I.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (Α)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

1.Θετικές δυνάμεις 2.Αρνητικές δυνάμεις 3.Εκθετική 4.Λογαριθμική 5.Αλλαγή βάσης 6.Πολυωνυμικές 7.Ρητές 8.Περιοδικές συναρτήσεις-Τριγωνομετρικές 9.Πράξεις στις συναρτήσεις 10.Σύνθεση 11.Μηδενικά 12.Ασυνέχειες

1η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΚΛΙΣΗ.

13.Κλίση ευθείας 14.Μεταβολές 15.(Οριακός) ρυθμός μεταβολής-παράγωγος 16.Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων 17.Κανόνες παραγώγισης 18.Αλυσωτή παράγωγος 19.Μονοτονία 20.Στάσιμα 21.Ασυνέχειες της παραγώγου-γωνίες

2η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ.

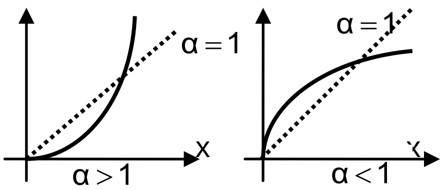
22.Δεύτερη παράγωγος 23.Κυρτή 24.Κοίλη 25.Σημεία καμπής 26.Τμηματικά ορισμένες 27.Περιβάλλουσες

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ.

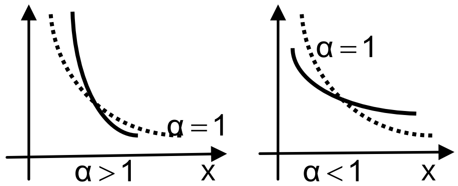
28.Ορισμένο ολοκλήρωμα 29.Παράγουσα 30.Θεμελιώδες θεώρημα του Μαθηματικού Λογισμού 31.Βασικά ολοκληρώματα 32.Γραμμικότητα 33.Γενικευμένο ολοκλήρωμα

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Θετικές δυνάμεις: $x^{\alpha}\ \ \alpha>0$

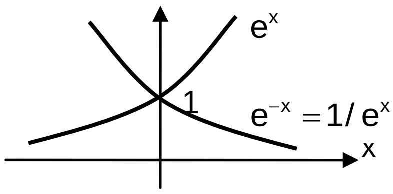


2. Αρνητικές δυνάμεις: $x^{-\alpha}\ \ \alpha>0$

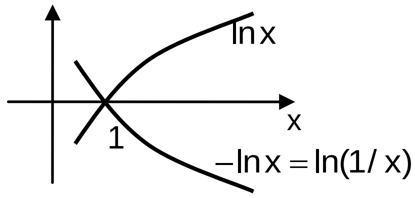


Όλες διέρχονται από το σημείο $(1,1)$. Στα μεγαλύτερα x, όσο μεγαλύτερη είναι μια θετική δύναμη τόσο πιο απότομα ανεβαίνει, και όσο μεγαλύτερη είναι μια αρνητική τόσο πιο απότομα κατεβαίνει.

3. Εκθετική: $\exp x$ ή e^x



4. Λογαριθμική: $\ln x$ ή $\log_e x$



Ιδιότητες:

$e^{-\beta}=1/e^{\beta}$, $e^{\beta}e^{\gamma}=e^{\beta+\gamma}$, $(e^{\beta})^{\gamma}=e^{\beta\gamma}$, $e^0=1$, $e^{-\infty}=0$,

$\ln(\beta\gamma)=\ln\beta+\ln\gamma$, $\ln\dfrac{\beta}{\gamma}=\ln\beta-\ln\gamma$, $\ln\dfrac{1}{\beta}=-\ln\beta$, $\ln(\beta^{\gamma})=\gamma\ln\beta$, $\ln 1=0$, $\ln 0\to-\infty$

Το εκθετικό και ο λογάριθμος είναι **αντίστροφες πράξεις**, με τις παρακάτω έννοιες:

$\{\alpha=e^{\beta}\Leftrightarrow\beta=\ln\alpha\}$, $\{\,e^{\ln\alpha}=\alpha,\ \ln e^{\alpha}=\alpha\,\}$

