκατάστασης** και παριστάνεται με την **πλεγμένη παράγωγο:**

$$f(x, y) = c \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad x'(y) = \frac{dx}{dy}$$

Οι δύο συναρτήσεις υποκατάστασης είναι αντίστροφες μεταξύ τους, οπότε και οι ρυθμοί υποκατάστασης $\{y'(x), x'(y)\}$ είναι ανάστροφες μεταξύ τους. Η παραπάνω πλεγμένη παράγωγος συνδέεται με τις μερικές παραγώγους της αρχικής συνάρτησης: $\{f_x, f_y\}$, ως εξής:

Βασικός τύπος πλεγμένης παραγώγισης (ρυθμού υποκατάστασης)

$$f(x, y) = c \Rightarrow \left\{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \text{ αν } f_y \neq 0\right\} \ \& \ \left\{\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x} \text{ αν } f_x \neq 0\right\}$$

Η σημασία της παραπάνω σχέσης είναι ότι μας επιτρέπει να μελετήσουμε τις ιδιότητες υποκατάστασης χρησιμοποιώντας ιδιότητες της αρχικής συνάρτησης, χωρίς να χρειάζεται να βρούμε την ίδια την συνάρτηση υποκατάστασης.

Απόδειξη1. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση: $f(x,y) = c$, και παίρνουμε την σύνθεση:

$$\{f(x, y),\ y = y(x)\} \Rightarrow f(x, y(x)) = c$$

Η σύνθεση δίνει *εξορισμού σταθερή συνάρτηση*, οπότε ο τύπος αλυσωτής παραγώγισης μας δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Απόδειξη2. Θα εξετάσουμε πως πρέπει να μεταβάλλονται τα $\{x,y\}$ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση: $f(x,y)=c$ δηλαδή να μην μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης, *οριακά*.

1. Αν μεταβληθεί μόνο το x κατά $\Delta x = dx$ τότε η συνάρτηση θα μεταβληθεί οριακά κατά: $d_x f = f_x dx$
2. Αν μεταβληθεί μόνο το y κατά $\Delta y = dy$ τότε η συνάρτηση θα μεταβληθεί οριακά κατά: $d_y f = f_y dy$

Επομένως, για να μην μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης θα πρέπει οι οριακές μεταβολές να αναιρούνται, δηλαδή τα $\{dx, dy\}$ να ικανοποιούν:

$$df = d_x f + d_y f = f_x dx + f_y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$, που είναι ακριβώς η ζητούμενη σχέση. ▲

Λέμε ότι για **σταθερό** z**:**

- αύξηση του x κατά $dx = 1$ μπορεί να **υποκαταστήσει** μεταβολή του y κατά $dy = -f_x / f_y$, **οριακά**

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός υποκατάστασης μιας μεταβλητής ως προς την άλλη, είναι αντιστρόφως ανάλογος των αντίστοιχων μερικών παραγώγων. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή, οπότε και επηρεάζει πιο πολύ την τιμή της συνάρτησης, τόσο μεγαλύτερη είναι η ικανότητά της συγκεκριμένης μεταβλητής για υποκατάσταση, με την έννοια ότι υποκαθιστά μεγαλύτερη ποσότητα της άλλης.

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης με: $z = x^{1/3}y^{2/3} = c$

Αριστερό μέρος: $x^{1/3}y^{2/3} = c \Rightarrow y = c^{3/2}x^{-1/2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (-1/2)c^{3/2}x^{-3/2} = -c^{3/2}x^{-3/2}/2$

Δεξιό μέρος: $-\dfrac{z_x}{z_y} = -\dfrac{(1/3)x^{-2/3}y^{2/3}}{(2/3)x^{1/3}y^{-1/3}} = -\dfrac{y}{2x} = -yx^{-1}/2$

Αντικαθιστώντας, είτε στο αριστερό μέρος για το c είτε στο δεξιό μέρος για το y, καταλήγουμε στην ίδια παράσταση.

Παρατήρηση. Όταν έχουμε συγκεκριμένη εξίσωση, όπως εδώ, η πλεγμένη παράγωγος μπορεί να βρεθεί και απευθείας από τη σχέση $f(x,y)=c$ με την γνωστή διαδικασία πλεγμένης παραγώγισης που εξετάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, όπου θεωρούμε μια μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Π.χ. παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς x στο παραπάνω παράδειγμα, βρίσκουμε:

$$\left(x^{1/3}y^{2/3}\right)'_x = (c)' \Rightarrow (1/3)x^{-2/3}y^{2/3} + (2/3)x^{1/3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{(1/3)x^{-2/3}y^{2/3}}{(2/3)x^{1/3}y^{-1/3}} = -\frac{y}{2x}$$

Ο υπολογισμός γίνεται ευκολότερος αν πάρουμε πρώτα λογαρίθμους:

$$x^{1/3}y^{2/3} = c \Rightarrow \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y = \ln c \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{2x}$$

▲

2. Ισοσταθμικές: $f(x,y)=c$

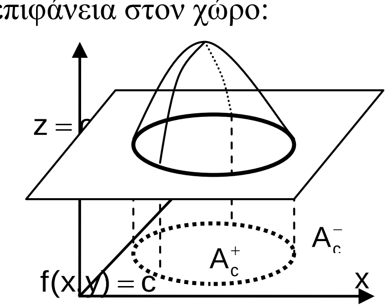
Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και την παράστασή της ως επιφάνεια στον χώρο:

$$z = f(x,y)$$

Είχαμε εξετάσει κατακόρυφες τομές της επιφάνειας, ειδικότερα κάθετα στον $x-$άξονα και στον $y-$άξονα αντίστοιχα. Τώρα θεωρούμε **τομές της επιφάνειας με οριζόντια επίπεδα κάθετα στον** $z-$**άξονα.** Παρατηρούμε ότι η τομή με το οριζόντιο επίπεδο:

$$z = c$$

δίνει μια οριζόντια καμπύλη στο χώρο, της οποίας η προβολή στο επίπεδο Oxy παριστάνεται με την εξίσωση υποκατάστασης:



$$f(x,y) = c$$

Καλείται **ισοσταθμική** της f με τιμή c, διότι στα σημεία της η συνάρτηση f έχει τη σταθερή τιμή c.

Παρατηρούμε επίσης ότι γενικά μια ισοσταθμική χωρίζει το πεδίο ορισμού της f στο επίπεδο Oxy σε δύο υποπεριοχές, τις οποίες καλούμε:

$$f(x,y)=c \Rightarrow \begin{cases} A_c^+ : \ f(x,y) \geq c, & \textbf{πάνω σταθμική} \\ A_c^- : \ f(x,y) \leq c, & \textbf{κάτω σταθμική} \end{cases}$$

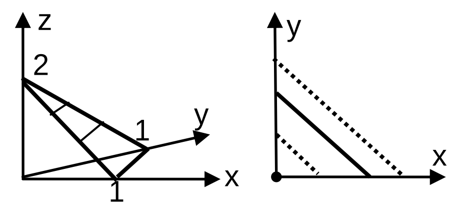
Στην πάνω σταθμική περιοχή η συνάρτηση έχει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με το c και στη κάτω μικρότερες ή ίσες με το c. Ειδικά η **μηδενική ισοσταθμική:** $f(x,y)=0$, χωρίζει την περιοχή των θετικών τιμών από την περιοχή των αρνητικών τιμών. Η ισοσταθμική που διέρχεται από το τυχόν σημείο (x_0,y_0) έχει εξίσωση:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Σημ. Γενικά, οι ισοσταθμικές για διάφορες τιμές c σχηματίζουν μια οικογένεια διακριτών καμπύλων στο επίπεδο Oxy, η οποία ερμηνεύεται ως **επίπεδη παράσταση της αντίστοιχης επιφάνειας,** όπως οι **ανάγλυφοι χάρτες** παριστάνονται με τις ισουψείς τους.

