II.5 ΕΣΣΙΑΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ (Β)

$2^{ες}$ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1.Δεύτερες μερικές παράγωγοι

Οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης $f(x,y)$ είναι επίσης συναρτήσεις δύο μεταβλητών και μπορούμε να τις παραγωγίσουμε εκ νέου. Προκύπτουν έτσι **4 μερικές παράγωγοι 2ης τάξης**:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ή σε διάταξη πίνακα: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Οι **απλές μερικές παράγωγοι 2ης τάξης:** $\{f_{xx}, f_{yy}\}$, αναφέρονται στην εξάρτηση από την κάθε μεταβλητή χωριστά, και έχουν την γνωστή ερμηνεία όπως για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.
Οι **μεικτές μερικές παράγωγοι 2ης τάξης:** $\{f_{xy}, f_{yx}\}$, αναφέρονται στην μεταβολή αμφοτέρων των μεταβλητών, όπου εξετάζουμε την μεταβολή του f_x όταν μεταβάλλεται το y ή την μεταβολή του f_y όταν μεταβάλλεται το x, αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι είναι *συνεχείς,* αποδεικνύεται ότι είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή **δεν παίζει ρόλο η σειρά παραγώγισης:**

$f_{xy} = f_{yx}$, *θεώρημα Young*

Τα πρόσημα των δεύτερων παραγώγων αφορούν τις ιδιότητες μονοτονίας των πρώτων παραγώγων όταν μια μεταβλητή μεταβάλλεται. Π.χ. **καθώς το x αυξάνει:**
1. f_x αυξάνει αν $f_{xx} > 0$, ελαττώνεται αν $f_{xx} < 0$ 2. f_y αυξάνει αν $f_{yx} > 0$, ελαττώνεται αν $f_{yx} < 0$

Παράδειγμα

1. Οι **γραμμικές** συναρτήσεις έχουν όλες τις δεύτερες παραγώγους μηδενικές:

$$L = \alpha x + \beta y + \gamma \Rightarrow \begin{cases} f_x = \alpha \\ f_y = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = 0,\ f_{xy} = 0 \\ f_{yx} = 0,\ f_{yy} = 0 \end{cases}$$

2. Οι **τετραγωνικές (παραβολικές)** συναρτήσεις έχουν όλες τις δεύτερες παραγώγους σταθερές:

$$Q = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta \Rightarrow \begin{cases} f_x = 2\alpha x + 2\beta y \\ f_y = 2\beta x + 2\gamma y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = 2\alpha,\ f_{xy} = 2\beta \\ f_{yx} = 2\beta,\ f_{yy} = 2\gamma \end{cases}$$

3. C-D συναρτήσεις: $U = x^\alpha y^\beta \Rightarrow \begin{cases} U_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\ U_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_{xx} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & U_{xy} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ U_{yx} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & U_{yy} = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{pmatrix}$

4. CES συναρτήσεις: $f(x,y) = \alpha x^r + \beta y^r \Rightarrow \begin{cases} f_x = \alpha r x^{r-1} \\ f_y = \beta r y^{r-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_{xx} = \alpha r(r-1)x^{r-2} & 0 \\ 0 & f_{yy} = \beta r(r-1)y^{r-2} \end{pmatrix}$

5. $f = x^2 + xy^2 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x + y^2 \\ f_y = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 2y \\ f_{yx} = 2y,\ f_{yy} = 2x \end{cases}$

6. $f = x^{1/2}y^{1/4} - \alpha x - \beta y \Rightarrow \begin{cases} f_x = x^{-1/2}y^{1/4}/2 - \alpha \\ f_y = x^{1/2}y^{-3/4}/4 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = -x^{-3/2}y^{1/4}/4,\ f_{xy} = x^{-1/2}y^{-3/4}/8 \\ f_{yx} = x^{-1/2}y^{-3/4}/8,\ f_{yy} = -3x^{1/2}y^{-7/4}/16 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι **οι γραμμικοί όροι δεν επηρεάζουν τις $2^{ες}$ παραγώγους** ▲

2. Παραβολική ή τετραγωνική προσέγγιση

μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε κάποιο σημείο (x_0,y_0) καλείται η παραβολική συνάρτηση που έχει την ίδια τιμή και τις ίδιες μερικές παραγώγους μέχρι 2ης τάξης στο σημείο. Έχει την παράσταση:

$$z = f_0 + [f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)] + \frac{1}{2}[f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2]$$

όπου: $f_0 = f(x_0,y_0),\ f_x = f_x(x_0,y_0), \ldots$κλπ.

Δηλαδή όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο συγκεκριμένο σημείο (x_0,y_0). Είναι μια συμπλήρωση της γνωστής γραμμικής προσέγγισης. Η γραμμική και η παραβολική προσέγγιση είναι οι πρώτες μιας ακολουθίας προσεγγίσεων με πολυώνυμα αυξανόμενου βαθμού, που καλούνται **πολυώνυμα Taylor.**

Παράδειγμα. Θα δώσουμε την γραμμική και την παραβολική προσέγγιση της συνάρτησης:

$$f = x^3 + xy + y^2, \text{ στο } (x_0 = 1, y_0 = 0) \Rightarrow f_0 = 1, \left.\begin{matrix} f_x = 3x^2 + y = 3 \\ f_y = x + 2y = 1 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} f_{xx} = 6x = 6, f_{xy} = 1 \\ f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2 \end{matrix}\right\}$$

$f_{γρ} = 1 + [3(x-1) + y] = -2 + 3x + y$, γραμμική προσέγγιση

$$f_{παρ} = 1 + [3(x-1) + y] + \frac{1}{2}[6(x-1)^2 + 2(x-1)y + 2y^2], \text{ παραβολική προσέγγιση}$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 + y^2 + xy$$

▲

Παρατήρηση. Στα πολυώνυμα, όπως το παραπάνω, μπορούμε να αναπτύξουμε σε δυνάμεις των $\{x-x_0, y-y_0\}$, αντικαθιστώντας:

$$x = (x-x_0) + x_0, \quad y = (y-y_0) + y_0$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την γραμμική προσέγγιση κρατώντας μόνο τις δυνάμεις μέχρι 1ου βαθμού, και την παραβολική κρατώντας μόνο τις δυνάμεις μέχρι 2ου βαθμού.