5. Αλλαγή βάσης

Γενικότερα, η εκθετική και η λογαριθμική ορίζονται ως προς οιαδήποτε **βάση** $\alpha>0$**:**

α^x : *εκθετική με βάση* α , $\log_\alpha x$: *λογαριθμική με βάση* α, όπου: $\{\gamma=\alpha^{\beta}\Leftrightarrow\beta=\log_\alpha\gamma\}$

Οι συναρτήσεις αυτές μετατρέπονται στη νεπέρια βάση e, ως εξής:

1. $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ **απόδειξη:** $\alpha=e^{\ln\alpha}\Rightarrow\alpha^x=(e^{\ln\alpha})^x=e^{x\ln\alpha}$
2. $\log_\alpha x=\dfrac{\ln x}{\ln\alpha}$ **απόδειξη:** $x=\alpha^{\log_\alpha x}\Rightarrow\ln x=\ln(\alpha^{\log_\alpha x})=(\log_\alpha x)(\ln\alpha)\Rightarrow\log_\alpha x=\dfrac{\ln x}{\ln\alpha}$

Ο λογάριθμος με βάση e καλείται και *φυσικός λογάριθμος* ($\ln$, *natural logarithm*)

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και οι βάσεις: 2 *(δυαδικός),* 10 *(δεκαδικός)*.

$\{2^x=e^{x\ln 2},\ \log_2 x=\ln x/\ln 2\}$, $\{10^x=e^{x\ln 10},\ \log_{10}x=\ln x/\ln 10\}$ ▲

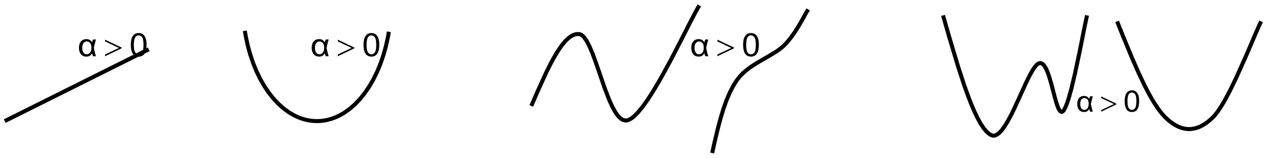
Παρατήρηση. Οι συναρτήσεις δυνάμεις επίσης μπορούν να εκφραστούν μέσω της εκθετικής:

$$x^{\alpha} = (e^{\ln x})^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}, \quad x^{x} = (e^{\ln x})^{x} = e^{x \ln x}$$

Σημ. Ο *νεπέριος αριθμός* e ορίζεται ως το όριο: $e = \lim\limits_{c \to +\infty} \left(1 + 1/c\right)^{c} = \lim\limits_{h \to 0^{+}} = (1+h)^{1/h} = 2.7\cdots$

6. Πολυωνυμικές: $P(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, με $\alpha_0 \neq 0$, βαθμού: $\deg P = n = 0,1,2,...$

Πολυώνυμα μηδενικού βαθμού: $n = 0$, είναι οι **σταθερές** συναρτήσεις, και βαθμού: $n = 1$, είναι οι **γραμμικές.** Δίνουμε τα γραφήματα των πολυωνύμων βαθμού $n = 1,2,3,4$, με θετικό $\alpha_0 > 0$. Με αρνητικό $\alpha_0 < 0$ βρίσκουμε τα αρνητικά τους, δηλαδή τα συμμετρικά ως προς τον οριζόντιο άξονα.



$\alpha x + \beta$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$	$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$
γραμμικές: $n = 1$	**παραβολικές**: $n = 2$	**κυβικές**: $n = 3$	**τέταρτου βαθμού:** $n = 4$

Γενικότερα, τα πολυώνυμα **βαθμού** (degree) $n > 1$ έχουν:

- Το πολύ n γνήσια μονότονα τμήματα, αλλά μπορεί και λιγότερα: $n-2, n-4, ...$.
- Το πολύ $n-1$ γνήσια τοπικά ακρότατα, αλλά μπορεί και λιγότερα: $n-3, n-5, ...$
- Το πολύ n διαφορετικά (πραγματικά) μηδενικά. Καλούνται και *ρίζες* του πολυωνύμου

7. Ρητές

καλούνται οι συναρτήσεις που προκύπτουν παίρνοντας τον λόγο δύο πολυωνύμων:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + ... + \beta_m}, \text{ όπου: } n = \deg P, \ m = \deg Q$$

1. Τα μηδενικά του παρονομαστή $Q(x)$ αποτελούν τις **κατακόρυφες ασύμπτωτες.**
2. Στο όριο $x \to \pm\infty$ μια ρητή συνάρτηση τείνει **ασυμπτωτικά** ως εξής:

α) Αν $\deg P < \deg Q$, τότε τείνει στο 0.