Παράδειγμα. Θα δώσουμε γραφήματα ισοσταθμικών, για διάφορες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού στη **θετική περιοχή**: $x \geq 0, y \geq 0$.

1. $z=2-2x-2y$, **γραμμική**.



Παριστάνει επίπεδο, που τέμνει τους άξονες, ως εξής:.

$(x=0,y=0) \Rightarrow z=2$, τομή με τον $z-$άξονα

$(x=0,z=0) \Rightarrow y=1$, τομή με τον $y-$άξονα

$(y=0,z=0) \Rightarrow x=1$, τομή με τον $x-$άξονα

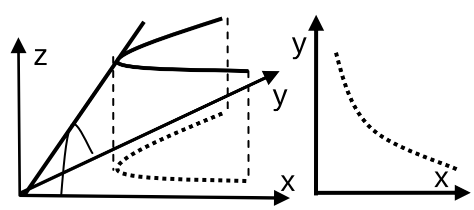
$z=0 \Rightarrow 2x+2y=2$, τομή με το $Oxy-$ επίπεδο

Ισοσταθμικές της είναι οι παρακάτω παράλληλες ευθείες, για διάφορες τιμές του c:

$$2-2x-2y=c \Rightarrow x+y=1-c/2 \geq 0 \Rightarrow c \leq 2$$

Η ισοσταθμική με $c=2$ αποτελείται από ένα μόνο σημείο: $(0,0)$

2. $z=\sqrt{xy}$ **Cobb-Douglas (C-D)**

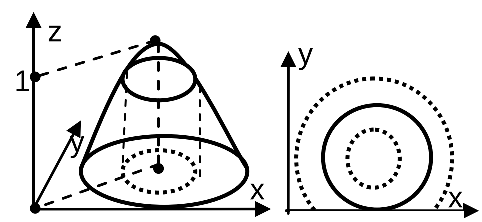


Η μηδενική ισοσταθμική αντιστοιχεί στους θετικούς ημιάξονες.

$$z=\sqrt{xy}=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } y=0$$

Οι υπόλοιπες ισοσταθμικές είναι υπερβολικές καμπύλες: $\sqrt{xy}=c \Rightarrow y=c^2/x$

3. $z=-4+2x+2y-x^2-y^2=1-(x-2)^2-(y-1)^2$, **τετραγωνική** ή **παραβολική**



Έχει μέγιστη τιμή: $z=1$. Η αντίστοιχη ισοσταθμική αποτελείται από ένα μόνο σημείο: $(x=2,y=1)$.

Για τιμές $z=c<1$, οι ισοσταθμικές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο $(2,1)$ και ακτίνα $\sqrt{1-c}$:

$$z=1-(x-2)^2-(y-1)^2=c \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1-c$$

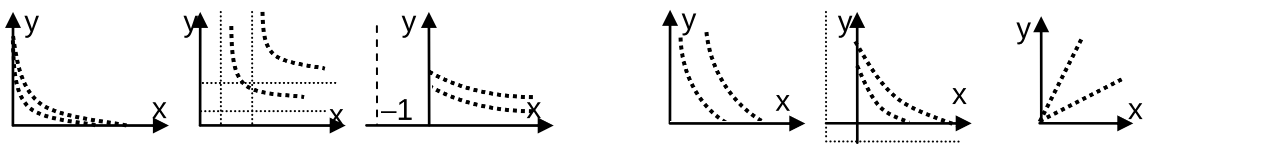
Ειδικότερα η μηδενική ισοσταθμική δίνεται από την περιφέρεια:

$$c=0 \Rightarrow z=1-(x-2)^2-(y-1)^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$$

Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές εντός, και αρνητικές εκτός.

Για $z=c>1$ δεν υπάρχουν ισοσταθμικές, διότι η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές μεγαλύτερη του 1.

4. Δίνουμε και μερικά γραφήματα ισοσταθμικών χωρίς τις αντίστοιχες επιφάνειες, στη θετική περιοχή.



$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ $\quad x^{-1}+y^{-1}$ $\quad (x+1)y$ $\quad \ln x + y$ $\quad (x+1)(y+2)$ $\quad \ln x - \ln y = \ln(x/y)$

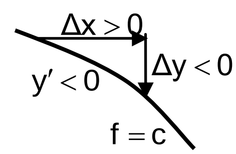
▲

3. Κλίση ισοσταθμικών.

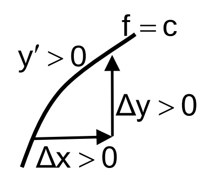
Η κλίση των ισοσταθμικών δίνεται από τον ρυθμό υποκατάστασης και συνδέεται με τις ιδιότητες μονοτονίας της συνάρτησης $f(x,y)$, δηλαδή με τα πρόσημα των $\{f_x, f_y\}$, λόγω της σχέσης:

$$f(x,y)=c \Rightarrow y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

1. Οι ισοσταθμικές έχουν αρνητική κλίση αν τα $\{f_x, f_y\}$ έχουν το ίδιο πρόσημο, δηλαδή αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι μονότονη. Πράγματι, αν τα $\{f_x, f_y\}$ έχουν το ίδιο πρόσημο τότε οι μεταβολές των $\{x,y\}$ **επηρεάζουν την** f **με τον ίδιο τρόπο**, δηλαδή με το ίδιο πρόσημο, οπότε για να μείνουμε σε μια ισοσταθμική ώστε να μην μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης, θα πρέπει όταν αυξάνουμε τη μία μεταβλητή να ελαττώνουμε την άλλη. Έτσι η ισοσταθμική θα έχει αρνητική κλίση, δηλαδή η πλεγμένη συνάρτηση: $f(x,y)=c \Rightarrow y=y(x)$ θα είναι φθίνουσα. Λέμε ότι έχουμε **υποκατάσταση.**



2. Οι ισοσταθμικές έχουν θετική κλίση αν τα $\{f_x, f_y\}$ έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή αν η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι μονότονη. Πράγματι, αν τα $\{f_x, f_y\}$ έχουν αντίθετο πρόσημο, τότε οι μεταβολές των $\{x,y\}$ **επηρεάζουν την** f **με αντίθετο τρόπο**, δηλαδή με αντίθετο πρόσημο, οπότε για να μείνουμε σε μια ισοσταθμική ώστε να μη μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης, θα πρέπει όταν αυξάνουμε τη μια μεταβλητή να αυξάνουμε και την άλλη για αντιστάθμισμα. Έτσι η ισοσταθμική θα έχει θετική κλίση και η πλεγμένη συνάρτηση: $f(x,y)=c \Rightarrow y=y(x)$ θα είναι αύξουσα. Λέμε ότι έχουμε **αντιστάθμιση.**



Σημ. Γενικά ο όρος ρυθμός υποκατάσταση χρησιμοποιείται για να καλύψει και τις δύο έννοιες. Μάλιστα συχνά στις εφαρμογές ο ρυθμός υποκατάστασης ορίζεται ως το απόλυτο μέγεθος:

$$|y'|=|f_x/f_y|$$

οπότε είναι πάντοτε θετικό.