▲

3. Κυρτές/κοίλες συναρτήσεις

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x,y)$ με *κυρτή περιοχή ορισμού.*, και λέμε ότι η συνάρτηση είναι:

$x-$ **κυρτή (κοίλη)** αν $f_{xx} \geq 0$ $(f_{xx} \leq 0)$

$y-$ **κυρτή (κοίλη)** αν $f_{yy} \geq 0$ $(f_{yy} \leq 0)$

Τα παραπάνω αφορούν τις γνωστές ιδιότητες συναρτήσεων όταν μεταβάλλεται μόνο μία μεταβλητή. Γενικότερα, όταν μπορούν να μεταβάλλονται αμφότερες οι μεταβλητές λέμε ότι η συνάρτηση είναι:

- **κυρτή** $\Leftrightarrow \{f_{xx} \geq 0,\ f_{yy} \geq 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} \geq f^2{}_{xy}\}$ σε όλα τα σημεία στην περιοχή
- **κοίλη** $\Leftrightarrow \{f_{xx} \leq 0,\ f_{yy} \leq 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0 \Rightarrow f_{xx}f_{yy} \geq f^2{}_{xy}\}$ σε όλα τα σημεία στην περιοχή

Επιπλέον η συνάρτηση θα είναι **γνήσια κυρτή/κοίλη** αν οι παραπάνω ανισότητες είναι γνήσιες σε όλα τα σημεία στην περιοχή, εκτός ίσως από ένα διακριτό πλήθος σημείων. Το μέγεθος που εμφανίζεται παραπάνω καλείται:

$\Delta_f = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy}$, **διακρίνουσα** των δεύτερων παραγώγων

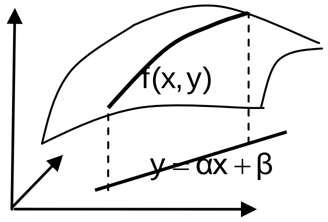
Έτσι, για να έχουμε κυρτότητα (κοιλότητα), θα πρέπει σε κάθε περίπτωση η διακρίνουσα να είναι θετική. Δηλαδή, εκτός από τα γνωστά πρόσημα των απλών δεύτερων παραγώγων, θα πρέπει επιπλέον η **μεικτή δεύτερη παράγωγος να είναι σχετικά μικρή σε απόλυτη τιμή**.

Η γραμμική συνάρτηση:

$$f(x,y) = αx + βy + γ,$$

που ικανοποιεί όλες τις ανισώσεις ως ισότητες, θεωρείται **και κυρτή και κοίλη,** όχι γνήσια.

Παρατήρηση. Οι κατακόρυφες τομές της επιφάνειας προς διάφορες κατευθύνσεις προκύπτουν παίρνοντας την σύνθεση της συνάρτησης με γραμμικές συναρτήσεις της μορφής: $y=\alpha x+\beta$, που παριστάνουν ευθείες στο επίπεδο. Έτσι η $f(x,y)$ θα είναι π.χ. κυρτή αν είναι κυρτή η σύνθεση:



$\{f(x,y), y=\alpha x+\beta\} \Rightarrow f(x)$, **για όλα τα** $\{\alpha,\beta\}$

δηλαδή αν είναι θετική η δεύτερη παράγωγος: $f''(x)\ge 0$, **για όλα τα** $\{\alpha,\beta\}$. Υπολογίζοντας την αλυσωτή δεύτερη παράγωγο, βρίσκουμε:

$$f' = f_x + f_y\alpha \Rightarrow f'' = (f_x)' + (f_y)'\alpha = (f_{xx}+f_{xy}\alpha)+(f_{yx}+f_{yy}\alpha)\alpha$$
$$= f_{xx} + 2f_{xy}\alpha + f_{yy}\alpha^2 \ge 0$$

Η ανισότητα ισχύει για όλα τα $\alpha \Leftrightarrow$ ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$f_{xx}\ge 0,\ f_{yy}\ge 0,\ f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}\le 0$$

που είναι το ζητούμενο. Αντίστοιχα για κοίλη.

▲

Παράδειγμα. $f(x,y)=x^3+y^3 \Rightarrow \{f_x = 3x^2,\ f_y=3y^2\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f_{xx}=6x,\ f_{xy}=0 \\ f_{yx}=0,\ f_{yy}=6y \end{matrix}\right\},\ \Delta = 36xy$

Είναι κυρτή στη θετική περιοχή: $\{x\ge 0, y\ge 0\}$, γνήσια κυρτή στη γνήσια θετική: $\{x>0, y>0\}$.

Παράδειγμα. CES**;** $f(x,y)=x^r+y^r$ με $r\neq 0$, στη θετική περιοχή: $\{x\ge 0, y\ge 0\}$

Για $r=1$ είναι γραμμική. Θα δείξουμε ότι για $r\neq 1$ η συνάρτηση είναι:

1. κυρτή αν $r>1$ ή $r<0$. **2.** κοίλη αν $0<r<1$

Λύση. Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\left.\begin{matrix} f_x = rx^{r-1} \\ f_y = ry^{r-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=r(r-1)x^{r-2},\ f_{xy}=0 \\ f_{yx}=0,\ f_{yy}=r(r-1)y^{r-2}\end{matrix}\right\},\ \Delta_f = r^2(r-1)^2x^{r-2}y^{r-2}$$

Για $r>1$ έχουμε: $\{f_{xx}\ge 0,\ f_{yy} 0,\ge \Delta_f \ge 0\}$, οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή, γνήσια κυρτή στη γνήσια θετική περιοχή. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Η C-D: $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ με $\alpha>0,\ \beta>0$ στη θετική περιοχή: $\{x\ge 0, y\ge 0\}$

είναι κοίλη $\Leftrightarrow \alpha+\beta\le 1$.

