I.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Α)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Πλεγμένες

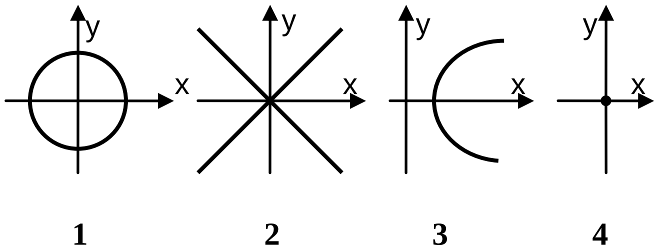
καλούνται οι συναρτήσεις (συνήθως **πολυσήμαντες,** δηλαδή με περισσότερες από μία τιμές) που ορίζονται μέσω εξισώσεων. Σε μια εξίσωση οι μεταβλητές δεν διακρίνονται **καταρχήν** σε εξαρτημένη και ανεξάρτητη. Βρίσκουμε τις συναρτήσεις **λύνοντας** ως προς μια από τις μεταβλητές, την οποία και θεωρούμε εξαρτημένη.

$F(x,y)=c \Rightarrow \{y=y(x)\}$ **ή** $\{x=x(y)\}$

Παράδειγμα.

1. $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{1-x^2}, \text{ δίτιμη} \\ x=\pm\sqrt{1-y^2}, \text{ δίτιμη} \end{cases}$

2. $x^2-y^2=0 \Rightarrow \begin{cases} y=\pm x, \text{ δίτιμη} \\ x=\pm y, \text{ δίτιμη} \end{cases}$



3. $x-y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{x-1}, \text{ δίτιμη} \\ x=y^2+1, \text{μονότιμη} \end{cases}$

4. $x^2+y^2=0 \Rightarrow (0,0),$ **σημείο**

5. $x^2+y^2=-1,$ **κενό**

Παρατηρούμε ότι οι τελευταίες δύο εξισώσεις δεν ορίζουν συναρτήσεις. Γενικά οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις εξισώσεις καλούνται και **λύσεις** τους.

Παράδειγμα. $\{x^\alpha y^\beta = c,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ με $c\ge 0$, ορίζει πλεγμένα συνάρτηση δύναμη, αρνητική δύναμη αν τα $\{\alpha,\beta\}$ έχουν το ίδιο πρόσημο, θετική αν έχουν αντίθετο πρόσημο. Π.χ.

$\{x^\alpha y^\beta = c \Rightarrow y = c^{1/\beta}x^{-\alpha/\beta}\}$, $\{x^{1/2}y^{3/4}=2 \Rightarrow y^{3/4}=2x^{-1/2} \Rightarrow y=(2x^{-1/2})^{4/3}=2^{4/3}x^{-2/3}\}$

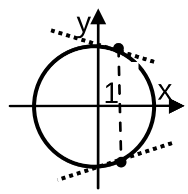
2.Πλεγμένη παραγώγιση

Η παραγώγιση πλεγμένης συνάρτησης μπορεί να εκτελεστεί **έμμεσα** (δηλαδή χωρίς να βρούμε πρώτα την ίδια την συνάρτηση που ορίζεται πλεγμένα), παραγωγίζοντας στην εξίσωση $F(x,y)=c$ ως προς την μία μεταβλητή, *θεωρώντας την άλλη ως συνάρτησή της,* οπότε έχουμε:

ως προς x: $F(x,y(x))\equiv c \Rightarrow F'=0$, ως προς y: $F(x(y),y)\equiv c \Rightarrow F'=0$

Η διαδικασία καλείται **πλεγμένη παραγώγιση,** και η παράγωγος που βρίσκουμε καλείται **πλεγμένη παράγωγος** διότι γενικά εκφράζεται μέσω και του x και του y, αλλά βέβαια **ισχύει μόνο για τις τιμές** (x,y) **που ικανοποιούν την εξίσωση.**

Παράδειγμα. $x^2+y^2=5$. Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, θεωρώντας το y ως πλεγμένη συνάρτηση του x, και βρίσκουμε:



$$x^2+y(x)^2\equiv 5,\quad (x^2)'+(y^2)'=5'\Rightarrow 2x+2yy'=0\Rightarrow y'(x)=-x/y,$$

Π.χ. για $x=1\Rightarrow 1+y^2=5\Rightarrow y=\pm 2\Rightarrow y'=-x/y=\mp 1/2$

Παρατήρηση. Την συγκεκριμένη εξίσωση μπορούμε να την λύσουμε ως προς y και να βρούμε την ζητούμενη συνάρτηση και την παράγωγό της:

$$x^2+y^2=5\Rightarrow y=\pm\sqrt{5-x^2}\Rightarrow y'=\mp x/\sqrt{5-x^2}$$

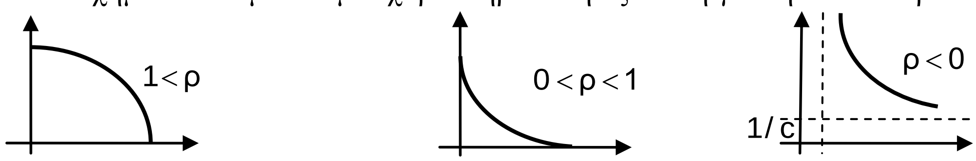
Αντικαθιστώντας $x=1$, βρίσκουμε τις ίδιες τιμές.

▲

Μία βασική κατηγορία εξισώσεων έχουν την παρακάτω μορφή:

$\alpha x^\rho+\beta y^\rho=c$ με $\rho\neq 0$, $\{\alpha>0,\beta>0,c>0\}$, στη *θετική περιοχή:* $\{x\geq 0, y\geq 0\}$

Διακρίνουμε 3 βασικές περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του εκθέτη $\rho\neq 0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνουμε και μια χαρακτηριστική εξίσωση για την κάθε περίπτωση.



$\{\rho=2,\ x^2+y^2=1\}$ $\quad\{\rho=1/2,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\}$ $\quad\{\rho=-1,\ x^{-1}+y^{-1}=1\Rightarrow y=\dfrac{x}{x-1}\}$

Παράδειγμα. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c\Rightarrow x^{1/2}+y^{1/2}=c$

1. Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε για την πλεγμένη παράγωγο:

$$(x^{1/2})'+(y^{1/2})'=c'\ \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}y^{-1/2}y'=0\ \Rightarrow y'=-\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}}=-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\Rightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\leq 0$$

Βρήκαμε αρνητική παράγωγο, οπότε όσον αφορά την μονοτονία η πλεγμένη συνάρτηση είναι φθίνουσα. Βέβαια η μονοτονία προκύπτει και πιο άμεσα, διότι για να είναι σταθερό το άθροισμα θα πρέπει ο ένας όρος να μικραίνει όταν ο άλλος αυξάνει.

2. Παραγωγίζοντας εκ νέου πλεγμένα ως προς x, βρίσκουμε 2η παράγωγο:

$$(x^{-1/2}+y^{-1/2}y')'=0\Rightarrow -\frac{1}{2}x^{-3/2}-\frac{1}{2}y^{-3/2}\,y'y'+y^{-1/2}y''=0$$

Λύνοντας ως προς y'' βρίσκουμε για την 2η πλεγμένη παράγωγο:

$$y''=\frac{1}{2}y^{1/2}\left(x^{-3/2}+y^{-3/2}y'^2\right)\quad \text{όπου: } (y')^2=\frac{y}{x} \text{ από το 1. παραπάνω}$$

Ο όρος στην παρένθεση είναι θετικός, και συμπεραίνουμε ότι ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση είναι γνήσια κυρτή, όπως στο δεύτερο σχήμα παραπάνω.