4. Διανυσματική ή Ιακωβιανή παράγωγος

μιας συνάρτησης $f(x,y)$ καλείται το επίπεδο διάνυσμα που έχει για συντεταγμένες τις δύο μερικές παραγώγους. Συμβολίζεται με:

$$Df \text{ ή } J_f \text{ ή } f'=(f_x, f_y)$$

Γραφικά, τοποθετείται με την αρχή του στο εκάστοτε σημείο (x,y) και μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, εκτός αν η συνάρτηση είναι γραμμική οπότε είναι σταθερό. Σε κάθε σημείο η μονοτονία χαρακτηρίζεται από την κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου.

Υπάρχουν τέσσερες **γενικές κατευθύνσεις**, ως εξής:

x – **αύξουσα**	x – **φθίνουσα**	x – **αύξουσα**	x – **φθίνουσα**
y – **αύξουσα**	y – **φθίνουσα**	y – **φθίνουσα**	y – **αύξουσα**
δεξιά-πάνω	**αριστερά-κάτω**	**δεξιά-κάτω**	**αριστερά-πάνω**

Αν οι δύο μερικές παράγωγοι έχουν το ίδιο πρόσημο, όπως στα δύο πρώτα γραφήματα του παραπάνω σχήματος, τότε ως γνωστόν λέμε ότι η συνάρτηση είναι **μονότονη.** Ειδικότερα μια συνάρτηση είναι:

- **αύξουσα** αν δείχνει πάνω-δεξιά όπως στο πρώτο γράφημα με: $\{f_x \geq 0,\ f_y \geq 0\}$
- **φθίνουσα** αν δείχνει κάτω-αριστερά όπως στο δεύτερο γράφημα με: $\{f_x \leq 0,\ f_y \leq 0\}$

Αναφέρουμε χωριστά τις τέσσερις **ειδικές κατευθύνσεις** όπου η μία μερική παράγωγος είναι μηδενική και η άλλη μη μηδενική, οπότε η κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου είναι:

οριζόντια αν $\{f_x \neq 0,\ f_y = 0\}$, **κατακόρυφη** αν $\{f_x = 0,\ f_y \neq 0\}$.

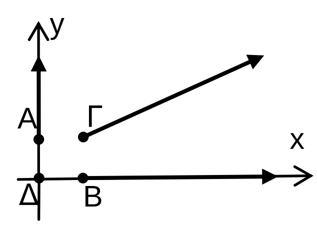
Στα **στάσιμα σημεία** η διανυσματική παράγωγος είναι το μηδενικό διάνυσμα. Παριστάνεται με σημείο.

Παράδειγμα. $f(x,y) = 4x^2 + y^2 \Rightarrow f'(x,y) = (f_x, f_y) = (8x, 2y)$

Σκιαγραφούμε τις διανυσματικές παραγώγους στα σημεία:

$\{A : f'(0,1) = (0,2)\}$, $\{B : f'(1,0) = (8,0)\}$,

$\{\Gamma : f'(1,1) = (8,2)\}$, $\{\Delta : f'(0,0) = (0,0)\}$



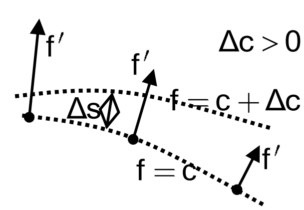
Παρατηρούμε ότι είναι αύξουσα στη θετική περιοχή. Το Δ είναι στάσιμο σημείο με μηδενική διανυσματική παράγωγο, όπου η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή μηδενική, διότι παντού αλλού είναι γνήσια θετική.

Σημ. Η διανυσματική παράγωγος καλείται επίσης **διανυσματική κλίση (gradient),** και τότε παριστάνεται ως διάνυσμα στήλη με τον συμβολισμό:

$$\nabla f \ \text{ή}\ \ \text{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

5. Ιδιότητες των ισοσταθμικών

Υπάρχει μια ιδιαίτερη σχέση μεταξύ των διανυσματικών παραγώγων και των ισοσταθμικών, μιας συνάρτησης $f(x,y)$, ως εξής:



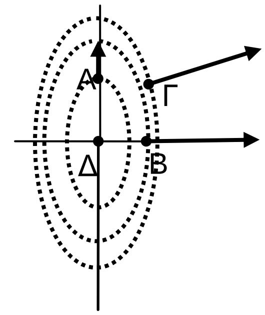
1. *Σε κάθε σημείο* (x,y)*, η διανυσματική παράγωγος είναι κάθετη στην ισοσταθμική που διέρχεται από το ίδιο σημείο, και δείχνει στην κατεύθυνση της πάνω σταθμικής. Αυτό συμβαίνει διότι σε σχέση με την επιφάνεια η ισοσταθμική δείχνει την κατεύθυνση σταθερού υψόμετρου, ενώ η διανυσματική παράγωγος την κατεύθυνση μέγιστης ανωφέρειας. Εξάλλου οι κλίσεις της ισοσταθμικής και της διανυσματικής παραγώγου έχουν γινόμενο* -1*, και επομένως είναι κάθετες μεταξύ τους:*

$$(-f_x / f_y)(f_y / f_x) = -1$$

2. *Σε κάθε σημείο το μήκος της διανυσματικής παραγώγου είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης μεταξύ γειτονικών ισοσταθμικών, δηλαδή ανάλογο της πυκνότητας των ισοσταθμικών. Αυτό συμβαίνει διότι όσο κοντύτερα βρίσκονται οι ισοσταθμικές μεταξύ τους τόσο γρηγορότερα μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης, δηλαδή τόσο πιο απότομη είναι η επιφάνεια και μεγαλύτερες οι μερικές παράγωγοι.*

Έτσι, σε κάθε σημείο, η διανυσματική παράγωγος δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία η συνάρτηση αυξάνει με τον γρηγορότερο ρυθμό ο οποίος και είναι ίσος με το μήκος της διανυσματικής παραγώγου. Στην αντίθετη από την παραπάνω κατεύθυνση έχουμε την πιο απότομη κατωφέρεια προς την οποία οι τιμές της συνάρτησης μικραίνουν με τον γρηγορότερο ρυθμό. Στα **στάσιμα** σημεία η διανυσματική παράγωγος είναι μηδενική και δεν ορίζεται κατεύθυνση αύξησης ή μείωσης των τιμών. *Συνήθως* στα σημεία αυτά η συνάρτηση έχει ακρότατη τιμή, μέγιστη ή ελάχιστη, οπότε πράγματι δεν ορίζεται ειδική κατεύθυνση αύξησης ή μείωσης των τιμών της.

Παράδειγμα. $f(x,y)=4x^2+y^2 \Rightarrow f'(x,y)=(f_x,f_y)=(8x,2y)$



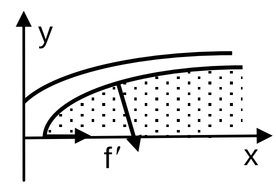
Σκιαγραφούμε τις ισοσταθμικές και τις διανυσματικές παραγώγους στα σημεία:

$\{A: f'(0,1)=(0,2)\}$, $\{B: f'(1,0)=(8,0)\}$, $\{\Gamma: f'(1,1)=(8,2)\}$, $\{\Delta: f'(0,0)=(0,0)\}$

Στα $\{A,B,\Gamma\}$ οι διανυσματικές παράγωγοι είναι κάθετες στις αντίστοιχες ισοσταθμικές και δείχνουν προς τις πάνω σταθμικές περιοχές. Συγκρίνοντας τα $\{A,B\}$ διαπιστώνουμε ότι η διανυσματική παράγωγος είναι μεγαλύτερη στο B όπου οι ισοσταθμικές είναι πιο πυκνές, δηλαδή απέχουν μεταξύ τους λιγότερο, οπότε και οι τιμές της συνάρτησης έχουν μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής, δηλαδή μεγαλύτερη διανυσματική παράγωγο. Στο Δ έχουμε στάσιμο σημείο με μηδενική διανυσματική παράγωγο.