β) Αν $\deg P \geq \deg Q$, τότε **διαιρώντας** τα πολυώνυμα την φέρνουμε στη μορφή:

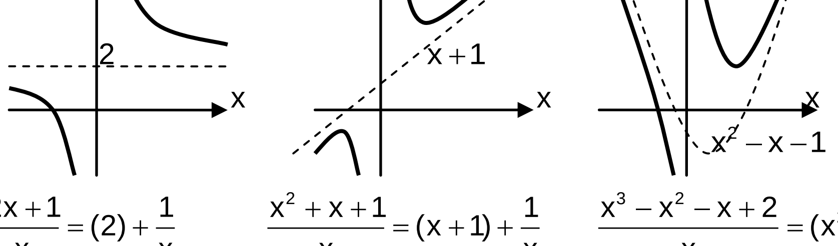
$$R(x) = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{Q(x)}, \quad \text{όπου:}$$

$\Pi(x)$: **πολυώνυμο πηλίκο** με $\deg \Pi = \deg P - \mathrm{drg} Q = n - m \geq 0$

$Y(x)$: **πολυώνυμο υπόλοιπο** με $\deg Y < \deg Q$

Τώρα τείνει προς το πολυώνυμο πηλίκο: $R(x) \to \Pi(x)$, (διότι $Y(x)/Q(x) \to 0$ όπως στο α)

Παράδειγμα. Στο κάθε σχήμα παριστάνουμε το (**οριακό) πολυώνυμο πηλίκο** με διακεκομμένη γραμμή.



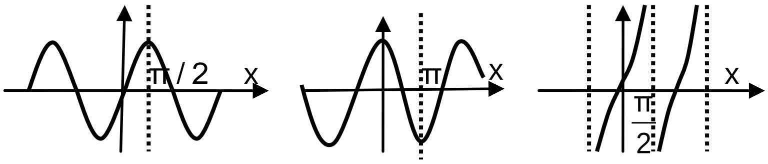
$$\frac{2x+1}{x} = (2) + \frac{1}{x} \qquad \frac{x^2+x+1}{x} = (x+1) + \frac{1}{x} \qquad \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x} = (x^2 - x - 1) + \frac{2}{x}$$

Παράδειγμα διαίρεσης πολυωνύμων

$$\frac{x^2+x+1}{2x+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^2+x+1 & \underline{|\,2x+1} \\ -(x^2+x/2) & x/2+1/4 \\ \quad x/2+1 & \\ \quad -(x/2+1/4) & \\ \qquad 3/4 & \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{2x+1} = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{3/4}{2x+1} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \\ Q(x) = 3/4 \end{cases}$$

8. Περιοδικές συναρτήσεις-Τριγωνομετρικές

Στο διάστημα: $0 \le x \le \pi/2$ είναι τα γνωστά τριγωνομετρικά μεγέθη, με τις γωνίες x εκφρασμένες σε *ακτίνια (radian)*



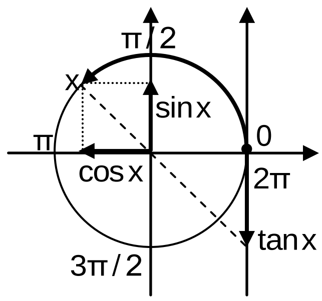
$$\frac{\text{ακτίνια}}{2\pi} = \frac{\text{μοίρες}}{360}$$

$\sin x = \text{ημ}x$ **ημίτονο (sine)** $\quad \cos x = \text{συν}x$ **συνημίτονο (cosine)** $\quad \tan x = \text{εφ}x$ **εφαπτομένη (tangent)**

Έχουμε και τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Παρατήρηση. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις παριστάνονται γεωμετρικά με το παραπλεύρως διάγραμμα στον μοναδιαίο κύκλο, όπου τα *ακτίνια* (*radian)* x είναι το **προσημασμένο μήκος τόξου** σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 1. Έτσι η συντεταγμένη στον κατακόρυφο άξονα είναι το ημίτονο του τόξου x: $\sin x$, στον οριζόντιο το συνημίτονο $\cos x$, κλπ.