Λύση. Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\left.\begin{matrix} f_x = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta \\ f_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y,\ f_{xy}=\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ f_{xy}=\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1},\ f_{yy}=\beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}\end{matrix}\right\}$$

$$\Delta_f = [\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta][\beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}] - [\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}]^2$$
$$= \alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} - \alpha^2\beta^2x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}$$
$$= (1-\alpha-\beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}$$

Η συνάρτηση θα είναι κοίλη $\Leftrightarrow$

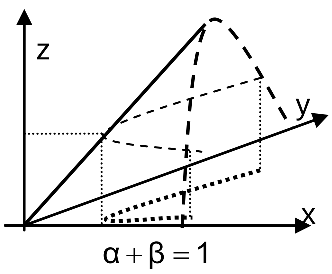
$\{f_{xx}\le 0 : \alpha\le 1\},\ \{f_{yy}\le 0 : \beta\le 1\},\ \{\Delta_f\ge 0 : \alpha+\beta\le 1\}$

ή ισοδύναμα: $\alpha+\beta\le 1$, διότι τα $\{\alpha,\beta\}$ είναι θετικά

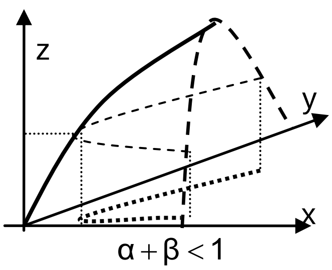
Παρατήρηση.

Για $\alpha+\beta=1$ είναι κοίλη αλλά όχι γνήσια.

Για $\alpha+\beta<1$ είναι γνήσια κοίλη στην γνήσια θετική περιοχή: $\{x>0,\ y>0\}$



$\alpha+\beta=1$



$\alpha+\beta<1$

Παρατήρηση. Οι ιδιότητες κυρτότητας μιας συνάρτησης **δεν μεταβάλλονται αν προσθέσουμε μια γραμμική συνάρτηση** διότι οι δεύτερες παράγωγοι παραμένουν ίδιες. Επομένως το καθένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων έχουν τις ίδιες ιδιότητες κυρτότητας:

$$\{x^\alpha y^\beta,\ x^\alpha y^\beta+\gamma x+\delta y+\varepsilon\},\quad \{x^r+y^r,\ x^r+y^r+\gamma x+\delta y+\varepsilon\}$$

Παρατήρηση. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την κυρτότητα σένα γενικότερο πλαίσιο που επιτρέπει την άμεση γενίκευση σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

▲

4.Τετραγωνικές μορφές

Οι γραμμικές συναρτήσεις ορίζουν **επίπεδες επιφάνειες,** όπου οι σταθερές μερικές παράγωγοι μας δίνουν τις κλίσεις της επιφάνειας στις δύο κατευθύνσεις**.** Θα εξετάσουμε τώρα τις επιφάνειες που ορίζουν οι τετραγωνικές συναρτήσεις 2 μεταβλητών, και ειδικότερα οι **ομογενείς τετραγωνικές συναρτήσεις** δύο μεταβλητών, που περιέχουν μόνο τετραγωνικούς όρους:

$$Q(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

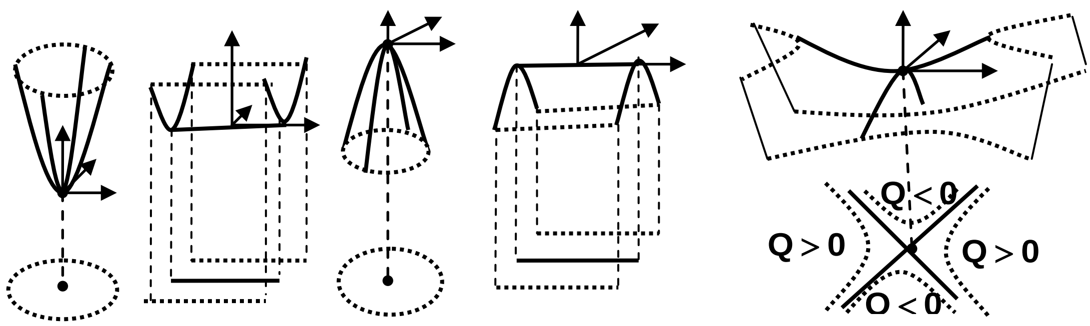
Καλούνται και **τετραγωνικές μορφές.** Ειδικά μας ενδιαφέρουν τα πρόσημά τους στα διάφορα σημεία του επιπέδου. Παρατηρούμε καταρχήν ότι έχουν μηδενική τιμή στο μηδενικό σημείο:

$$Q(0,0) = 0$$

Θεωρώντας λοιπόν τα πρόσημά μόνο στα **μη μηδενικά σημεία**, η τετραγωνική μορφή χαρακτηρίζεται ως εξής:

1α. Θετικά ορισμένη……… $Q > 0$, τιμές μόνο γνήσια θετικές, (γνήσια κυρτή)
1β. Θετικά ημιορισμένη….. $Q \geq 0$, τιμές γνήσια θετικές ή μηδενικές, (κυρτή)
2α. Αρνητικά ορισμένη…… $Q < 0$, τιμές μόνο γνήσια αρνητικές, (γνήσια κοίλη)
2β. Αρνητικά ημιορισμένη.. $Q \leq 0$, τιμές γνήσια αρνητικές ή μηδενικές, (κοίλη)
3. Αόριστη……………… $Q >< 0$, τιμές και γνήσια θετικές και γνήσια αρνητικές, (ούτε κυρτή ούτε κοίλη)

Η ημιορισμένη είναι ευρύτερη κατηγορία από την ορισμένη. Αν μια ημιορισμένη μορφή δεν είναι ορισμένη, τότε λέμε ότι είναι **ημιορισμένη-μη ορισμένη.** Δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα των επιφανειών και των ισοσταθμικών που ορίζονται από τις συναρτήσεις των τετραγωνικών μορφών σε κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις.