▲

Παράδειγμα. $f(x,y)=x-y^2$ στη θετική περιοχή: $\{x\ge 0, y\ge 0\}$



1. Οι μερικές παράγωγοι έχουν αντίθετο πρόσημο:

$f_x=1>0,\ f_y=-2y\le 0$, $x-$αύξουσα, $y-$φθίνουσα

και επομένως οι ισοσταθμικές πρέπει να έχουν θετική κλίση. Πράγματι οι ισοσταθμικές είναι οριζόντιες παραβολές, με θετική κλίση:

$f(x,y)=x-y^2=c \Rightarrow x=y^2+c$.

2. Η διανυσματική κλίση δείχνει δεξιά-κάτω, εκτός από τα σημεία στον $x-$άξονα που δείχνει δεξιά. Σε κάθε περίπτωση είναι κάθετη στην ισοσταθμική και δείχνει προς την πάνω σταθμική. Πράγματι, οι πάνω σταθμικές είναι προς τα δεξιά-κάτω όπως η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχεδιάγραμμα:

$f(x,y)=x-y^2\ge c \Rightarrow x\ge y^2+c$

▲

Παρατήρηση. Οι **γραμμικές συναρτήσεις** έχουν σταθερή διανυσματική παράγωγο και παράλληλες ευθείες ως ισοσταθμικές, με **σταθερό ρυθμό υποκατάστασης**:

$$f=\alpha x+\beta y+\gamma=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

{ $\Delta x=dx=1$ υποκαθιστά $\Delta y\approx dy=-\alpha/\beta$ } ή { $\Delta y=dx=1$ υποκαθιστά $\Delta x\approx dx=-\beta/\alpha$ }

Αναφέρουμε τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

- $f(x,y)=y$. Οι ισοσταθμικές είναι οριζόντιες ευθείες: $y=c$. Όσο και να αυξάνει το x η διατήρηση της τιμής της συνάρτησης απαιτεί το ίδιο y. Ορίζει **μηδενικό ρυθμό υποκατάστασης του** y **από το** x, δηλαδή το x δεν μπορεί να υποκαταστήσει το y: $\{f_x=0,\ f_y=1\}\Rightarrow y'=0$.
- $f(x,y)=x$. Οι ισοσταθμικές είναι κατακόρυφες ευθείες: $x=c$. Όσο και να αυξάνει το y η διατήρηση της τιμής της συνάρτησης απαιτεί το ίδιο x. Ορίζει **μηδενικό ρυθμό υποκατάστασης του** x **από το** y, δηλαδή το y δεν μπορεί να υποκαταστήσει το x: $\{f_x=1,\ f_y=0\}\Rightarrow x'=0$

▲

6. Εξαρτημένες συναρτήσεις

μεταξύ τους, καλούνται δύο συναρτήσεις: $\{f(x,y),\ g(x,y)\}$, αν η μια είναι **μετασχηματισμός** της άλλης, δηλαδή **συνάρτηση** της άλλης:

$$f = H(g) \Rightarrow f(x,y) = H(g(x,y))$$

όπου H είναι συνάρτηση **μιας** μεταβλητής. Αν η H είναι γνήσια μονότονη, τότε ισχύει και η αντίστροφη σχέση:

$$g = H^{-1}(f)$$

οπότε η κάθε συνάρτηση είναι *γνήσια μονότονος μετασχηματισμός* της άλλης, **γνήσια αύξων μετασχηματισμός** αν η H είναι γνήσια αύξουσα, **γνήσια φθίνων μετασχηματισμός** αν η H είναι γνήσια φθίνουσα. Γεωμετρικά, οι εξαρτημένες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι έχουν τις **ίδιες ισοσταθμικές,** διότι όπου είναι σταθερή η μια είναι και η άλλη, με διαφορετική τιμή γενικά**.**

Κριτήριο εξάρτησης. *Οι συναρτήσεις δυο μεταβλητών:* $\{f(x,y), g(x,y)\}$ *είναι εξαρτημένες* $\Leftrightarrow$ *ικανοποιείται ταυτοτικά (σε όλα τα σημεία του κοινού πεδίου ορισμού) η συνθήκη:*

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x \equiv 0 \quad \text{ή ισοδύναμα } \frac{f_x}{g_x} \equiv \frac{f_y}{g_y} \quad \text{ή ισοδύναμα } \frac{f_x}{f_x} \equiv \frac{g_y}{g_y}$$

Παράδειγμα

1. Οι συναρτήσεις $\{f = \ln x - \ln y,\ g = y/x\}$ είναι εξαρτημένες στη θετική περιοχή, διότι ικανοποιούν:

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/x & -1/y \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{y}{x^2} \equiv 0$$

Πράγματι έχουμε:

$$\{f = -\ln g,\ g = e^{-f}\}$$

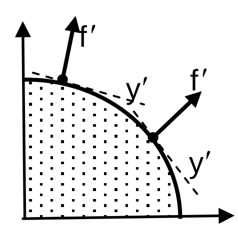
οπότε οι ισοσταθμικές της $f = \ln x - \ln y = \ln(x/y)$ είναι ακτίνες, όπως και της $g = y/x$.

2. Οι συναρτήσεις: $f = x^{\alpha} y^{\beta},\ g = \ln f = \alpha \ln x + \beta \ln y$ είναι εξαρτημένες στη θετική περιοχή και έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές. Καλούνται τύπου **C-D (Cobb-Douglas)** και **λογαριθμικές C-D** αντίστοιχα.

3. Οι συναρτήσεις $\{f = (2x-y)^2,\ g = 2x - y\}$ είναι εξαρτημένες διότι έχουμε: $f = g^2$. Κάθε ισοσταθμική της g είναι ισοσταθμική και της f**.** Έτσι **εκτός των γραμμικών, και όλες οι συναρτήσεις που είναι εξαρτημένες από τις γραμμικές έχουν ως ισοσταθμικές παράλληλες ευθείες.**

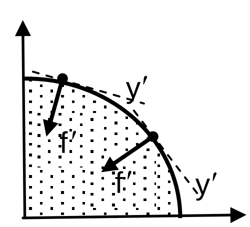
▲

Παράδειγμα



1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \{f_x = 2x, f_y = 2y\}$, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

Είναι μονότονη αύξουσα και έχει ισοσταθμικές με αρνητική κλίση. Η διανυσματική παράγωγος δείχνει πάνω δεξιά προς την πάνω σταθμική, όπως στο πρώτο γράφημα παραπλεύρως. Στο στάσιμο: $(0,0)$, η ισοσταθμική είναι σημείο και η διανυσματική παράγωγος είναι μηδενική.



2. Η $g = 2\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 2\sqrt{f} - 1$, είναι **αύξων μετασχηματισμός τ**ης f, οπότε έχει τις ίδιες ισοσταθμικές, με τα ίδια χαρακτηριστικά.

3. Η $h = (x^2 + y^2)^{-1} = 1/f$, είναι **φθίνων μετασχηματισμός** της f, οπότε έχει τις ίδιες ισοσταθμικές, αλλά η εξάρτηση είναι μονότονη φθίνουσα οπότε αντιστρέφεται και η κατεύθυνση της διανυσματικής παραγώγου. Οι τιμές αυξάνουν προς τα μέσα, όπως στο δεύτερο γράφημα παραπλεύρως.