3. Η καμπύλη τέμνει και τους άξονες εφαπτομενικά, όπως στο γράφημα, διότι έχουμε:

Στον οριζόντιο άξονα: $\{y=0,\ x=c^2\Rightarrow y'=0\}$, οριζόντια εφαπτομένη

Στον κατακόρυφο άξονα: $\{x=0,\ y=c^2\Rightarrow y'=-\infty\}$, κατακόρυφη εφαπτομένη

▲

4.Παραμετρικές εξισώσεις. Θεωρούμε τις εξισώσεις:

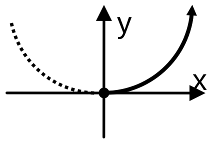
$\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ με **παράμετρο** t

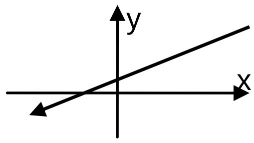
Καθώς το t μεταβάλλεται, το σημείο (x, y) κινείται στο επίπεδο σχηματίζοντας μια καμπύλη, της οποίας τα σημεία καθορίζονται από τις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου t. Καλείται **παραμετρική καμπύλη,** ενώ οι δύο εξισώσεις που την ορίζουν καλούνται **παραμετρικές εξισώσεις.** Ενίοτε μπορούμε να βρούμε την εξίσωσή της καμπύλης με **απαλοιφή του** t, π.χ. αντικαθιστώντας το από την μία εξίσωση στην άλλη:

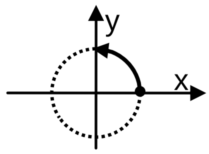
$\{x = x(t),\ y = y(t)\} \Rightarrow F(x, y) = c$

Θετική φορά στην καμπύλη θεωρούμε την κατεύθυνση αύξησης των τιμών της παραμέτρου στα σημεία της καμπύλης. Το γράφημα της καμπύλης μαζί με τη ένδειξη της θετικής φοράς καλείται **τροχιά.** Μία τέτοια τροχιά μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά με πολλές διαφορετικές παραμετρικές εξισώσεις κάνοντας αλλαγή παραμέτρου. Για το γράφημα παίρνουμε υπόψη και το διάστημα ορισμού της παραμέτρου.

Παράδειγμα.







$\{x = 2t, y = t^2,\ t \geq 0\}$ $\Rightarrow y = x^2 / 4,\ x \geq 0$

$\{x = -2t - 1, y = -t + 2\}$ $\Rightarrow 2y - x = 5$

$\{x = \cos t, y = \sin t,\ 0 \leq t \leq \pi / 2\}$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0$

Παρατήρηση. Διαπιστώσαμε ότι έχουμε τρεις διαφορετικού τρόπους παράστασης για καμπύλες:

εξίσωση: $F(x,y) = c$, **συνάρτηση**: $y = y(x)$ ή $x = x(y)$, **παραμετρική**: $\{x = x(t), y = y(t)\}$

5. Σχετιζόμενοι ρυθμοί: $\{x = x(t),\ y = y(t)\} \Rightarrow F(x, y) = c$

Οι 3 παράγωγοι: $\{x'(t),\ y'(t),\ y'(x)\}$ στο **ίδιο σημείο** συνδέονται με την παρακάτω σχέση **σχετιζόμενων ρυθμών:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{ή ανάστροφα} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \Big/ \frac{dy}{dt} \Rightarrow x' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}},$$

όπου με *πάνω τελεία* συμβολίζουμε τις παραγώγους ως προς την παράμετρο t.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις: $\{x = 2t, y = t^2,\ t \geq 0\} \Rightarrow y = x^2 / 4,\ x \geq 0$.

Θα επαληθεύσουμε τη σχέση σχετιζόμενων ρυθμών στο σημείο: $t = 1 \Rightarrow (x = 2, y = 1)$

$\{x = 2t, y = t^2\} \Rightarrow \{\dot{x} = 2,\ \dot{y} = 2t = 2\}$,

$\{y = x^2 / 4\} \Rightarrow y' = x/2 = 1$

Επαληθεύεται η σχέση σχετιζόμενων ρυθμών

▲

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε την σχέση σχετιζόμενων ρυθμών στην τροχιά:

$$\{x = 1 + 2\sin t,\ y = \cos t\} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

αριστερό μέρος: $(x-1)/2 + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -(x-1)/4y = -\sin t / 2\cos t$

δεξιό μέρος: $\dot{y} / \dot{x} = -\sin t / 2\cos t$

Για το αριστερό μέρος παραγωγίσαμε στην εξίσωση, πλεγμένα ως προς x.

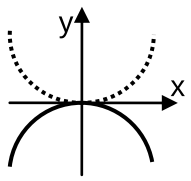
▲

6. Μετασχηματισμοί εξισώσεων $F(x,y)=c$

1. Αντανάκλαση ως προς τον κατακόρυφο: $x \to -x$, ως προς τον οριζόντιο: $y \to -y$

2. Μετατόπιση, οριζοντίως κατά x_0: $x \to x - x_0$, κατακόρυφα κατά y_0: $y \to y - y_0$

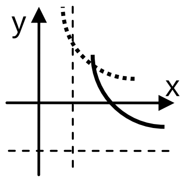
3. Αλλαγή κλίμακας, διαστολή-συστολή: οριζόντια: $x \to x/\alpha$, κατακόρυφα: $y \to y/\beta$.



$y = x^2 \Rightarrow$

$-y = x^2$

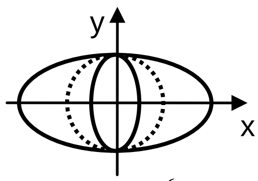
αντανάκλαση



$x^{1/2}y^{1/3} = c \Rightarrow$

$(x-1)^{1/2}(y+2)^{1/3} = 4$

μετατόπιση



$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 1 \\ (x/2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

αλλαγή κλίμακας

Παράδειγμα. Η εξίσωση: $(1-x)^{1/2}y^{1/3} = c \Rightarrow y = c^{1/3}/(1-x)^{3/2}$

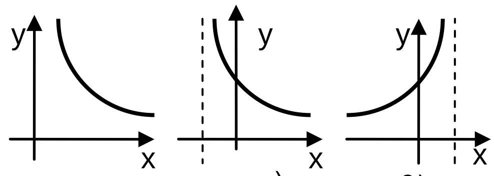
προκύπτει από την γνωστή: $x^{1/2}y^{1/3} = c$, με τους παρακάτω διαδοχικούς μετασχηματισμούς:

α) $x^{1/2}y^{1/3} = c \Rightarrow (x+1)^{1/2}y^{1/3} = c$

οριζόντια μετατόπιση κατά -1

β) $(x+1)^{1/2}y^{1/3} = c \Rightarrow (-x+1)^{1/2}y^{1/3} = c$.