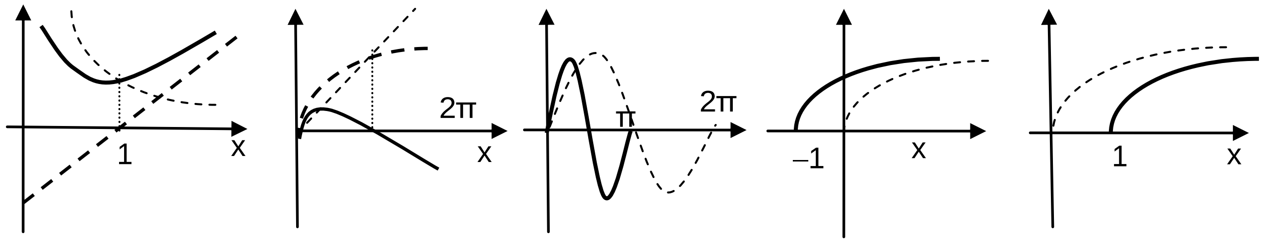
9. Πράξεις στις συναρτήσεις

άθροισμα/διαφορά: $f(x) \pm g(x)$, σε κάθε x προσθέτουμε/αφαιρούμε τα δύο ύψη

διαστολή-συστολή: $\alpha f(x)$ κατακόρυφα, $f(\alpha x)$ οριζόντια με $\alpha > 0$

αντανάκλαση: $-f(x)$ κατακόρυφα, $f(-x)$ οριζόντια

οριζόντια μετατόπιση: $f(x-\alpha)$, όπου το γράφημα της $f(x)$ μετατοπίζεται οριζοντίως κατά α, διότι η τιμή της νέας συνάρτησης στο x δίνεται από την τιμή της αρχικής στο $x-\alpha$. Έτσι, η μετατόπιση είναι προς **δεξιά** αν $\alpha > 0$, προς **αριστερά** αν $\alpha < 0$



άθροισμα, $\frac{x^2-x+1}{x} = (x-1) + \frac{1}{x}$, **διαφορά,** $\sqrt{x} - x$, **οριζόντια συστολή,** $\sin x \to \sin 2x$, **μετατόπιση,** $\sqrt{x} \to \sqrt{x+1}$, **μετατόπιση** $\sqrt{x} \to \sqrt{x-1}$

10. Σύνθεση $\{f(x), g(x)\} \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x))$

Αρχίζοντας με τις παραπάνω απλές συναρτήσεις δημιουργούνται άλλες περισσότερο περίπλοκες παίρνοντας συνθέσεις . Συνήθως εκφράζουμε την σύνθεση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες μεταβλητές:

{αν $y = f(z)$ **και** $z = g(x)$**, τότε** $y = f(g(x))$**}**

{αν $y = y(z)$ **και** $z = z(x)$**, τότε** $y = y(x)$**}**

Δηλαδή: *αν το* y *είναι συνάρτηση του* z *και το* z *είναι συνάρτηση του* x*, τότε το* y *είναι επίσης συνάρτηση του* x*, και προκύπτει παίρνοντας την σύνθεσή των δύο επιμέρους συναρτήσεων.*

Παράδειγμα

1. $f(x) = x^2$ και $g(x) = x - 1 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = (x-1)^2$
2. Η $h(x) = e^{x^2}$ είναι σύνθεση της $f(x) = e^x$ με την $g(x) = x^2$: $h(x) = f(g(x))$
3. Η $y = e^{x^2}$ είναι σύνθεση της $y = e^z$ με την $z = x^2$
4. Αν $y = z^2$ και $z = x - 1$, τότε $y = (x-1)^2$