▲

7. Περισσότερες μεταβλητές

Τα παραπάνω γενικεύονται σε συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Ειδικά στην περίπτωση συναρτήσεων 3 μεταβλητών:

$$w = f(x,y,z)$$

τα γραφήματα των ισοσταθμικών είναι **επιφάνειες** στον τρισδιάστατο χώρο:

$$w = c \Rightarrow f(x,y,z) = c$$

Κάθε ισοσταθμική επιφάνεια χωρίζει την περιοχή ορισμού της συνάρτησης σε δύο χωρικές **υποπεριοχές.** Καλούνται **πάνω σταθμική** και **κάτω σταθμική** και ορίζονται με τις αντίστοιχες ανισότητες:

$$f(x,y,z) = c \Rightarrow \begin{cases} A_c^+ : f(x,y,z) \geq c \\ A_c^- : f(x,y,z) \leq c \end{cases},$$

Επίσης, σε κάθε σημείο ορίζεται η **διανυσματική κλίση:**

$$f' = (f_x, f_y, f_z)$$

Είναι διάνυσμα κάθετο στην αντίστοιχη σταθμική επιφάνεια και δείχνει την κατεύθυνση της πάνω σταθμικής, δηλαδή την κατεύθυνση αύξησης των τιμών της συνάρτησης. Για να μελετήσουμε την ισοσταθμική επιφάνεια θεωρούμε ότι η εξίσωση ορίζει πλεγμένα μια συνάρτηση, π.χ.

$f(x,y,z) = c \Rightarrow z = z(x,y)$ ή $y = y(x,z)$ ή $x = x(y,z)$, **συναρτήσεις υποκατάστασης**

τις οποίες στη συνέχεια μπορούμε να εξετάσουμε ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

8. Επιμέρους ρυθμοί υποκατάστασης

Αντίστοιχα γενικεύεται και η έννοια του ρυθμού υποκατάστασης. Π.χ. στην περίπτωση συνάρτησης τριών μεταβλητών, αν θεωρήσουμε ότι η **εξίσωση υποκατάστασης**:

$$w = f(x,y,z) = c$$

ορίζει πλεγμένα το z ως συνάρτηση των $\{x,y\}$, τότε θα έχουμε **συνάρτηση υποκατάστασης** δύο μεταβλητών με δύο **επιμέρους ρυθμούς υποκατάστασης** που δίνονται από τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους:

$$z = z(x,y) \Rightarrow \{z_x, z_y\}$$

Έτσι το μέγεθος z_x έχει τις παρακάτω δύο ισοδύναμες ερμηνείες:

- *για σταθερό w, αύξηση του x κατά μια μονάδα κρατώντας το y σταθερό μπορεί να υποκαταστήσει μεταβολή του z κατά z_x, οριακά*
- *για σταθερά $\{w,y\}$ αύξηση του x κατά μια μονάδα μπορεί να υποκαταστήσει μεταβολή του z κατά z_x, οριακά*

Αντίστοιχη ερμηνεία έχουμε για τον άλλο ρυθμό υποκατάστασης: z_y. Δηλαδή, κάθε ρυθμός υποκατάστασης ορίζεται μεταξύ δύο μεταβλητών κρατώντας όλες τις άλλες σταθερές, συμπεριλαμβανομένης της εξαρτημένης μεταβλητής.

Ως άμεση συνέπεια του γνωστού κανόνα πλεγμένης παραγώγισης βρίσκουμε ότι οι επιμέρους ρυθμοί υποκατάστασης συνδέονται με τις μερικές παραγώγους της αρχικής συνάρτησης, ως εξής:

Τύποι πλεγμένης παραγώγισης, με 1 εξίσωση και 3 μεταβλητές

$$\{w = f(x,y,z) = c \Rightarrow z = z(x,y)\} \text{ με } \left\{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}\right\} \text{ αν } f_z \neq 0$$

▲

Στη γενική περίπτωση ισχύει το παρακάτω:
Τύποι πλεγμένης παραγώγισης με 1 εξίσωση. *Θεωρούμε ότι μια εξίσωση υποκατάστασης μεταξύ πολλών μεταβλητών, ορίζει πλεγμένα τη μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβλητές ως συνάρτηση των υπολοίπων. Τότε οι αντίστοιχες πλεγμένες μερικές παράγωγοι δίνονται από ένα κλάσμα με αρνητικό πρόσημο που έχει για παρανομαστή πάντοτε την μερική παράγωγο της **αρχικής** συνάρτησης ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή και για αριθμητή την μερική παράγωγο της **αρχικής** συνάρτησης ως προς την ανεξάρτητη για την οποία υπολογίζεται η μερική παράγωγος στο αριστερό μέρος.*
Παράδειγμα. Θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις που ορίζονται πλεγμένα μέσω εξισώσεων:
1. $w = x^{0.2}y^{0.4}z^{0.3} = c \Rightarrow x = x(y,z)$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -\frac{w_z}{w_x} = -\frac{0.3x^{0.2}y^{0.4}z^{-0.7}}{0.2x^{-0.8}y^{0.4}z^{0.3}} == -\frac{3}{2}\frac{x}{z}$$

Είναι ο ρυθμός υποκατάστασης του x ως προς z με σταθερά w και y.
Εναλλακτικά μπορούμε να την υπολογίσουμε λύνοντας πρώτα την εξίσωση ως προς x:

$$w = x^{0.2}y^{0.4}z^{0.3} = c \Rightarrow x^{0.2} = cy^{-0.4}z^{-0.3} \Rightarrow x = c^{1/0.2}y^{-0.4/0.2}z^{-0.3/0.2} \Rightarrow x = c^5y^{-2}z^{-3/2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την μερική παράγωγο:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y == -\frac{3}{2}c^5y^{-2}z^{-5/2}$$

Τα δύο είναι ίσα, διότι αν στο πρώτο αντικαταστήσουμε για το x, βρίσκουμε το δεύτερο:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -\frac{3}{2}\frac{x}{z} = -\frac{3}{2}\frac{c^5y^{-2}z^{-3/2}}{z} = -\frac{3}{2}c^5y^{-2}z^{-5/2}$$

2. $xz^2 + yz = c \Rightarrow z = z(x,y)$
Θεωρώντας την συνάρτηση τριών μεταβλητών στο αριστερό μέρος της εξίσωσης, βρίσκουμε:

$$f(x,y,z) = xz^2 + yz = c \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{z^2}{2xz+y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{z}{2xz+y}$$
, όπου $xz^2 + yz = c$

Και εδώ μπορούμε να το ελέγξουμε λύνοντας την παραβολική εξίσωση ως προς z
Σημ. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλεγμένες παραγώγους απευθείας με την γνωστή διαδικασία της πλεγμένης παραγώγισης στην αρχική εξίσωση, θεωρώντας το z συνάρτηση των (x,y).
Παραγωγίζουμε:
ως προς x με σταθερό y: $(xz^2 + yz)_x = (c)_x \Rightarrow (z^2 + 2xzz_x) + yz_x = 0 \quad \Rightarrow z_x = -z^2/(2xz+y)$
ως προς y με σταθερό x: $(xz^2 + yz)_y = (c)_y \Rightarrow x2zz_y + (z + yz_y) = 0 \quad \Rightarrow z_y = -z/(2xz+y)$

▲

9. Ιακωβιανές Ορίζουσες

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πλεγμένες συναρτήσεις που ορίζονται γενικότερα από **συστήματα εξισώσεων.**

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\cdots x_n) &= c_1 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots x_n) &= c_2 \\ &\vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots x_n) &= c_m \end{aligned}\right\} n > m$$