Αντανάκλαση ως προς την κατακόρυφο.



α) β)

▲

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ

7.Αντίστροφη συνάρτηση

Για τις (γενικά πολυσήμαντες) συναρτήσεις που ορίζονται από μια εξίσωση λύνοντας ως προς την κάθε μεταβλητή, λέμε ότι είναι **αντίστροφες** μεταξύ τους:

$$F(x,y)=c \Rightarrow \{y=y(x)\}\ ,\ \{x=x(y)\}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε συνάρτηση γράφεται και ως εξίσωση:

$$y=f(x)\Rightarrow F(x,y)=y-f(x)=0$$

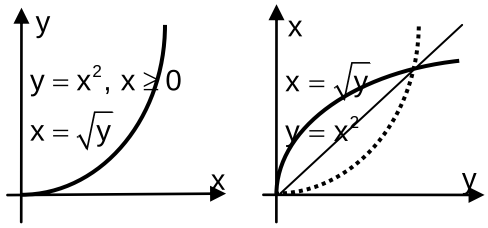
Λύνοντας την εξίσωση ως προς x βρίσκουμε συνάρτηση (γενικά **πολυσήμαντη**) την οποία καλούμε **αντίστροφη** της f :

$$x=f^{-1}(y)$$

Μπορούμε να την κάνουμε μονοσήμαντη περιορίζοντας το πεδίο ορισμού της αρχικής f ώστε να είναι γνήσια μονότονη:

Αν η f είναι γνήσια μονότονη, τότε η f^{-1} είναι μονοσήμαντη και γνήσια μονότονη επίσης.

Αν η αρχική συνάρτηση εκφράζεται στη γενική μορφή: $y=y(x)$, τότε και η αντίστροφη εκφράζεται στη γενική μορφή: $x=x(y)$.



Παρατήρηση. Μια συνάρτηση $y=f(x)$ και η αντίστροφή της $x=f^{-1}(y)$ εκφράζουν την ίδια σχέση μεταξύ των μεταβλητών (x,y) και επομένως έχουν το **ίδιο γράφημα** στο επίπεδο Oxy. Αν όμως θέλουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή y στον οριζόντιο άξονα, τότε το γράφημα της $x=f^{-1}(y)$ είναι το **συμμετρικό της** f **ως προς την διαγώνιο** του συστήματος.

Π.χ. η συνάρτηση $y=x^2$ με $x\geq 0$ έχει την αντίστροφο: $x=\sqrt{y}$, όπως στο γράφημα

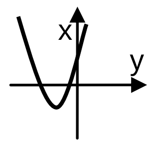
8. Παράγωγος αντίστροφης

*Στο **ίδιο** (x,y) οι παράγωγοι αντίστροφων συναρτήσεων: $\{y=y(x)\Leftrightarrow x=x(y)\}$ είναι **ανάστροφοι** μεταξύ τους:*

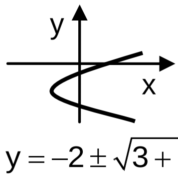
$$\frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx} \quad ή \quad x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε με τρεις τρόπους την παράγωγο της συνάρτησης $y=y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα ως αντίστροφη της $x=x(y)$, με την εξίσωση:

$$x=1+4y+y^2$$



$x=1+4y+y^2$



$y=-2\pm\sqrt{3+x}$

1. Ως παράγωγος αντίστροφης: $x'(y)=4+2y\Rightarrow y'(x)=1/x'(y)=1/(4+2y)$

2. Με πλεγμένη παραγώγιση ως προς x :

$$(x)'=(1+4y+y^2)'\Rightarrow 1=0+4y'+2yy'\Rightarrow y'=1/(4+2y)$$

3. Λύνοντας την εξίσωση ως προς y και παραγωγίζοντας την συνάρτηση:

$$x=1+4y+y^2\Rightarrow y^2+4y+(1-x)=0\Rightarrow y=-2\pm\sqrt{x+3}\Rightarrow y'(x)=\frac{\pm 1}{2\sqrt{x+3}}$$

όπου κάθε φορά επιλέγουμε ένα από τα δύο πρόσημα για το y και για το y'

Σημ. Αν στο 1 αντικαταστήσουμε το y από το 3 θα βρούμε το ίδιο y' όπως στο 3:

$$y'=\frac{1}{4+2y}=\frac{1}{4+2(-2\pm\sqrt{x+3})}=\frac{1}{\pm 2\sqrt{x+3})}$$

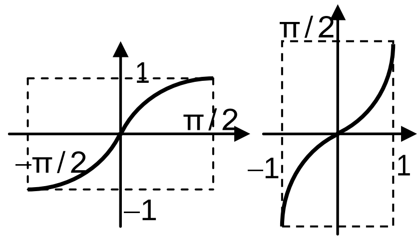
▲

Παρατήρηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$. Για να βρούμε την **μαθηματική αντίστροφη** $f^{-1}(x)$, λύνουμε την εξίσωση: $y=f(x)\Rightarrow y-f(x)=0$, ως προς x: $x=f^{-1}(y)$, και στη συνέχεια στην παράσταση $f^{-1}(y)$ αντικαθιστούμε: $y\rightarrow x$. ▲

9. Αντίστροφες Τριγωνομετρικές. Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές είναι πολυσήμαντες:

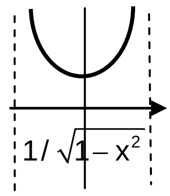
$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$

Αν όμως περιορίσουμε τις τριγωνομετρικές στα μονότονα τμήματά τους, τότε βρίσκουμε μονοσήμαντες **αντίστροφες τριγωνομετρικές.** Συνήθως χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:



sin(x) $\Rightarrow$ arcsin(x)

$\Downarrow$



1. Αντίστροφο ημίτονο:

$$y = \begin{cases} \arcsin x \\ \text{τοξημ}x \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sin y \\ \text{ημ}y \end{cases}$$

με $\{-1 \le x \le 1, \ -\pi/2 \le y \le \pi/2\}$

Δηλαδή, y είναι το **τόξο** (arc) που έχει ημίτονο (sine) x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα μονοτονίας.

Π.χ.

$\arcsin 0 = 0, \ \arcsin(1/2) = \pi/6$,

$\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4, \ \arcsin(1) = \pi/2$

2. Παράγωγος της $\arcsin x$:

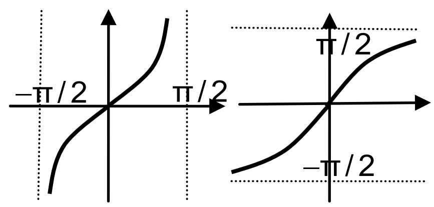
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{με } -1 \le x \le 1$$

Απόδειξη. Ο τύπος αντιστροφής μας δίνει:

$$\{y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

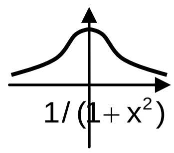
Επιλέξαμε το θετικό πρόσημο: $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, διότι $\cos y$ είναι θετική στο διάστημα: $-\pi/2 \le y \le \pi/2$

3.Αντίστροφη εφαπτομένη



tan(x) $\Rightarrow$ arctan(x)

$\Downarrow$



$$y = \begin{cases} \arctan x \\ \text{τοξεφ}x \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \tan y \\ \text{εφ}y \end{cases}$$

με $\{-\infty < x < +\infty, -\pi/2 < y < \pi/2\}$

Δηλαδή, y είναι το **τόξο** (arc) που έχει εφαπτομένη (tan) x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα μονοτονίας.