$Q > 0$	$Q \geq 0$	$Q < 0$	$Q \leq 0$	$Q >< 0$
$x^2 + y^2$	$0x^2 + y^2$	$-x^2 - y^2$	$0x^2 - y^2$	$x^2 - y^2$
1α	**1β**	**2α**	**2β**	**3**
θετικά		**αρνητικά**		**αόριστη**

Ο χαρακτηρισμός είναι απλός αν δεν υπάρχει μεικτός όρος:

$$\beta = 0 \Rightarrow Q = \alpha x^2 + \gamma y^2$$

Η τετραγωνική μορφή θα είναι θετική αν τα $\{\alpha, \gamma\}$ είναι αμφότερα θετικά, αρνητική αν είναι αμφότερα αρνητικά, αόριστη αν έχουν αντίθετο πρόσημο. Ειδικότερα:

Χαρακτηρισμός τετραγωνικής μορφής χωρίς μεικτό όρο: $\beta = 0 \Rightarrow Q = \alpha x^2 + \gamma y^2$

1α. $Q > 0$: $\{\alpha > 0, \gamma > 0\} \Rightarrow \alpha\gamma > 0$, **θετικά ορισμένη.** $\{\alpha, \gamma\}$ θετικά, γνήσια
1β. $Q \geq 0$: $\{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0\} \Rightarrow \alpha\gamma \geq 0$, **θετικά ημιορισμένη** $\{\alpha, \gamma\}$ θετικά
2α. $Q < 0$: $\{\alpha < 0, \gamma < 0\} \Rightarrow \alpha\gamma > 0$, **αρνητικά ορισμένη** $\{\alpha, \gamma\}$ αρνητικά, γνήσια
2β. $Q \leq 0$: $\{\alpha \leq 0, \gamma \leq 0\} \Rightarrow \alpha\gamma \geq 0$, **αρνητικά ημιορισμένη** $\{\alpha, \gamma\}$ αρνητικά
3. $Q >< 0$: $\alpha\gamma < 0$, **αόριστη:** $\{\alpha, \gamma\}$ αντίθετο πρόσημο, γνήσια

Στην γενική περίπτωση βρίσκουμε τα πρόσημα γράφοντάς την τετραγωνική μορφή ως τριώνυμο:

$$Q = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \left[\alpha + 2\beta\frac{y}{x} + \gamma\frac{y^2}{x^2}\right]x^2 = (\alpha + 2\beta u + \gamma u^2)x^2 \quad \text{όπου: } u = \frac{y}{x}$$

Ο παρακάτω χαρακτηρισμός προκύπτει άμεσα από την γνωστή θεωρία για το πρόσημο τριώνυμου, χρησιμοποιώντας και την παράσταση:

$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$, **διακρίνουσα**

Χαρακτηρισμός τετραγωνικών μορφών: $Q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$

1α. $Q > 0$: $\{\alpha > 0,\ \gamma > 0\}$ **και** $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta^2$, **θετικά ορισμένη**

1β. $Q \geq 0$: $\{\alpha \geq 0,\ \gamma \geq 0\}$ **και** $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha\gamma \geq \beta^2$, **θετικά ημιορισμένη**

2α. $Q < 0$: $\{\alpha < 0,\ \gamma < 0\}$ **και** $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta^2$, **αρνητικά ορισμένη**

2β. $Q \leq 0$: $\{\alpha \leq 0,\ \gamma \leq 0\}$ **και** $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha\gamma \geq \beta^2$, **αρνητικά ημιορισμένη**

3. $Q >< 0$ $\qquad \Delta = \alpha\gamma - \beta^2 < 0 \Rightarrow \alpha\gamma < \beta^2$, **αόριστη**

Παρατήρηση. Στις περιπτώσεις {**1β, 2β**}, αν έχουμε $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha\gamma = \beta^2$, τότε λέμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι **ημιορισμένη-μη ορισμένη.** Σαυτή την περίπτωση η παράσταση είναι **τέλειο τετράγωνο** και έχει μια ολόκληρη ευθεία με μηδενικές τιμές, που προκύπτει και ως η ευθεία των στάσιμων σημείων. Οι συνθήκες στασιμότητας μας δίνουν το γραμμικό ομογενές σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} Q_x = 0 \\ Q_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 0 \\ \beta x + \gamma y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{με ορίζουσα: } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2$$

που είναι ακριβώς η παραπάνω *διακρίνουσα* της τετραγωνικής μορφής. Συμπεραίνουμε τα εξής:

1. Αν $\Delta \neq 0$, μοναδικό στάσιμο σημείο είναι το μηδενικό: $(0,0)$, και οι αντίστοιχες επιφάνειες είναι όπως οι **{1α, 2α}** στα παραπάνω σχήματα.

2. Αν $\Delta = 0$, οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες και τα στάσιμα σημεία σχηματίζουν μια ολόκληρη ευθεία που διέρχεται από το μηδενικό: $(0,0)$. Στα σημεία της η τετραγωνική μορφή έχει μηδενική τιμή, και και οι αντίστοιχες επιφάνειες είναι όπως οι **{1β, 2β}** στα παραπάνω σχήματα.

Παράδειγμα

1. $Q = x^2 + y^2 \Rightarrow \{\alpha = 1 > 0,\ \gamma = 1 > 0,\ \beta = 0 \Rightarrow \Delta = 1 > 0\}$, θετικά ορισμένη

2. $Q = -x^2 - 2xy - y^2 \Rightarrow \{\alpha = -1 < 0,\ \gamma = -1 < 0,\ \beta = -1 \Rightarrow \Delta = 0\}$, αρνητικά ημιορισμένη-μη ορισμένη

Πράγματι η τετραγωνική μορφή σχηματίζει τέλειο τετράγωνο:

$$Q = -(x + y)^2 \leq 0$$

Έχει μηδενικές τιμές στην ευθεία: $Q = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$, γνήσια αρνητικές στα υπόλοιπα σημεία.