*Ένα σύστημα εξισώσεων, με **γνήσια περισσότερες μεταβλητές*** n ***από εξισώσεις*** m***:*** $n > m$, *μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει* m *από τις μεταβλητές τις οποίες ονομάζουμε **εξαρτημένες** ή **ενδογενείς,** ως πλεγμένες συναρτήσεις των υπολοίπων* $n-m$ *τις οποίες ονομάζουμε **ανεξάρτητες** ή **εξωγενείς**. Λέμε ότι το σύστημα έχει **τάξη*** m *και **βαθμό ελευθερίας*** $n-m$. *Οι πλεγμένες αυτές συναρτήσεις αποτελούν και τη **λύση** του συστήματος.*

Π.χ. Στην περίπτωση ενός συστήματος $m=2$ εξισώσεων με $n=3$ μεταβλητές $\{x,y,z\}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα ορίζει πλεγμένα τις $m=2$ μεταβλητές $\{x,y\}$ ως συναρτήσεις της $n-m=1$ μεταβλητής z:

$$\left.\begin{matrix} f(x,y,z)=\alpha \\ g(x,y,z)=\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=x(z) \\ y=y(z) \end{matrix}\right\}$$

Για να διατυπώσουμε τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης στη παραπάνω γενική μορφή, ορίζουμε πρώτα την **Ιακωβιανή ορίζουσα** των m συναρτήσεων στο αριστερό μέρος των εξισώσεων για **ισάριθμο** πλήθος m μεταβλητών, ως την ορίζουσα που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους που είναι $m\times m$ το πλήθος, τοποθετημένες σε m γραμμές και m στήλες, με κάποια διάταξη των συναρτήσεων και των μεταβλητών.

Π.χ. για **2** συναρτήσεις με **3** μεταβλητές έχουμε **3 διαφορετικές** Ιακωβιανές ορίζουσες των δύο συναρτήσεων ως προς τις μεταβλητές ανά δύο:

$$\left.\begin{matrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix},\ \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,y)}=\begin{vmatrix} f_z & f_y \\ g_z & g_y \end{vmatrix},\ \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix} \right\},\ \text{όπου: } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$$

Μπορούμε βέβαια να αλλάξουμε την διάταξη εμφάνισης των συναρτήσεων ή των μεταβλητών, αλλά σύμφωνα με τις γενικές ιδιότητες των οριζουσών αυτό επιφέρει αλλαγές μόνο στο πρόσημο της ορίζουσας. Συγκεκριμένα έχουμε **αλλαγή πρόσημου** κάθε φορά που εναλλάσσουμε δύο γραμμές ή δύο στήλες. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τον γενικό κανόνα ως εξής:

Γενικοί τύποι πλεγμένης παραγώγισης. *Θεωρούμε ότι ένα σύστημα m εξισώσεων με $n>m$ μεταβλητές ορίζει πλεγμένα κάποιες m από αυτές ως συναρτήσεις των υπόλοιπων $n-m$. Τότε η κάθε πλεγμένη παράγωγος εκφράζεται μένα κλάσμα με αρνητικό πρόσημο, όπου:*

- *Στον παρανομαστή εμφανίζεται πάντοτε η Ιακωβιανή ορίζουσα των m συναρτήσεων ως προς προς m εξαρτημένες μεταβλητές, και είναι πάντοτε η ίδια.* ***Την υποθέτουμε μη μηδενική.***
- *Στον αριθμητή εμφανίζεται η Ιακωβιανή που προκύπτει από την ορίζουσα στον παρανομαστή αν αντικαταστήσουμε την εξαρτημένη με την ανεξάρτητη που εμφανίζονται στο αριστερό μέρος.*

Π.χ. για $m=2$ **εξισώσεις και** $n=3$ **μεταβλητές,** βρίσκουμε τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\left.\begin{matrix} f(x,y,z)=\alpha \\ g(x,y,z)=\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=x(z) \\ y=y(z) \end{matrix}\right\} \ \text{με}\ \frac{dx}{dz}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_z & f_y \\ g_z & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}},\ \frac{dy}{dz}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}},\ \text{αν}\ \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\neq 0$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε το dx/dz, γράφουμε στον παρανομαστή την Ιακωβιανή ως προς προς εξαρτημένες μεταβλητές: $\partial(f,g)/\partial(x,y)$, και στον αριθμητή την Ιακωβιανή $\partial(f,g)/\partial(z,y)$ που προκύπτει από την προηγούμενη αν αντικαταστήσουμε το x με το z, εφόσον το ζητούμενο είναι η παράγωγος dx/dz. Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε το dy/dz

Παράδειγμα. Θεωρούμε ότι το παρακάτω σύστημα $m=2$ εξισώσεων με $n=4$ μεταβλητές (x,y,u,v), ορίζει πλεγμένα τις $m=2$ μεταβλητές $\{x,y\}$ ως συναρτήσεις των υπόλοιπων $n-m=2$ μεταβλητών $\{u,v\}$. Για να εφαρμόσουμε τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης **μεταφέρουμε καταρχήν όλες τις μεταβλητές στο αριστερό μέρος και το παριστάνουμε ως συνάρτηση. Το δεξιό μέρος μπορεί να έχει μόνο σταθερές:**

$$\left.\begin{matrix} x^2+xy=u \\ x-y^2=v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x,y,u,v)=x^2+xy-u=0 \\ g(x,y,u,v)=x-y^2-v=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{matrix}\right\} \text{ με παραγώγους: } \begin{matrix} \{x_u,x_v\} \\ \{y_u,y_v\} \end{matrix},$$

Π.χ. για την μερική παράγωγο προς x ως προς u με σταθερό v, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -2y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2x+y & x \\ 1 & -2y \end{vmatrix}=\frac{2y}{4xy+2y^2+x}$$

Σημ. Εναλλακτικά μπορούμε να παραγωγίσουμε απευθείας τις δύο εξισώσεις θεωρώντας τα $\{x,y\}$ ως πλεγμένες συναρτήσεις των $\{u,v\}$. Π.χ. παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς u με σταθερό v, βρίσκουμε:

$$\begin{cases} (x^2+xy-u)_u=(0)_u \Rightarrow 2xx_u+(x_u y+xy_u)-1=0 \\ (x-y^2-v)_u=(0)_u \Rightarrow x_u-2yy_u-0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+y)x_u+xy_u=1 \\ x_u-2yy_u=0 \end{cases}$$

Έχουμε δύο *γραμμικές εξισώσεις* για τα άγνωστα $\{x_u,y_u\}$. Μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο κάνοντας απαλοιφή, ή και απευθείας με τον κανόνα Cramer:

$$x_u=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & -2y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2x+y & x \\ 1 & -2y \end{vmatrix}=\frac{2y}{4xy+2y^2+x}, \quad y_u=\begin{vmatrix} 2x+y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2x+y & x \\ 1 & -2y \end{vmatrix}=\frac{1}{4xy+2y^2+x}$$

▲

Παρατήρηση. Όπως διαπιστώσαμε παραπάνω, αν έχουμε συγκεκριμένες εξισώσεις οι πλεγμένες παράγωγοι μπορούν να βρεθούν και απευθείας χρησιμοποιώντας την **διαδικασία** πλεγμένης παραγώγισης. Στις εφαρμογές, η σημασία των **τύπων** πλεγμένης παραγώγισης είναι ότι τις συνδέουν απευθείας με τις παραγώγους της αρχικής συνάρτησης που έχουν ιδιαίτερες ερμηνείες.