Π.χ.

$\arctan 0 = 0, \ \arctan(1) = \pi/4, \ \arctan(+\infty) = \pi/2$

4.Παράγωγος της $\arctan x$

Ο τύπος αναστροφής μας δίνει για την παράγωγο:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{με } -\infty < x < +\infty$$

▲

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ TAYLOR

10. Γραμμική προσέγγιση/επέκταση

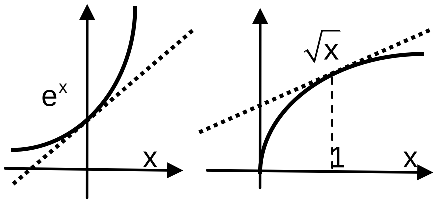
μιας συνάρτησης $f(x)$ *στο σημείο* x_0*,καλείται η γραμμική συνάρτηση που έχει την ίδια τιμή και την ίδια 1η παράγωγο με την συνάρτηση σαυτό το σημείο, δηλαδή είναι η γραμμική συνάρτηση της* ***εφαπτόμενης ευθείας.***

Υπενθυμίζουμε ότι μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0,y_0) με κλίση m, έχει εξίσωση:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Επομένως η γραμμική προσέγγιση στο x_0 θα έχει: $y_0 = f(x_0)$ και $m = f'(x_0)$, και θα δίνεται από την γραμμική συνάρτηση

$$f(x) \approx f_{\gamma\rho}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \textbf{όταν} \quad x \approx x_0$$



Παράδειγμα. Βρίσκουμε τις γραμμικές προσεγγίσεις:

$$x \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \approx 1 + x \\ \ln(1+x) \approx x \end{cases}, \quad x \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \approx (1+x)/2 \\ \ln x \approx x - 1 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε τις παρακάτω προσεγγιστικές τιμές. Για σύγκριση δίνουμε και τις «ακριβείς».

Π.χ. $e^{0.1} \approx \begin{cases} 1.1 \\ 1.105\cdots \end{cases}, \quad \sqrt{1.1} \approx \begin{cases} 1.05 \\ 1.04881\cdots \end{cases}$

▲

11. Παραβολική προσέγγιση/επέκταση μιας συνάρτησης $f(x)$ σε κάποιο x_0 καλείται *η παραβολική συνάρτηση η οποία στο* x_0 *έχει την ίδια τιμή και την ίδια 1η και 2η παράγωγο με τη συνάρτηση.* Δίνεται από την παράσταση:

$$f(x) \approx f_{\pi\alpha\rho}(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad \textbf{για} \quad x \approx x_0$$

Καλείται και **τετραγωνική προσέγγιση/επέκταση.** Παρατηρούμε ότι η παραβολική προσέγγιση αποτελείται καταρχήν από την γραμμική στην οποία έχει προστεθεί και ένας όρος δευτέρου βαθμού δίνοντας έτσι μια **καλλίτερη προσέγγιση** των τιμών της συνάρτησης στη **γειτονιά** του x_0, διότι εκτός από την κλίση παίρνει υπόψη της και την κυρτότητα της συνάρτησης στο σημείο.

Παρατήρηση. Γενικότερα, όσο περισσότερες κοινές παραγώγους έχουν δύο συναρτήσεις σε ένα σημείο, τόσο πλησιέστερα μεταξύ τους βρίσκονται οι τιμές τους σε μια γειτονιά του σημείου. Τα παραπάνω αποτελούν τα δύο πρώτα μιας ακολουθίας προσεγγιστικών πολυωνύμων αυξανόμενου βαθμού, που καλούνται **πολυώνυμα Taylor.**

Παράδειγμα. Για $x \approx 0$: $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$,

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2, \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε τις προσεγγίσεις (γραμμική, παραβολική), και την ακριβή τιμή:

$$e^{0.1} \approx \begin{cases} 1.1 \\ 1.105 \\ 1.1052... \end{cases}, \quad \ln(0.9) \approx \begin{cases} -0.1 \\ -0.105 \\ -0.1054... \end{cases}, \quad \sqrt{1.1} \approx \begin{cases} 1.05 \\ 1.04875 \\ 1.04881... \end{cases}$$

Παρατήρηση. Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, τότε αντικαθιστώντας: $x = (x - x_0) + x_0$, και αναπτύσσοντας τις δυνάμεις μπορούμε να εκφράσουμε το πολυώνυμο σε δυνάμεις του $x - x_0$. Κρατώντας τις δυνάμεις μέχρι 1ου και 2ου βαθμού, βρίσκουμε την γραμμική και παραβολική προσέγγιση αντίστοιχα, στο σημείο x_0.

Παράδειγμα. Σε δυνάμεις του $(x+1)$, βρίσκουμε:

$$x^3 + 1 = [x+1) - 1]^3 + 1 = [(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1] + 1 \qquad = 2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$$

Πράγματι, οι προσεγγίσεις της συνάρτησης στο $x_0 = -1$, έχουν ως εξής:

Γραμμική: $2 + 3(x+1)$, Παραβολική: $2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2$ ▲

12. Υπόλοιπο Lagrange. Τα παραπάνω είναι τα πρώτα μιας ακολουθίας πολυωνύμων όλο και μεγαλύτερου βαθμού τα οποία προσεγγίζουν τις τιμές της συνάρτησης με όλο και «μεγαλύτερη ακρίβεια» σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0. Καλούνται **πολυώνυμα-Taylor** της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0. Ειδικότερα, το **πολυώνυμο Taylor βαθμού** n είναι το πολυώνυμο βαθμού n το οποίο στο σημείο x_0 έχει με την συνάρτηση την ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους μέχρι τάξεως n. Εκφρασμένο σε δυνάμεις του $(x-x_0)$ έχει την παράσταση:

$$P_n = f^0 + \frac{f^1}{1!}(x-x_0) + \frac{f^2}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n}{n!}(x-x_0)^n$$

όπου $n! = 1\cdot 2\cdots n$ είναι το **παραγοντικό τάξης** n και f^n είναι η παράγωγος $n-$τάξεως της $f(x)$ στο σημείο x_0. Ειδικά ο όρος f^0 είναι η τιμή της ίδιας της συνάρτησης στο σημείο x_0:

$$f^0 = f(x_0),\ f^1 = f'(x_0),\ f^2 = f''(x_0),\ldots$$

Παράδειγμα. Δίνουμε παρακάτω τα πολυώνυμα Taylor στο σημείο $x_0 = 0$ ορισμένων γνωστών συναρτήσεων. Καλούνται και **πολυώνυμα McLaurin**:

$$\frac{1}{1-x} : P_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n,\ \rho = 1$$

$$\ln(1+x) : P_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$e^x : P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x : P_n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x :\ P_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^\alpha : P_n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$$

$$\arcsin x : P_n = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan x : P_n = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

▲

Όσον αφορά το σφάλμα κατά την παραπάνω προσέγγιση, αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας ένα γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής, ότι το υπόλοιπο της προσέγγισης μιας συνάρτησης με το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor P_n μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή:

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$, για **κάποιο** ξ γνήσια μεταξύ των $\{\alpha,\beta\}$

Καλείται **υπόλοιπο τύπου Lagrange.** Έτσι αν μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για το παραπάνω υπόλοιπο που να τείνει στο μηδέν όταν $n \to +\infty$, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση με οιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια χρησιμοποιώντας πολυώνυμο Taylor αρκετά μεγάλου βαθμού.