3. $Q = x^2 - y^2 \Rightarrow \{\alpha = 1,\ \gamma = -1,\ \beta = 0 \Rightarrow \Delta = -1 < 0\}$, αόριστη

Είναι $Q > 0$ όταν $y^2 < x^2 \Rightarrow |y| \leq |x|$, $Q < 0$ όταν $y^2 > x^2 \Rightarrow |y| \geq |x|$, $Q = 0$ όταν $y^2 = x^2 \Rightarrow |y| = |x|$.

4. $Q = xy \Rightarrow \{\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \beta = 1/2 \Rightarrow \Delta = -1/4 < 0\}$, αόριστη

Είναι $Q > 0$ όταν $xy > 0$ δηλαδή στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, $Q < 0$ όταν $xy < 0$ δηλαδή στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο, $Q = 0$ όταν $xy = 0$ δηλαδή στους άξονες.

▲

Παρατήρηση. Συμβατικά ο όρος «**διακρίνουσα**» χρησιμοποιείται γενικά για να διακρίνει μεταξύ τους τις διάφορες περιπτώσεις, και ορίζεται κατά περίπτωση.

▲

5. Χαρακτηρισμός συμμετρικών πινάκων

Θεωρούμε την παρακάτω αντιστοιχία μεταξύ τετραγωνικών μορφών μεταβλητών και συμμετρικών πινάκων, και μεταφέρουμε τον παραπάνω χαρακτηρισμό στους συμμετρικούς πίνακες:

$$Q = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \text{ με } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2$$

Η διακρίνουσα της τετραγωνικής μορφής συμπίπτει με την ορίζουσα του πίνακα. Έτσι, ένας **συμμετρικός πίνακας** χαρακτηρίζεται ως:

1α. Θετικά ορισμένος……… $S > 0 \Leftrightarrow Q > 0$**:** $\{\alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \Delta > 0\}$

1β. Θετικά ημιορισμένος….. $S \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq 0$**:** $\{\alpha \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \Delta \geq 0\}$

2α. Αρνητικά ορισμένος…… $S < 0 \Leftrightarrow Q < 0$**:** $\{\alpha < 0,\ \gamma < 0,\ \Delta > 0\}$

2β. Αρνητικά ημιορισμένος.. $S \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 0$**:** $\{\alpha \leq 0,\ \gamma \leq 0,\ \Delta \geq 0\}$

3. Αόριστος………………... $S >< 0 \Leftrightarrow Q >< 0$**:** $\Delta < 0$

6. Εσσιανός πίνακας

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και με τις δεύτερες παραγώγους ως στοιχεία, σχηματίζουμε έναν **συμμετρικό πίνακα** 2×2 τον οποίο παριστάνουμε μένα από τα σύμβολα:

$$H_f \text{ ή } D^2 f \text{ ή } f'' = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, \text{ όπου: } f_{xy} = f_{yx}$$

Καλείται **δεύτερη παράγωγος** ή **Εσσιανός (Hessian) πίνακας** δεύτερων παραγώγων. Η αντίστοιχη ορίζουσα καλείται **εσσιανή ορίζουσα:**

$$\Delta_f \text{ ή } |H_f| \text{ ή } |f''| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

Είναι η γνωστή **διακρίνουσα.** Για τον παραπάνω Εσσιανό πίνακα της δεύτερης παραγώγου χρησιμοποιούμε την ορολογία που αναπτύξαμε παραπάνω για συμμετρικούς πίνακες. Έτσι λέμε ότι είναι:

θετικά ορισμένος,(ημιορισμένος), αρνητικά ορισμένος (ημιορισμένος), αόριστος

Παρατηρούμε τώρα ότι οι χαρακτηρισμοί της κυρτότητας μπορούν να διατυπωθούν χρησιμοποιώντας τον παραπάνω εσσιανό πίνακα, οπότε η συνάρτηση είναι:

- **κυρτή** αν ο εσσιανός πίνακας είναι **θετικά ημιορισμένος** σε **όλα τα σημεία** στην περιοχή:
  $f'' = H_f \geq 0 : \{f_{xx} \geq 0,\ f_{yy} \geq 0,\ \Delta = f_{xx} f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0\}$
- **κοίλη** αν ο εσσιανός πίνακας είναι **αρνητικά ημιορισμένος** σε **όλα τα σημεία** στην περιοχή:
  $f'' = H_f \leq 0 : \{f_{xx} \leq 0,\ f_{yy} \leq 0,\ \Delta = f_{xx} f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0\}$

Επιπλέον θα είναι **γνήσια κυρτή/κοίλη** αν ο εσσιανός πίνακας είναι **ορισμένος θετικά/αρνητικά** σε όλα τα σημεία στην περιοχή, εκτός ίσως από ένα διακριτό πλήθος σημείων.

Παρατήρηση. Στην παραπάνω μορφή ο χαρακτηρισμός της κυρτότητας αντιστοιχεί στον γνωστό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής χρησιμοποιώντας την $2^η$ παράγωγο. Γεωμετρικά, η κυρτότητα της $f(x, y)$ χαρακτηρίζεται από τις αντίστοιχες ιδιότητες κυρτότητας των κατακόρυφων τομών της επιφάνειας: $z = f(x, y)$, προς **όλες τις κατευθύνσεις,** όπως διαπιστώσαμε και προηγουμένως. Οι γραμμικές συναρτήσεις θεωρούνται και κυρτές και κοίλες, αλλά όχι γνήσια.

▲

7. Περισσότερες μεταβλητές.

Μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ έχει 3 παραγώγους 1ης τάξης:

$\{f_x, f_y, f_z\}$

Στη συνέχεια έχει $3^2=9$ παραγώγους 2ης τάξης, εκ των οποίων μόνο οι 6 μπορεί να είναι διαφορετικές, διότι **η σειρά παραγώγισης δεν παίζει ρόλο,** υποθέτοντας ότι είναι συνεχείς**.** Σχηματίζουν έναν συμμετρικό πίνακα διάστασης 3, που καλείται **δεύτερη παράγωγος** ή **Εσσιανός πίνακας** δεύτερων παραγώγων, και παριστάνεται μένα από τα σύμβολα:

$$D^2f = f'' = H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}, \text{ όπου: } f_{xy}=f_{yx},\ f_{xz}=f_{zx},\ f_{yz}=f_{zy}$$

Οι ιδιότητες κυρτότητας της συνάρτησης χαρακτηρίζονται από το πρόσημο του παραπάνω εσσιανού πίνακα, σύμφωνα με την **γενική θεωρία χαρακτηρισμού συμμετρικών πινάκων** που παρουσιάζεται σε ειδικό κεφάλαιο της Γραμμικής Άλγεβρας, χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία με τις τετραγωνικές μορφές 3 μεταβλητών, και τους αντίστοιχους συμμετρικούς πίνακες 3×3:

$$Q(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon yz + 2\zeta zx \Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} \alpha & \delta & \zeta \\ \delta & \beta & \varepsilon \\ \zeta & \varepsilon & \gamma \end{pmatrix}$$

8. Κυρτότητα ισοσταθμικών

Σε προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τον ρυθμό υποκατάστασης που ορίζεται από την κλίση των ισοσταθμικών και πως αυτή συνδέεται με τις 1ες παραγώγους της συνάρτησης. Αντίστοιχα, η καμπυλότητα των ισοσταθμικών συνδέεται με τις 2ες παραγώγους της συνάρτησης. Λέμε ότι:

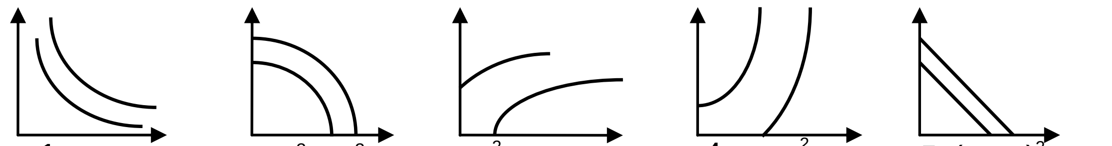
- *η συνάρτηση* $f(x,y)$ *ορίζει* ***φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης του*** y ***από το*** x *αν το* $|y'(x)|$ *είναι φθίνουσα συνάρτηση του* x. Δηλαδή, καθώς το x αυξάνει κάθε επιπλέον μοναδιαία αύξησή του υποκαθιστά (αντισταθμίζει) όλο και μικρότερη $y-$ποσότητα, οριακά.
- *η συνάρτηση* $f(x,y)$ *ορίζει* ***αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του*** y ***από το*** x *αν το* $|y'(x)|$ *είναι αύξουσα συνάρτηση του* x. Δηλαδή, καθώς το x αυξάνει κάθε επιπλέον μοναδιαία αύξησή του υποκαθιστά (αντισταθμίζει) όλο και μεγαλύτερη $y-$ποσότητα, οριακά.

Διαπιστώνουμε ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζει:

- ***φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης*** *του* y *από το* x *αν η πρώτη και η δεύτερη πλεγμένη παράγωγος:* $y'(x)$ *και* $y''(x)$, *έχουν αντίθετο πρόσημο, όπως στα παρακάτω γραφήματα {1,4}.*
- ***αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης*** *του* y *από το* x *αν η πρώτη και η δεύτερη πλεγμένη παράγωγος :* $y'(x)$ *και* $y''(x)$, *έχουν το ίδιο πρόσημο, όπως στα παρακάτω γραφήματα {2,5}.*
- ***σταθερό ρυθμό υποκατάστασης*** *αν η δεύτερη πλεγμένη παράγωγος είναι μηδενική:* $y''(x)=0$, *οπότε οι ισοσταθμικές είναι ευθείες, όπως στα παρακάτω γραφήματα {3,6}. Αυτό ισχύει για τις γραμμικές συναρτήσεις, αλλά και για τις εξαρτημένες από αυτές.*

1.φθίνων 2. αύξων 3.σταθερός **4.φθίνων 5.αύξων 6.σταθερός**
υποκατάσταση **αντιστάθμιση**

Παράδειγμα. Στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις και τις αντίστοιχες ισοσταθμικές τους:



1. $xy = c$ 2. $x^2 + y^2 = c$ $y^2 - x = c \Rightarrow x = y^2 - c$ 4. $y - x^2 = c \Rightarrow y = x^2 + c$ 5. $(x+y)^2 = c \Rightarrow x + y = c^2$

1. $f(x,y) = xy$, ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$, ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης του y από το x
3. $f(x,y) = y^2 - x$, ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) του y από το x
4. $f(x,y) = y - x^2$, ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) του y από το x
5. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, ορίζει σταθερό ρυθμό υποκατάστασης

Σημ. Στην υποκατάσταση, αν το $|y'(x)|$ είναι αύξον ή φθίνον τότε το αντίστροφο $|x'(y)|$ θα έχει την ίδια ιδιότητα. Στην αντιστάθμιση ισχύει το αντίθετο, όπως διαπιστώνουμε και γραφικά από τα σχήματα.

▲

9. Κυρτότητα σταθμικών περιοχών

Οι κυρτές/κοίλες συναρτήσεις έχουν διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες που είναι χρήσιμες στις εφαρμογές, αντίστοιχες με αυτές των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

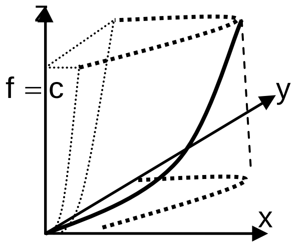
Γεωμετρικές ιδιότητες κυρτών συναρτήσεων

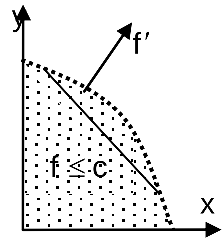
*1. Η επιφάνεια βρίσκεται **πάνω από τα εφαπτόμενα επίπεδα**, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης είναι μεγαλύτερες από τις τιμές των γραμμικών της επεκτάσεων.*