▲

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

10. Διαφορικά 1^{ης} τάξεως

Οι μερικές παράγωγοι αφορούν οριακές μεταβολές των εξαρτημένων μεταβλητών όταν μεταβάλλεται κάθε φορά μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Θα εξετάσουμε τώρα την γενικότερη περίπτωση όπου μπορεί να μεταβάλλονται ταυτόχρονα περισσότερες μεταβλητές:

$$\{x, y, z, \cdots\}$$

που συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες εξισώσεις. Οι **μεταβολές** τους από κάποιες αρχικές τιμές:

$$\{\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots\}$$

ικανοποιούν αντίστοιχες **εξισώσεις μεταβολών.**

Π.χ.

$$y = y(x) \Rightarrow \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

$$z = z(x,y) \Rightarrow \Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)$$

$$f(x,y) = c \Rightarrow \Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 0$$

$$f(x,y,z) = c \Rightarrow \Delta f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = 0$$

$$\vdots$$

Ο λογισμός των μεταβολών είναι αρκετά πολύπλοκος, βασικά ισοδύναμος με τον λογισμό των αρχικών μεταβλητών. Γιαυτό τον λόγο αντί των μεταβολών χρησιμοποιούμε τα **διαφορικά:**

$$\{dx, dy, dz, \cdots\}$$

Αν έχουμε δύο μεταβλητές που συνδέονται με μια εξίσωση τότε ως γνωστόν οι μεταβολές αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις επάνω στην καμπύλη της εξίσωσης, ενώ τα διαφορικά σε μετατοπίσεις επάνω στην εφαπτόμενη ευθεία στο ίδιο σημείο. Ομοίως, αν έχουμε τρεις μεταβλητές που συνδέονται με μια εξίσωση τότε οι μεταβολές αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις πάνω στην επιφάνεια της εξίσωσης ενώ τα διαφορικά σε μετατοπίσεις πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο στο ίδιο σημείο. Στη γενική περίπτωση τα διαφορικά συνδέονται με βάση τις παρακάτω **εξισώσεις διαφορικών**, που προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις **γραμμικών προσεγγίσεων:**

$$y = y(x) \Rightarrow dy = y'(x)dx$$

$$z = z(x,y) \Rightarrow dz = z_x(x,y)dx + z_y(x,y)dy$$

$$f(x,y) = c \Rightarrow df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0$$

$$f(x,y,z) = c \Rightarrow df(x,y,z) = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz = 0$$

$$\vdots$$

και γενικότερα για περισσότερες μεταβλητές καθώς και για συστήματα εξισώσεων.

Στις παραπάνω εξισώσεις διαφορικών, οι μεταβλητές αντιμετωπίζονται καταρχήν ισοδύναμα, με την έννοια ότι δεν διακρίνουμε τις εξαρτημένες από τις ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, για τις ανεξάρτητες μεταβλητές τα διαφορικά θεωρούνται επίσης ανεξάρτητα και ταυτίζονται με τις μεταβολές, ενώ τα διαφορικά των εξαρτημένων προκύπτουν από τις εξισώσεις διαφορικών, και δίνουν προσεγγίσεις των αντίστοιχων μεταβολών. Θα διαπιστώσουμε τώρα ότι οι παραπάνω τύποι μεταξύ των διαφορικών είναι ισοδύναμοι με τους κανόνες αλυσωτής και πλεγμένης παραγώγισης.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την παρακάτω σύνθεση και τις αντίστοιχες εξισώσεις διαφορικών:

$$\{z = z(x,y),\ x = x(t),\ y = y(t)\} \Rightarrow z = z(t),$$

$$\{dz = z_x dx + z_y dy,\ dx = x'dt,\ dy = y'dt\}$$

Αντικαθιστώντας τα $\{dx, dy\}$ βρίσκουμε την σχέση:

$$dz = (z_x x' + z_y y')dt \Rightarrow \frac{dz}{dt} = z_x x' + z_y y' = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

που είναι ακριβώς ο βασικός κανόνας αλυσωτής παραγώγισης. Ισχύει και το αντίστροφο. ▲

Παράδειγμα

1. Από την εξίσωση διαφορικών με δύο μεταβλητές προκύπτει ο κανόνας πλεγμένης αραγώγισης:

$$f(x,y)=c \Rightarrow df=f_x dx+f_y dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

2. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση 3 μεταβλητών και την αντίστοιχη εξίσωση διαφορικών:

$$f(x,y,z)=\alpha \Rightarrow f_x dx+f_y dy+f_z dz=0 \Rightarrow dz=-\frac{f_x}{f_z}dx-\frac{f_y}{f_z}dy$$

Αν θεωρήσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση 3 μεταβλητών ορίζει πλεγμένα την μια μεταβλητή, έστω την z ως συνάρτηση των άλλων δύο $\{x,y\}$, τότε θα έχουμε και την αντίστοιχη εξίσωση διαφορικών:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Συγκρίνοντας τις δυο παραστάσεις και παίρνοντας υπόψη ότι τα $\{dx,dy\}$ είναι ανεξάρτητα, και επομένως μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές, βρίσκουμε τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

3. Θεωρούμε τέλος και ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 3 μεταβλητές, και τις αντίστοιχες εξισώσεις διαφορικών:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z)=\alpha \\ g(x,y,z)=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x dx+f_y dy+f_z dz=0 \\ g_x dx+g_y dy+g_z dz=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x dx+f_y dy=-f_z dz \\ g_x dx+g_y dy=-g_z dz \end{array}\right\}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το παραπάνω σύστημα ορίζει πλεγμένα τις δύο μεταβλητές (x,y) ως συναρτήσεις της τρίτης z, τότε λύνοντας το **γραμμικό σύστημα** ως προς $\{dx,dy\}$ με τον κανόνα Cramer, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f_x dx+f_y dy=-f_z dz \\ g_x dx+g_y dy=-g_z dz \end{array}\right\} \Rightarrow dx=\frac{\begin{vmatrix} -f_z dz & f_y \\ -g_z dz & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_z & f_y \\ g_y & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}dz,\quad dy=\frac{\begin{vmatrix} f_x & -f_z dz \\ g_x & -g_z dz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}dz$$

διότι σύμφωνα με τις ιδιότητες των οριζουσών ένας κοινός παράγοντας σόλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης μπορεί να βγει έξω από την ορίζουσα. Προκύπτουν έτσι οι γνωστοί τύποι πλεγμένης παραγώγισης, διότι έχουμε και τις αντίστοιχες σχέσεις:

$$\{x=x(z),\ y=y(z)\} \Rightarrow \{dx=x'(z)dz,\ dy=y'(z)dz\}$$

▲

Παρατήρηση. Προκύπτει ως συνέπεια ενός θεωρήματος μέσης τιμής για πολλές μεταβλητές (**θεμελιώδης σχέση**) ότι για μικρές μεταβολές τα διαφορικά των εξαρτημένων δίνουν μια εκτίμηση των μεταβολών τους, με την έννοια ότι στο όριο ο λόγος τους τείνει στη μονάδα. Λόγω των παραπάνω ιδιοτήτων τα διαφορικά καλούνται και **οριακές μεταβολές.** Ειδικότερα **τα πρόσημα των μεταβολών συμπίπτουν με τα πρόσημα των διαφορικών, όταν αυτά είναι μη μηδενικά.**

Παρατήρηση. Σε αντίθεση με τις εξισώσεις μεταβολών που είναι πολύπλοκες μη γραμμικές και έχουν πολύπλοκο λογισμό, οι εξισώσεις των διαφορικών είναι απλές *γραμμικές εξισώσεις* και διέπονται από τον ίδιο απλό λογισμό όπως οι παράγωγοι. Έτσι για δύο μεταβλητές $\{u,v\}$, είτε ανεξάρτητες είτε εξαρτημένες από άλλες, θα έχουμε:

$$d(\alpha u+\beta v)=\alpha du+\beta dv,\quad d(uv)=vdu+udv,\quad d(u/v)=(vdu-udv)/v^2$$

$$d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du,\quad d(e^u)=e^u du,\quad d\ln|u|=du/u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

11. Κανονικά σημεία μιας εξίσωσης:

$$f(x,y)=c$$

καλούνται τα **σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση** και στα οποία δεν μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι. Υποθέτοντας συναρτήσεις συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε στα κανονικά σημεία ισχύουν τα γνωστά:

1. Αν $f_y \neq 0$ τότε η εξίσωση ορίζει πλεγμένα το y ως (μονότιμη) συνάρτηση του x και ισχύουν οι αντίστοιχοι κανόνες πλεγμένης παραγώγισης.
2. Αν $f_x \neq 0$ τότε η εξίσωση ορίζει πλεγμένα το x ως (μονότιμη) συνάρτηση του y και ισχύουν οι αντίστοιχοι κανόνες πλεγμένης παραγώγισης.