Παράδειγμα. Για την εκθετική συνάρτηση, βρίσκουμε στο σημείο $x_0 = 0$:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^n(x) = e^x \Rightarrow R_n = \frac{1}{n!}e^\xi x^n$$

1. Για $0 < x$ έχουμε $0 < \xi < x$ και το υπόλοιπο έχει φράγμα που συγκλίνει στο 0:

$$R_n = \frac{1}{n!}e^\xi x^n \le \frac{1}{n!}e^x x^n = e^x \frac{x}{1}\cdots\frac{x}{n} \to 0 \quad \text{διότι } \frac{x}{n} \to 0 \text{ όταν } n \to +\infty$$

2. Για $x < 0$ έχουμε $x < \xi < 0$ και το υπόλοιπο έχει φράγμα που συγκλίνει στο 0:

$$|R_n| = \frac{1}{n!}e^\xi |x|^n \le \frac{1}{n!}e^0 |x|^n = \frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{n} \to 0 \quad \text{όταν } n \to +\infty$$

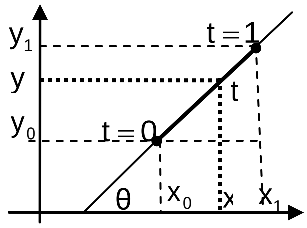
▲

13. Ευθύγραμμο τμήμα

Δύο σημεία $\{(x_0,y_0), (x_1,y_1)\}$ ορίζουν μια **ευθεία**, η οποία μπορεί να εκφραστεί με 3 τρόπους:

1. Ως **γραμμική συνάρτηση**, στη μορφή:

$y = y_0 + m(x - x_0)$, όπου $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ είναι η **κλίση** της ευθείας.



2. Ως **γραμμική εξίσωση**: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ή $\dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

3. Ως **παραμετρική ευθεία**, εξισώνοντας στην τελευταία εξίσωση παραπάνω τον κοινό λόγο με t:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t = (1-t)y_0 + ty_1 \end{cases}$$

Η **παράμετρος** t μετράει την προσημασμένη απόσταση του (x,y) από το (x_0,y_0), ως ποσοστό της συνολικής απόστασης μεταξύ των αρχικών σημείων. **Όσο μικρότερο είναι το t τόσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο σημείο** (x_0,y_0) Τα αρχικά σημεία αντιστοιχούν στις τιμές: $t = \{0,1\}$.

Ενδιάμεσα καλούνται τα σημεία ανάμεσα στα δύο αρχικά, με παραμετρικές τιμές:

$0 \le t \le 1$

Αντικαθιστώντας: $\{t_0 = 1 - t,\ t_1 = t)$, βρίσκουμε για τα *ενδιάμεσα* την εναλλακτική παράσταση:

$\{x = t_0x_0 + t_1x_1,\ y = t_0y_0 + t_1y_1\}$ με $0 \le t_0 \le 1$, $0 \le t_1 \le 1$, $t_0 + t_1 = 1$

Οι συντελεστές $\{t_0,t_1\}$ είναι θετικοί με άθροισμα 1, και λέμε ότι αποτελούν τα **βάρη** με τα οποία συνδυάζονται τα αρχικά σημεία για να προκύψουν τα ενδιάμεσα. Όσο μεγαλύτερο είναι ένα βάρος τόσο πλησιέστερα βρισκόμαστε στο αντίστοιχο από τα δύο αρχικά σημεία. Τα ενδιάμεσα σημεία καλούνται και **κυρτοί συνδυασμοί** των δύο αρχικών. Στην τελευταία μορφή η έννοια του κυρτού συνδυασμού δύο σημείων γενικεύεται άμεσα στον κυρτό συνδυασμό περισσότερων σημείων.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα σημεία $A_0 : (x_0 = 1,\ y_0 = 2)$, $A_1 : (x_1 = 3,\ y_1 = 8)$

Η εξίσωση της ευθείας είναι: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow \dfrac{y - 2}{x - 1} = \dfrac{8 - 2}{3 - 1} \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y = 1$

Το σημείο στο $t = 1/3$ της απόστασης από το A_0 στο A_1, θα είναι ο κυρτός συνδυασμός με συντελεστές:

$(t_0 = 1 - t = 2/3,\ t_1 = t = 1/3)$

Επομένως θα έχει τις παρακάτω συντεταγμένες. Ελέγχουμε ότι ικανοποιούν και την εξίσωση:

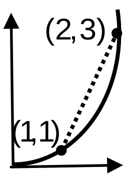
$x_{1/3} = t_0x_0 + t_1x_1 = \dfrac{2}{3}1 + \dfrac{1}{3}3 = \dfrac{5}{3}$, $\quad y_{1/3} = t_0y_0 + t_1y_1 = \dfrac{2}{3}2 + \dfrac{1}{3}8 = \dfrac{12}{3} = 4$

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες με τους τύπους:

$x_{1/3} = x_0 + t(x_1 - x_0) = 1 + \dfrac{1}{3}(3 - 1) = \dfrac{5}{3}$, $\quad y_{1/3} = y_0 + t(y_1 - y_0) = 2 + \dfrac{1}{3}(8 - 2) = \dfrac{12}{3} = 4$

14. Γραμμική παρεμβολή

μιας συνάρτησης $f(x)$ *μεταξύ δύο σημείων της* (x_0,y_0) *και* (x_1,y_1) *καλείται η γραμμική συνάρτηση της **χορδής** που τα συνδέει.*



$\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m \Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$ για x μεταξύ των $\{x_0,x_1\}$, όπου $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Παράδειγμα. Για τη συνάρτηση $y = x^2$, μεταξύ των σημείων $(x_0 = 1, y_0 = 1)$ και $(x_1 = 2, y_1 = 3)$, βρίσκουμε την γραμμική παρεμβολή:

$y = 1 + \dfrac{3 - 1}{2 - 1}(x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$ για $1 \le x \le 2$ ▲

15. Κανόνας L'Hopital

Μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα όρια απροσδιόριστων μορφών, ως εξής:

Αν $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ τότε $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ όταν $x \to x_0$

Δηλαδή, αν **αμφότερα** τα όρια είναι 0 ή ∞ τότε έχουμε απροσδιοριστία και στο όριο μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις με τις παραγώγους τους

Παράδειγμα

1. Για $x \to +\infty$,

$$\left\{\frac{e^x}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{(e^x)'}{x'} = \frac{e^x}{1} \to +\infty\right\}, \quad \left\{xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{1}{e^x} \to 0\right\}$$

$$\left\{\frac{2x^2}{x^2+\ln x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{4x}{2x+1/x} \sim \frac{4}{2-1/x^2} \to 2\right\}, \quad \left(1+\frac{\rho}{x}\right)^x \to e^\rho \text{ (παίρνουμε λογαρίθμους)}$$