*2. Η επιφάνεια βρίσκεται **κάτω από τις χορδές** που ενώνουν δύο σημεία της, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία είναι μικρότερες από τα αντίστοιχα ενδιάμεσα των τιμών της στα ακραία σημεία. Λέμε ότι η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από τις γραμμικές παρεμβολές των τιμών της.*

3. Μια κυρτή συνάρτηση έχει τις κάτω σταθμικές της κυρτές. *Έτσι, σύμφωνα και με το 2, οι τιμές της στα ενδιάμεσα σημεία είναι μικρότερες από τις τιμές της στα ακραία σημεία στην ίδια ισοσταθμική.*

Στο γράφημα παραπλεύρως δείχνουμε μια αύξουσα κυρτή συνάρτηση, μια ισοσταθμική της και την αντίστοιχη κάτω σταθμική που είναι πράγματι κυρτή περιοχή. Αν ενώσουμε δύο σημεία στην ισοσταθμιή, στα ενδιάμεσα η συνάρτηση έχει χαμηλότερες τιμές.





Η παραπάνω ιδιότητα 3 είναι μια ευρύτερη ιδιότητα και την έχουν πολλές συναρτήσεις που δεν είναι κυρτές. Είναι αρκετά σημαντική στις εφαρμογές, και ορίζει μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων, ως εξής:

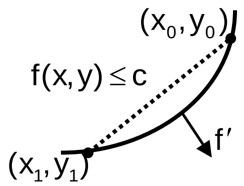
Οιονεί κυρτή *καλείται μια συνάρτηση αν έχει κυρτές τις **κάτω σταθμικές.***

Σ΄ αυτή την περίπτωση για κάθε ζεύγος συνδυασμών (x_0, y_0) και (x_1, y_1) στην *ίδια ισοσταθμική*, η συνάρτηση θα έχει μικρότερη τιμή στους ενδιάμεσους (κυρτούς) συνδυασμούς:

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1,\ y_t = (1-t)y_0 + ty_1\} \text{ με } 0 \le t \le 1,$$

διότι θα βρίσκονται όλοι στην αντίστοιχη κάτω σταθμική:

$$f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) = c \Rightarrow f(x_t, y_t) \le c$$



Παρατηρούμε ειδικά ότι ένας αύξων μετασχηματιμός κυρτής συνάρτησης μπορεί να μην είναι κυρτή, αλλά θα έχει τις ίδιες ισοσταθμικές και τις ίδιες πάνω και κάτω σταθμικές, οπότε θα έχει και την παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή θα είναι οιονεί κυρτή . Διαπιστώσαμε ότι:

Κάθε αύξων μετασχηματισμός κυρτής συνάρτησης είναι οιονεί κυρτή συνάρτηση

Για τον ίδιο λόγο:

Κάθε αύξων μετασχηματισμός οιονεί κυρτής συνάρτησης είναι οιονεί κυρτή συνάρτηση

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι ως γνωστόν κυρτή, εξάλλου είναι άθροισμα κυρτών. Επομένως, οιονεί κυρτές θα είναι και οι παρακάτω συναρτήσεις που είναι αύξοντες μετασχηματισμοί της:

$$f^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ f^{\rho} = (x^2 + y^2)^{\rho} \text{ με } \rho > 0\ ,\ \ln f + 1 = \ln(x^2 + y^2) + 1,\ e^f = \exp(x^2 + y^2)$$

▲

Αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν για κοίλες συναρτήσεις. Έχουμε:

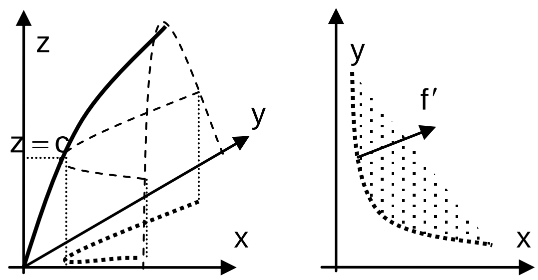
Γεωμετρικές ιδιότητες κοίλων συναρτήσεων

*1. Η επιφάνεια βρίσκεται **κάτω από τα εφαπτόμενα επίπεδα**, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης είναι μικρότερες από τις τιμές των γραμμικών της επεκτάσεων.*

*2. Η επιφάνεια βρίσκεται **πάνω από τις χορδές** που ενώνουν δύο σημεία της, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία είναι μεγαλύτερες από τα αντίστοιχα ενδιάμεσα των τιμών της στα ακραία σημεία. Λέμε ότι η συνάρτηση βρίσκεται πάνω από τις γραμμικές παρεμβολές των τιμών της.*

3. Μια κοίλη συνάρτηση έχει τις πάνω σταθμικές της κυρτές. *Έτσι, σύμφωνα και με το 2, οι τιμές της στα ενδιάμεσα σημεία είναι μεγαλύτερες από τις τιμές της στα ακραία σημεία στην ίδια ισοσταθμική.*

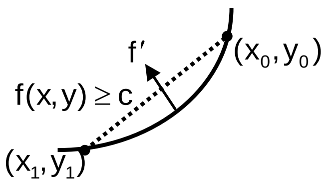
Στο γράφημα παραπλεύρως δείχνουμε μια αύξουσα κοίλη συνάρτηση, μια ισοσταθμική της και την αντίστοιχη πάνω σταθμική που είναι πράγματι κυρτή περιοχή. Αν ενώσουμε δύο σημεία στην ισοσταθμή, στα ενδιάμεσα η συνάρτηση έχει υψηλότερες τιμές.