Αντίθετα, στην γειτονιά των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση και στα οποία μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι της αντίστοιχης συνάρτησης:

$$\{f(x,y)=c,\ f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0\}$$

μπορεί να μην ορίζονται (μονότιμα) πλεγμένες συναρτήσεις, οπότε δεν έχουμε και τους κανόνες πλεγμένης παραγώγισης. Καλούνται **μη κανονικά** ή **ιδιάζοντα** σημεία**.**

Παράδειγμα

1. Η $x^2-y^2=0$ έχει όλα τα σημεία της κανονικά εκτός από το σημείο της $(0,0)$ όπου μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι της αντίστοιχης συνάρτησης x^2-y^2:

$$\{f=x^2-y^2=0,\ f_x=2x=0,\ f_y=-2y=0\} \Rightarrow \{x=0, y=0\}$$

Στο σημείο αυτό η εξίσωση σχηματίζει τεμνόμενες ευθείες και **δεν ορίζεται μονοσήμαντα** ούτε συνάρτηση ούτε η κλίση.

2. Η $x^2+y^2=1$ έχει όλα τα σημεία της κανονικά διότι το μοναδικό σημείο $(0,0)$ όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι **δεν ανήκει** στην εξίσωση.

▲

Γενικά, **κανονικά σημεία** μιας εξίσωσης πολλών μεταβλητών είναι τα σημεία της στα οποία δεν μηδενίζεται τουλάχιστον μια μερική παράγωγος της αρχικής συνάρτησης, οπότε υποθέτοντας συνέχειες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση ορίζει πλεγμένα την αντίστοιχη μεταβλητή ως συνάρτηση των υπολοίπων. Γενικότερα, αν έχουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n μεταβλητές, όπου $m<n$, τότε **κανονικά** είναι τα σημεία τους στα οποία δεν μηδενίζεται τουλάχιστον μια Ιακωβιανή ορίζουσα των m συναρτήσεων ως προς κάποιες m μεταβλητές. Σαυτή την περίπτωση, υποθέτοντας συνέχειες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα ορίζει πλεγμένα αυτές τις m μεταβλητές ως συναρτήσεις των υπόλοιπων $n-m$ οπότε και ισχύουν οι αντίστοιχοι τύποι πλεγμένης παραγώγισης. Έτσι, οι τύποι πλεγμένης παραγώγισης ισχύουν **οπωσδήποτε** μόνο στα κανονικά σημεία.

12. Ορίζουσες

Μια **ορίζουσα διάστασης** n είναι ένας αριθμός που ορίζεται από μια τετραγωνική διάταξη $n \cdot n$ το πλήθος αριθμών, τοποθετημένων σε n γραμμές και n στήλες. Οι ορίζουσες υπολογίζονται επαγωγικά ως προς την διάσταση, αρχίζοντας με την ορίζουσα διάστασης 2:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$$

Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα διάστασης n ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. *Σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας αντιστοιχούμε ένα πρόσημο. Τα πρόσημα εναλλάσσονται αρχίζοντας με θετικό πρόσημο για το πρώτο στοιχείο πάνω αριστερά, όπως φαίνεται παρακάτω.*

2. *Σε κάθε στοιχείο της ορίζουσας αντιστοιχούμε την ορίζουσα διάστασης $n-1$ που προκύπτει από την αρχική αν της αφαιρέσουμε τη γραμμή και τη στήλη του συγκεκριμένου στοιχείου.*

3. *Για να υπολογίσουμε την αρχική ορίζουσα επιλέγουμε μια οιαδήποτε γραμμή ή στήλη της και προσθέτουμε τους n όρους που προκύπτουν αν πάρουμε κάθε στοιχείο της με το αντίστοιχο πρόσημο που ορίστηκε παραπάνω στο 1 και το πολλαπλασιάσουμε με την αντίστοιχη ορίζουσα διάστασης $n-1$ που ορίστηκε παραπάνω στο 2. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα της γραμμής ή στήλης που θα χρησιμοποιήσουμε, και είναι η ζητούμενη ορίζουσα.*

Παράδειγμα. Θεωρούμε μια ορίζουσα διάστασης $n = 3$, και αντιστοιχούμε πρώτα τα πρόσημα:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Το ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή μας δίνει:

$$|A| = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Αρκεί τώρα να αντικαταστήσουμε για τις ορίζουσες διάστασης 2 από τον παραπάνω τύπο. Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε αν πάρουμε το ανάπτυγμα ως προς την 2η γραμμή:

$$|A| = -\beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Για συγκεκριμένες ορίζουσες συνήθως αναπτύσσουμε ως προς μια γραμμή ή στήλη που έχει πολλά μηδενικά. Π.χ. αναπτύσσοντας την παρακάτω ορίζουσα ως προς την τρίτη στήλη βρίσκουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1(4+3) - 2(8+1) + 0 = -25$$

▲

Οι ορίζουσες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. *Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων στη διαγώνιο*

2. *Η εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας*

3. *Ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (στήλης) με αριθμό, πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με τον ίδιο αριθμό. Επομένως, αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα διάστασης n με έναν αριθμό λ, τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται με λ^n.*

13. Κανόνας Cramer

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και μεταβλητών. Η λύση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί μέσω οριζουσών σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα Cramer.

Η τιμή της κάθε μεταβλητής δίνεται από ένα κλάσμα όπου:

1. *Στον παρανομαστή εμφανίζεται πάντοτε η ορίζουσα των συντελεστών στο αριστερό μέρος του συστήματος, την οποία υποθέτουμε μη μηδενική.*

2. *Στον αριθμητή εμφανίζεται η ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα στον παρανομαστή αν αντικαταστήσουμε την στήλη που αντιστοιχεί στους συντελεστές της συγκεκριμένης μεταβλητής με την στήλη των σταθερών στο δεξιό μέρος του συστήματος.*

Π.χ.

1. οι τιμές των (x, y) στο παρακάτω σύστημα, βρίσκονται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = c_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & \beta_1 \\ c_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1\beta_2 - c_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

2. Η τιμή του x στο παρακάτω σύστημα δίνεται από την παράσταση:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x \ +\beta_1 y \ +\gamma_1 z = c_1 \\ \alpha_2 x \ +\beta_2 y \ +\gamma_2 z = c_2 \\ \alpha_3 x \ +\beta_3 y \ +\gamma_3 z = c_3 \end{array} \Rightarrow x = \begin{vmatrix} c_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ c_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ c_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Αντίστοιχα υπολογίζονται και οι τιμές των $\{y, z\}$.