2. Για $x \to 0$

$$\left\{\frac{\sin x}{x} \sim \frac{\cos x}{1} \to 1\right\}, \quad \left\{x\ln x = \frac{\ln x}{1/x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0\right\}, \quad \left\{x^x = e^{x\ln x} \to e^0 = 1\right\}$$

▲

16. Τάξη απείρου. Αν $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\infty}{\infty}$, τότε λέμε ότι το άπειρο του αριθμητή είναι:

- *γνήσια μεγαλύτερης τάξης αν το όριο είναι* ∞ *(τελικά ο αριθμητής μεγαλώνει πιο γρήγορα)*
- *γνήσια μικρότερης τάξης αν το όριο είναι* 0 *(τελικά ο παρονομαστής μεγαλώνει πιο γρήγορα)*
- *της ίδιας τάξης αν το όριο είναι αριθμός διάφορος των* $\{0,\infty\}$

Π.χ. για $x \to +\infty$:

1. Η τάξη απείρου των $\{x^\alpha\}$ αυξάνει όταν αυξάνει η δύναμη $\alpha > 0$.
2. Η e^x έχει μεγαλύτερη τάξη απείρου από κάθε x^α με $\alpha > 0$.
3. Η $\ln x$ έχει μικρότερη τάξη απείρου από κάθε x^α με $\alpha > 0$.
4. Οι δύο συναρτήσεις: $\{100\ln x + 2x^4 + 5x^5, x^5\}$ έχουν την ίδια τάξη απείρου, διότι αυτή καθορίζεται από τον όρο $\{x^5\}$ με την μεγαλύτερη τάξη απείρου.

17. Τάξη μηδενικού. Αν $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$, τότε λέμε ότι το μηδενικό του αριθμητή είναι:

- *γνήσια μεγαλύτερης τάξης αν το όριο είναι* 0 *(τελικά ο αριθμητής μικραίνει πιο γρήγορα)*
- *γνήσια μικρότερης τάξης αν το όριο είναι* ∞ *(τελικά ο παρονομαστής μικραίνει πιο γρήγορα)*
- *της ίδιας τάξης αν το όριο είναι αριθμός διάφορος των* $\{0,\infty\}$

Π.χ. οι συναρτήσεις: $\{x, e^x-1, \sin x, \cos x - 1\}$ έχουν όριο 0 όταν $x \to 0$. Για το λόγο βρίσκουμε:

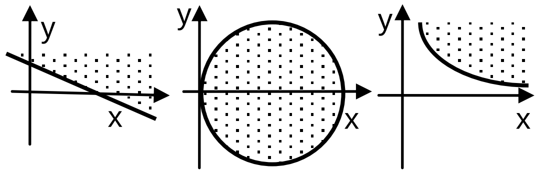
$$\frac{e^x-1}{x} \sim \frac{e^x}{1} \to 1, \quad \frac{\sin x}{x} \sim \frac{\cos x}{1} \to 1, \quad \frac{\cos x - 1}{x} \to \frac{0}{0} \sim \frac{-\sin x}{1} \to 0$$

Επομένως οι $\{e^x-1, x, \sin x\}$ έχουν στο $x=0$ μηδενικό της ίδιας τάξης ενώ η $\cos x - 1$ έχει ανώτερης.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

18. Ανισότητες

Κάθε εξίσωση, εκτός από μια καμπύλη καθορίζει γεωμετρικά και δύο περιοχές εκατέρωθεν της καμπύλης, όπου οι συντεταγμένες των σημείων τους ικανοποιούν αντίστοιχες **ανισότητες.** Π.χ. σε αντιστοιχία με τις διάφορες μορφές για τις εξισώσεις καμπύλων, βρίσκουμε τις περιοχές:



$x+2y\geq 1$ $\quad (x-1)^2+y^2\leq 1$ $\quad x^{1/4}y^{3/4}\geq 4$

$y\geq (1-x)/2$ $\quad y\geq 4^{4/3}x^{-1/3}$

$x\geq 1-2y$ $\quad x\geq 4^4y^{-3}$

1. $f(x,y)=c \Rightarrow \{f(x,y)\leq c,\ f(x,y)\geq c\}$
2. $y=f(x) \Rightarrow \{y\geq f(x),\ y\leq f(x)\}$ **{πάνω, κάτω}**
3. $x=f(y) \Rightarrow \{x\geq f(y), x\leq f(y)\}$ **{δεξιά, αριστερά}**

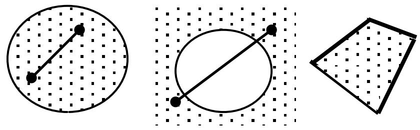
Περιοχές που ορίζονται με γραμμικές ανισότητες, όπως στο πρώτο γράφημα παραπάνω καλούνται **ημιεπίπεδα.** Επίσης, μια περιοχή καλείται:

κλειστή αν περιέχει την καμπύλη του συνόρου, οπότε γράφουμε: $\{f(x,y)\geq 0,\ f(x,y)\leq 0\}$

ανοικτή αν δεν την περιέχει όποτε εκφράζεται με γνήσια ανισότητα: $\{f(x,y)>0,\ f(x,y)<0\}$

19. Κυρτή

καλείται μια ***περιοχή*** *αν περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των σημείων της, δηλαδή ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει.*



κυρτή **μη κυρτή** **κυρτή**

Π.χ. κυρτές περιοχές είναι τα ημιεπίπεδα

$\alpha x+\beta y\geq c$ ή $\alpha x+\beta y\leq c$

καθώς και τα **κυρτά πολύγωνα** που προκύπτουν ως τομές ημιεπιπέδων και ορίζονται με περισσότερες τέτοιες ανισότητες, όπως στο τελευταίο σχήμα παραπάνω.

Γενικότερα, διαπιστώνουμε ότι:

Η τομή κυρτών περιοχών είναι επίσης κυρτή περιοχή, και εκφράζεται με το σύνολο των ανισοτήτων

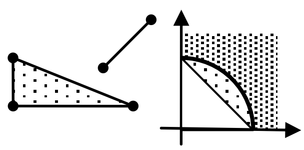
Σε πολλές εφαρμογές, αν μια περιοχή δεν είναι κυρτή μπορούμε να την κάνουμε κυρτή διευρύνοντάς την ώστε να περιέχει όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των σημείων της. Η διαδικασία αυτή καλείται **κυρτοποίηση,** και η μικρότερη τέτοια διεύρυνση καλείται **κυρτό κέλυφος** της αρχικής. Διαπιστώνουμε ότι:

Το κυρτό κέλυφος ενός συνόλου σημείων είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών των σημείων του.

Παράδειγμα

1. Το κυρτό κέλυφος δύο σημείων είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει.

2. Το κυρτό κέλυφος τριών σημείων είναι η τριγωνική περιοχή που τα έχει ως κορυφές.



3. Η περιοχή που βρίσκεται στη θετική περιοχή *εκτός* του μοναδιαίου κύκλου δεν είναι κυρτή. Για την κυρτοποίησή της αρκεί να συμπεριλάβουμε και το τμήμα εντός του κύκλου που ορίζεται από την χορδή.