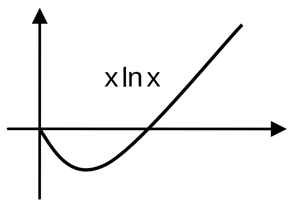
11. Μηδενικά: $f(x) = 0$

Θεώρημα ενδιαμέσου τιμής. *Αν μια συνεχής συνάρτηση έχει γνήσια αντίθετο πρόσημο σε δύο σημεία τότε σε κάποιο γνήσια ενδιάμεσο σημείο θα μηδενίζεται. Συμπεραίνουμε ειδικά ότι τα μηδενικά μιας συνεχούς συνάρτησης χωρίζουν το πεδίο ορισμού της σε χωριστά υποδιαστήματα, όπου σε καθένα από αυτά η συνάρτηση έχει μόνο ένα γνήσιο πρόσημο*

Παράδειγμα

1. Η $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$ έχει τα μηδενικά: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Έχει γνήσια θετικές τιμές για $0 < x < 1$, γνήσια αρνητικές για $x < 0$ ή $x > 1$.



2. Η $f(x) = x\ln x$ για $x \geq 0$, έχει τα μηδενικά: $\{0,1\}$, με γνήσια αρνητικές τιμές στο διάστημα $0 < x < 1$ και γνήσια θετικές στο διάστημα $x > 1$, όπως στο γράφημα παραπλεύρως.
3. Η $f(x) = -1 + x + x^2 + x^3$ έχει τις τιμές: $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$.

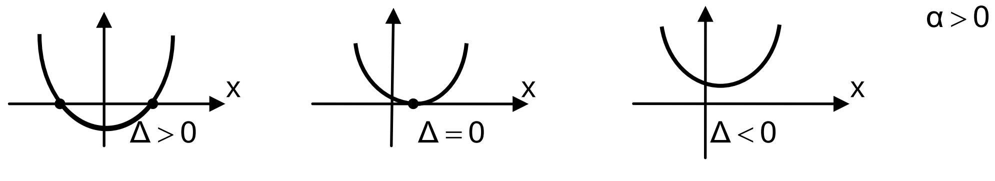
Συμπεραίνουμε ότι θα έχει **τουλάχιστον ένα μηδενικό** γνήσια ενδιάμεσα: $0 < x < 1$ με $f(x) = 0$.

▲

Παράδειγμα. Για την παρακάτω **(τετραγωνική) παραβολική** συνάρτηση, βρίσκουμε:

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$ και **διακρίνουσα:** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

1. Δύο διαφορετικά μηδενικά αν $\Delta > 0$, με αρνητικές τιμές εντός και θετικές εκτός.
2. Μόνο ένα μηδενικό αν $\Delta = 0$, με θετικό πρόσημο εκατέρωθεν.
3. Κανένα μηδενικό αν $\Delta < 0$, με όλες τις τιμές γνήσια θετικές

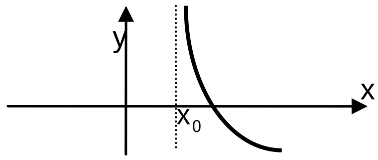


Παρατήρηση. Αν $\alpha < 0$, τότε τα πρόσημα είναι τα αντίθετα των παραπάνω.

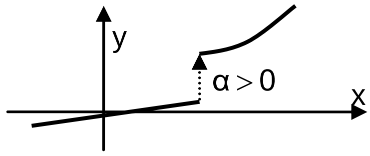
▲

12. Ασυνέχειες. Θεωρούμε μόνο τις παρακάτω δύο μορφές ασυνέχειας μιας συνάρτησης: $f(x)$

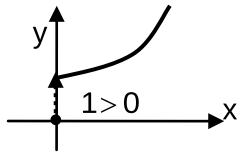
- **άπειρη ασυνέχεια** *στο* x_0 αν έχει όριο $f(x) \to \pm\infty$ όταν $x \to x_0$, από την μια ή από αμφότερες τις πλευρές. Γεωμετρικά οι άπειρες ασυνέχειες ορίζουν τις **κατακόρυφες ασύμπτωτες** της συνάρτησης.
- **βηματική ασυνέχεια** *στο* x_0 αν έχει διαφορετικό όριο από τις δύο πλευρές, *με* **βήμα ασυνέχειας** $\alpha = \lim f(x_0^+) - \lim f(x_0^-)$, που μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό.