Η παραπάνω ιδιότητα 3 είναι μια ευρύτερη ιδιότητα και την έχουν πολλές συναρτήσεις που δεν είναι κοίλες. Είναι αρκετά σημαντική στις εφαρμογές, και ορίζει μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων, ως εξής:

***Οιονεί κοίλη** καλείται μια συνάρτηση αν έχει τις **πάνω σταθμικές** κυρτές.*

Σ΄ αυτή την περίπτωση για κάθε ζεύγος συνδυασμών (x_0, y_0) και (x_1, y_1) στην *ίδια ισοσταθμική*, η συνάρτηση θα έχει μεγαλύτερη τιμή στους ενδιάμεσους (κυρτούς) συνδυασμούς:



$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1,\ y_t = (1-t)y_0 + ty_1\} \text{ με } 0 \leq t \leq 1,$$

διότι θα βρίσκονται όλοι στην αντίστοιχη πάνω σταθμική:

$$f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) = c \Rightarrow f(x_t, y_t) \geq c$$

Παρατηρούμε ειδικά ότι κάθε αύξων μετασχηματιμός κοίλης συνάρτησης θα έχει τις ίδιες ισοσταθμικές και τις ίδιες πάνω και κάτω σταθμικές, οπότε θα έχει και την παραπάνω ιδιότητα. Γενικότερα:

Κάθε αύξων μετασχηματισμός κοίλης συνάρτησης είναι οιονεί κοίλη συνάρτηση

Κάθε αύξων μετασχηματισμός οιονεί κοίλης συνάρτησης είναι οιονεί κοίλη συνάρτηση

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = x^{1/2} + y^{1/2}$ είναι ως γνωστόν κοίλη, και ως άθροισμα κοίλων. Επομένως, οιονεί κοίλες θα είναι και οι παρακάτω συναρτήσεις που είναι αύξοντες μετασχηματισμοί της:

$$f^2 = (x^{1/2} + y^{1/2})^2, \quad \ln f + f = \ln(x^{1/2} + y^{1/2}) + (x^{1/2} + y^{1/2})$$

▲

Παράδειγμα. Η C-D: $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ με $\alpha > 0,\ \beta > 0$ είναι ως γνωστό κοίλη $\Leftrightarrow \alpha + \beta \leq 1$.

Επομένως η $h(x, y) = x^2 y^3$ δεν είναι κοίλη. Είναι όμως οιονεί κοίλη, διότι έχουμε:

$$f = h^{1/5} = (x^2 y^3)^{1/5} = x^{2/5} y^{3/5} \text{ είναι κυρτή}$$

Επομένως η $h = f^5$ είναι κοίλη ως αύξων μετασχηματισμός κοίλης.

Παρατήρηση. Η παραπάνω ιδιότητα προκύπτει και άμεσα από την σχέση:

$$h(x, y) = x^2 y^3 \geq c \Rightarrow y \geq c^{1/3} x^{-2/3}, \text{ πάνω μέρος υπερβολής}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις C-D: $f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, είναι οιονεί κοίλες.

▲

Παρατήρηση. Οι οιονεί κυρτές/κοίλες συναρτήσεις συνδέονται μεταξύ τους διότι κάθε φθίνων μετασχηματισμός εναλλάσσει τις πάνω με τις κάτω σταθμικές. Βέβαια εναλλάσσει και τις μονοτονίες. Επομένως:

Κάθε φθίνων μετασχηματισμός εναλλάσσει την οιονεί κυρτότητα και την μονοτονία

▲

Παράδειγμα. Η CES: $f(x, y) = 2x^{-1} + y^{-1}$ είναι ως γνωστό φθίνουσα κυρτή, και ως άθροισμα φθινουσών κυρτών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση:

$$h = f^{-1} = (x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)}$$

είναι αύξουσα οιονεί κοίλη ως φθίνων μετασχηματισμός της.

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

10. Δεύτερο διαφορικό

Ο χαρακτηρισμός της κυρτότητας συναρτήσεων που δώσαμε παραπάνω μπορεί να ερμηνευτεί χρησιμοποιώντας το 2ο διαφορικό. Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x,y)$$

Αν τα $\{x,y\}$ μεταβληθούν κατά $\{\Delta x, \Delta y\}$ τότε η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μπορούμε να προσεγγίσουμε τις μεταβολές με διαφορικά, ιδίως όσον αφορά **τα πρόσημα.** Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, το **πρώτο διαφορικό** και το **δεύτερο διαφορικό** ορίζονται με τις παραστάσεις:

$df = f_x dx + f_y dy$, και $d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2$ όπου: $\{\Delta x = dx, \Delta y = dy\}$

Σε αντιστοιχία με την γραμμική προσέγγιση βρίσκουμε ότι το πρώτο διαφορικό αφορά την μεταβολή πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο και δίνει μια πρώτη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης:

$$\Delta f \approx df = f_x dx + f_y dy$$

Ειδικότερα, το πρόσημο της μεταβολής Δf συμπίπτει με το πρόσημο του διαφορικού df αν αυτό είναι μη μηδενικό, δηλαδή αν δεν μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι. Σε αντιστοιχία με την παραβολική προσέγγιση, βρίσκουμε ότι μια καλλίτερη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης δίνεται αν στο πρώτο διαφορικό προσθέσουμε και το μισό του δεύτερου διαφορικού, οπότε έχουμε:**:**

$$\Delta f \approx df + \frac{1}{2} d^2 f = [f_x dx + f_y dy] + \frac{1}{2}[f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2]$$

Ειδικότερα, **ο χαρακτηρισμός της κυρτότητας αφορά το πρόσημο της διαφοράς:** $\Delta f - df$**.** Γεωμετρικά αφορά την σχέση της επιφάνειας ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο στο συγκεκριμένο σημείο, θετικό αν η επιφάνεια βρίσκεται πάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο οπότε λέμε ότι είναι κυρτή, αρνητικό αν βρίσκεται από κάτω οπότε λέμε ότι είναι κοίλη. Σύμφωνα με τα παραπάνω το πρόσημο αυτό δίνεται από το πρόσημο του 2ου διαφορικού (όταν είναι μη μηδενικό) που είναι μια τετραγωνική μορφή της οποίας το πρόσημο καθορίζεται από τον εσσιανό πίνακα της συνάρτησης. Βρίσκουμε έτσι τους γνωστούς χαρακτηρισμούς. Όλα τα παραπάνω γενικεύονται άμεσα σε περισσότερες μεταβλητές.