Παρατήρηση. Τονίζουμε το διαφορετικό πλαίσιο εφαρμογής των δύο παρακάτω εννοιών:

κυρτή/κοίλη συνάρτηση

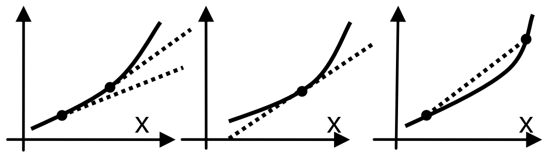
κυρτή/μη κυρτή περιοχή, (δεν ορίζεται «κοίλη περιοχή» **)**

▲

20. Χαρακτηρισμός κυρτών συναρτήσεων

Οι κυρτές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται γεωμετρικά από τις παρακάτω τρεις **ισοδύναμες** ιδιότητες:

1. *Η 1η παράγωγος είναι αύξουσα, δηλαδή η 2η παράγωγος είναι θετική:* $f'' \geq 0$



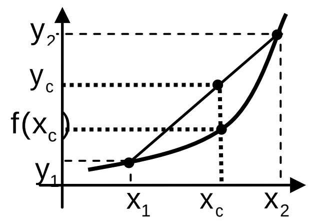
2. *Η καμπύλη βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενες ευθείες της, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης είναι μεγαλύτερες από τις τιμές των γραμμικών της επεκτάσεων:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

*Λέμε ότι **η κυρτή συνάρτηση είναι πάνω περιβάλλουσα των γραμμικών της επεκτάσεών.***

3. *Η καμπύλη βρίσκεται κάτω από τις χορδές της, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες παρεμβολές των τιμών της από τα ακραία σημεία:*

Π.χ. $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$



Γενικότερα, αν έχουμε δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2), τότε τα ενδιάμεσα βρίσκονται παίρνοντας κυρτούς συνδυασμούς των συντεταγμένων τους, οπότε όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$\{x_c = t_1 x_1 + t_2 x_2,\ y_c = t_1 y_1 + t_2 y_2\} \Rightarrow y_c \geq f(x_c) : t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2),$$

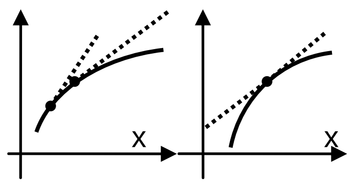
που είναι η σχέση 3. Λέμε ότι *το ενδιάμεσο των τιμών της είναι μεγαλύτερο από την τιμή της στο αντίστοιχο ενδιάμεσο*

Παρατήρηση. Οι τρεις χαρακτηρισμοί διατυπώνονται υπό συνθήκες αυξανόμενης γενικότητας. Έτσι στο 1 υποθέτουμε συνεχή δεύτερη παράγωγο, στο 2 συνεχή πρώτη παράγωγο, και στο 3 μόνο συνεχή συνάρτηση.

21. Χαρακτηρισμός κοίλων συναρτήσεων

Αντίστοιχοι χαρακτηρισμοί ισχύουν για τις κοίλες συναρτήσεις:

1. Η πρώτη παράγωγος είναι φθίνουσα: $f'' \leq 0$

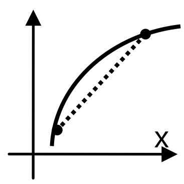


2.Οι εφαπτόμενες ευθείες είναι πάνω από την καμπύλη, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης είναι μικρότερες από τις γραμμικές επεκτάσεις της.

3. Οι χορδές είναι κάτω από την καμπύλη, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες παρεμβολές των τιμών της από τα ακραία σημεία:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \text{ με } \{t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = 1\}$$

Π.χ. για $t_1 = t_2 = 1/2 \Rightarrow \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$



Το ενδιάμεσο των τιμών της είναι μικρότερο από την τιμή της στο αντίστοιχο ενδιάμεσο.

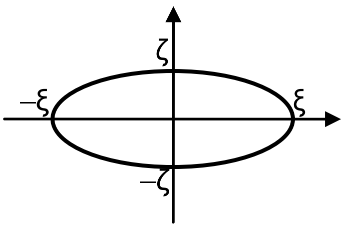
22. Κωνικές τομές καλούνται οι τετραγωνικές εξισώσεις δύο μεταβλητών:

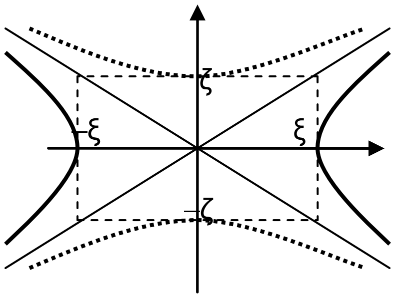
$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y = c$, όπου τα $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν είναι όλα μηδενικά,

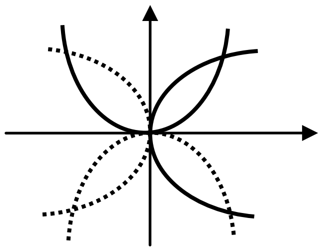
Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση της **τετραγωνικής εξίσωσης δύο μεταβλητών χωρίς μεικτό όρο:** $\{\beta = 0\}$**,** της μορφής:

$\alpha x^2 + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y = c$, όπου τα $\{\alpha, \gamma\}$ δεν είναι αμφότερα μηδενικά.

Εφαρμόζοντας την γνωστή διαδικασία **συμπλήρωσης τετραγώνων** που συγχωνεύει κάθε γραμμικό όρο με τον αντίστοιχο τετραγωνικό, διαπιστώνουμε ότι κάθε τέτοια εξίσωση περιγράφει μια από τις παρακάτω καμπύλες, μετατοπισμένη ώστε το κέντρο της να βρίσκεται σε κάποιο σημείο (x_0, y_0):







Έλλειψη: $\dfrac{x^2}{\xi^2} + \dfrac{y^2}{\zeta^2} = 1$ **Υπερβολή:** $\dfrac{x^2}{\xi^2} - \dfrac{y^2}{\zeta^2} = \pm 1$ **Παραβολή:** $y = \eta x^2, x = \xi y^2$

Ειδικότερα, η εξίσωση παριστάνει:

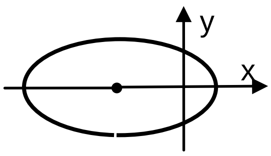
1. **Έλλειψη (ή σημείο ή κενό)** αν τα $\{\alpha, \gamma\}$ έχουν γνήσια το ίδιο πρόσημο: $\alpha\gamma > 0$
2. **Υπερβολή (ή τεμνόμενες ευθείες)** αν τα $\{\alpha, \gamma\}$ έχουν γνήσια αντίθετο πρόσημο: $\alpha\gamma < 0$
3. **Παραβολή (ή παράλληλες ευθείες)** αν το ένα από τα $\{\alpha, \gamma\}$ μηδενίζεται: $\alpha\gamma = 0$

Παράδειγμα

1. $x^2 + y^2 + x = c \Rightarrow (x^2 + x + 1/4 - 1/4) + y^2 = c \Rightarrow (x + 1/2)^2 + y^2 = c + 1/4$, παριστάνει:
   κύκλο με κέντρο $(x_0 = -1/2, y_0 = 0)$ αν $c > -1/4$, σημείο αν $c = -1/4$, κενό αν $c < -1/4$

2. $x^2 + 4y^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1 - 1) + 4y^2 - 2 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 4y^2 = 3 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{3/4} = 1,$$



Παριστάνει έλλειψη,

με κέντρο: $(x + 1 = 0, y = 0) \Rightarrow (x_0 = -1, y_0 = 0)$

και ακτίνες: $\{\xi = \sqrt{3}, \zeta = \sqrt{3}/2\}$

▲

Παρατήρηση. Η γενική τετραγωνική εξίσωση που μπορεί να περιλαμβάνει και μεικτό όρο παριστάνει επίσης κωνική τομή, όπου εκτός από μετατόπιση έχουμε και περιστροφή αν $\beta \neq 0$. **Π.χ.**

$xy = 1$ είναι η γνωστή περιεστραμμένη υπερβολή.