άπειρη ασυνέχεια



βηματική ασυνέχεια



βηματική ασυνέχεια

Στο τρίτο γράφημα δίνεται η τμηματικά ορισμένη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x = 0 & \text{για } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$

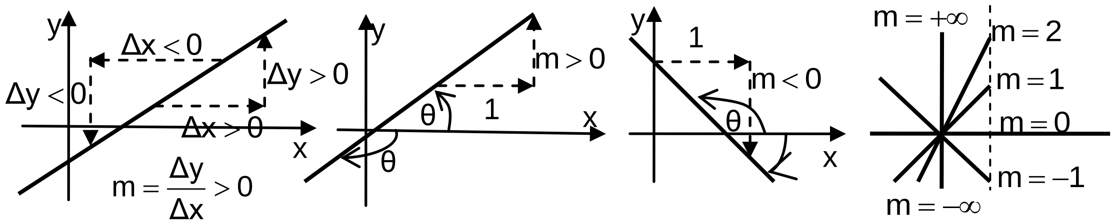
Συνήθως θεωρούμε ότι σένα σημείο βηματικής ασυνέχειας η συνάρτηση δεν έχει καθορισμένη τιμή ή ότι είναι *δίτιμη* και παίρνει οιαδήποτε από τις δύο οριακές τιμές, ή ενίοτε και όλες τις ενδιάμεσες.

Παρατήρηση. Συμβατικά χρησιμοποιούμε **συνήθως** τον όρο **γνήσιο/α** για να υποδηλώσουμε μια ισχυρότερη εκδοχή της βασικής έννοιας:
(γνήσια) θετικό, (γνήσια) αρνητικό,
(γνήσια) αύξων, (γνήσια) φθίνων,
(γνήσιο) μέγιστο (γνήσιο) ελάχιστο,
κλπ.

13. Κλίση ευθείας: $y = mx + β$

Η **κλίση** m μιας ευθείας προσδιορίζεται γεωμετρικά από:

- τον λόγο των μεταβολών $\{Δx, Δy\} \Rightarrow m = Δy/Δx$ από οιεσδήποτε αρχικές τιμές $\{x, y\}$, όπως στο πρώτο γράφημα του σχήματος παρακάτω
- την μεταβολή του y όταν το x **αυξηθεί** κατά μία μονάδα: $Δx = 1 \Rightarrow Δy = m$, όπως στο δεύτερο και στο τρίτο γράφημα.
- την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό $x-$ ημιάξονα: $m = \tan θ$, όπως στο δεύτερο και τρίτο γράφημα



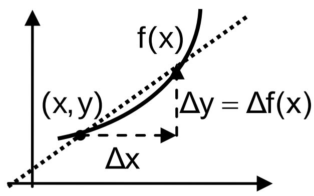
14. Μεταβολές.

Θεωρούμε συνάρτηση $y = f(x)$. Αν το x μεταβληθεί κατά $Δx$ από κάποια αρχική τιμή, τότε το y θα μεταβληθεί κατά:

$$Δy = Δf(x) = f(x + Δx) - f(x)$$

Μέσος ρυθμός μεταβολής καλείται ο λόγος των μεταβολών:

$$\frac{Δy}{Δx} = \frac{Δf(x)}{Δx}$$

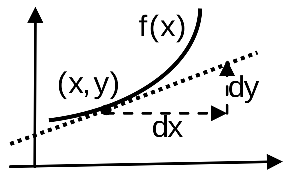


Γεωμετρικά δίνεται από την **κλίση της χορδής,** όπως στο γράφημα. Για γραμμικές συναρτήσεις συμπίπτει με την κλίση της ευθείας.