Το μέγεθος $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$ καλείται **διακρίνουσα** της τετραγωνικής εξίσωσης. Παραβλέποντας τις παθολογικές περιπτώσεις, διαπιστώνουμε ότι γραφικά η εξίσωση παριστάνει:

έλλειψη αν $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$, **υπερβολή** αν $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 < 0$, **παραβολή** αν $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0$

Η σχετική θεωρία μελετάται στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας.

▲

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

23. Πρώτο διαφορικό

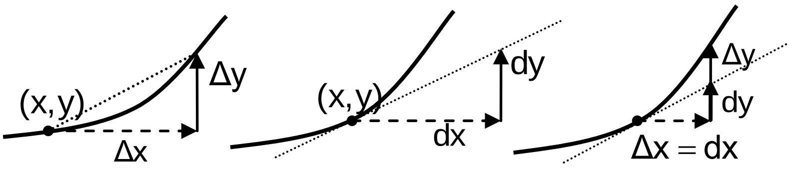
Θεωρούμε μια συνάρτηση: $y = f(x)$. Αρχίζοντας από κάποιες αρχικές τιμές: $\{x, y\}$

- Οι **μεταβολές:** $\{\Delta x, \Delta y\}$ ορίζονται ως μετατοπίσεις πάνω στη καμπύλη της συνάρτησης όπως στο πρώτο σχήμα παρακάτω, και ικανοποιούν την εξίσωση μεταβολών:

$$\Delta y = \Delta f(x) \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- Τα **διαφορικά:** $\{dx, dy\}$ ορίζονται ως μετατοπίσεις πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο ίδιο σημείο όπως στο δεύτερο σχήμα, και ικανοποιούν την πολύ απλούστερη (γραμμική) **εξίσωση διαφορικών:**

$$dy = df(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$$



Μεταβολές-διαφορικά

Η παραπάνω σχέση μεταξύ των διαφορικών ισχύει οιαδήποτε από τις δύο μεταβλητές αν θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη, λόγω της σχέσης αναστροφής μεταξύ αντίστροφων συναρτήσεων. Οι δύο έννοιες: {μεταβολές, διαφορικά}, συμπίπτουν μόνο για τις γραμμικές εξισώσεις. Στη γενική περίπτωση τα διαφορικά δίνουν μια **εκτίμηση** των μεταβολών όταν αυτές είναι μικρές, με την έννοια ότι στο όριο ο λόγος τους τείνει στην μονάδα:

$$\Delta y / dy \to 1 \text{ **όταν** } \Delta x = dx \to 0$$

όπου *για την ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνουμε το διαφορικό ίσο με την μεταβολή.* Για τον λόγο αυτό τα διαφορικά ονομάζονται και **οριακές μεταβολές.** Ειδικότερα, όσον αφορά το πρόσημο της μεταβολής, ισχύει το παρακάτω:

*Για μικρά $\Delta x = dx$ το πρόσημο της μεταβολής Δy δίνεται από το πρόσημο του διαφορικού dy **αν το τελευταίο είναι μη μηδενικό,** δηλαδή στα σημεία με μη μηδενική παράγωγο. Συμπεραίνουμε ότι η μονοτονία καθορίζεται από το (γνήσιο) πρόσημο της παραγώγου, όπως είχαμε διαπιστώσει.*

24. Δεύτερο διαφορικό

Από κάποια αρχική τιμή x θεωρούμε μια μεταβολή Δx και την αντίστοιχη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Παραπάνω διαπιστώσαμε ότι, σε αντιστοιχία με την γραμμική προσέγγιση, μια πρώτη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης, για *μικρές μεταβολές* Δx, δίνεται από το **πρώτο διαφορικό:**

$$\Delta f \approx df = f'(x)dx, \text{ όπου: } \Delta x = dx$$

Ως **δεύτερο διαφορικό** της συνάρτησης ορίζεται το μέγεθος

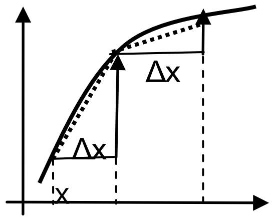
$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2$$

Σε αντιστοιχία τώρα με την παραβολική προσέγγιση, βρίσκουμε ότι μια καλλίτερη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης βρίσκεται αν στο πρώτο διαφορικό προσθέσουμε και το μισό **του δεύτερου διαφορικού:**

$$\Delta f(x) \approx df(x) + \frac{1}{2}d^2 f(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)dx^2$$

Έτσι, **ο χαρακτηρισμός της κυρτότητας αφορά το πρόσημο της διαφοράς:** $\Delta f(x) - df(x)$**,** που σύμφωνα με τα παραπάνω καθορίζεται από το πρόσημο του 2ου διαφορικού, και επομένως από το πρόσημο της 2ης παραγώγου αν αυτή είναι μη μηδενική. Ειδικότερα, στα στάσιμα σημεία το πρώτο διαφορικό μηδενίζεται οπότε το πρόσημο της μεταβολής χαρακτηρίζεται από το πρόσημο του δεύτερου διαφορικού, δηλαδή της δεύτερης παραγώγου, δίνοντας τον γνωστό χαρακτηρισμό των στάσιμων ως τοπικών ακρότατων όπως θα εξετάσουμε και σε επόμενο κεφάλαιο

Παρατήρηση. Για να ορίσουμε τη δεύτερη παράγωγο απευθείας από την αρχική συνάρτηση, παίρνουμε διαδοχικές μεταβολές, και υπολογίζουμε τον **ρυθμό μεταβολής του ρυθμού μεταβολής** στο όριο $\Delta x \to 0$:



$$x,\ x+\Delta x,\ x+\Delta x+\Delta x = x+2\Delta x$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} \to \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Ο λόγος $\Delta^2 f(x)/\Delta x^2$ *μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση της 2ης παραγώγου όταν έχουμε 3 διαδοχικές τιμές της συνάρτησης.* Ο όρος στον αριθμητή είναι η μεταβολή της μεταβολής, και καλείται **δεύτερη μεταβολή της συνάρτησης**:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f) = [f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x)-f(x)]$$

$$= f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$$

Αντιστοιχεί στο δεύτερο διαφορικό.

▲

Παρατήρηση. Διαφορικά ανώτερης της $2^{ης}$ τάξης, ορίζονται σε αντιστοιχία με τα πολυώνυμα Taylor ανώτερης τάξης που αναφέραμε προηγουμένως.

▲