15. (Οριακός) ρυθμός μεταβολής ή παράγωγος

της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο της (x, y) καλείται το όριο του παραπάνω λόγου των μεταβολών όταν $Δx \to 0$. Παριστάνεται μένα από τα σύμβολα:

$$\left\{\frac{dy}{dx}, \ y'(x), \ Dy(x)\right\} \quad ή \quad \left\{\frac{df}{dx}, \ f'(x), \ Df(x)\right\} \text{ αντίστοιχα}$$



Γεωμετρικά δίνεται από την **κλίση** της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο, όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Λέμε ότι:

η παράγωγος μετράει την μεταβολή του $y = f(x)$ *για μεταβολή του* x *κατά* 1*,* ***οριακά.***

Παράδειγμα. $y = x - x^2 \Rightarrow Δy = y(x + Δx) - y(x) = [(x + Δx) - (x + Δx)^2] - [x - x^2] = (1 - 2x)Δx - Δx^2$

Π.χ. για $(x = 2, y = -2)$: $Δy = -3Δx - Δx^2 \Rightarrow \frac{Δy}{Δx} = -3 - Δx \to -3$ όταν $Δx \to 0$. Δηλαδή: $y'(2) = -3$.

Γενικότερα: $\frac{Δy}{Δx} = 1 - 2x - Δx \to 1 - 2x$, όταν $Δx \to 0$. Επομένως $y'(x) = 1 - 2x$. ▲

16. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων: $f'(x)$

$(c)' = 0$, $(mx + β)' = m$, $(e^x)' = e^x$, $\ln' x = 1/x$, $(x^α)' = αx^{α-1}$ για όλα τα $α$

$\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

Για την παράγωγο πιο σύνθετων συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε και τους παρακάτω κανόνες.

17. Κανόνες παραγώγισης

1. $[αf(x) \pm βg(x)]' = αf'(x) \pm βg'(x)$, **γραμμικός συνδυασμός**
2. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, **γινόμενο**
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, **πηλίκο**

Παράδειγμα

1. $(2x^3 - 5x + 2)' = 2(x^3)' - 5(x)' + (2)' = 6x^2 - 5$

2. $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)' = \dfrac{1'(x-1) - 1(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{0(x-1) - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, για $x \neq 1$

3. $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \dfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x \geq 0$

4. $(\sqrt{x}e^x)' = (\sqrt{x})'e^x + \sqrt{x}(e^x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x = \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x}}e^x$, για $x \geq 0$

5. $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

6 . $(\log_2 x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \dfrac{1}{x\ln 2}$, για $x > 0$ (μετατρέψαμε σε βάση e)

7. $(x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = 1\ln x + x(1/x) = \ln x + 1$, για $x > 0$

18. Αλυσωτή παράγωγος

*Η παράγωγος της σύνθεσης συναρτήσεων ισούται με το **γινόμενο** των επιμέρους παραγώγων:*

$$\{z = z(y),\ y = y(x)\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad z'(x) = z'(y)\cdot y'(x) \quad \text{ή} \quad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

*Η έννοια της παραπάνω ισότητας είναι ότι στο αριστερό μέρος αντικαθιστούμε πρώτα από τις δοθείσες σχέσεις και μετά παραγωγίζουμε, ενώ στο δεξιό μέρος πρώτα **παραγωγίζουμε απευθείας τις δοθείσες σχέσεις** και μετά αντικαθιστούμε.*

Προκύπτουν έτσι οι τύποι:

1. $[f^\alpha(x)]' = \alpha f^{\alpha-1}(x)f'(x)$

2. $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)}f'(x)$, $[\ln f(x)]' = f'(x)/f(x)$

3. $[\sin f(x)]' = [\cos f(x)]f'(x)$, $[\cos f(x)]' = -[\sin f(x)]f'(x)$, $[\tan f(x)]' = [1 + \tan^2 f(x)]f'(x)$

Παράδειγμα

1. $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$

2. $(\ln\sqrt{x+1})' = [\ln(x+1)^{1/2}]' = \dfrac{[(x+1)^{1/2}]'}{(x+1)^{1/2}} = \dfrac{1}{2(x+1)}$. Εναλλακτικά: $\ln(x+1)^{1/2} = (1/2)\ln(x+1) \Rightarrow$

3. $(2^x)' = (e^{x\ln 2})' = e^{x\ln 2}(x\ln 2)' = 2^x\ln 2$ (μετατρέψαμε σε νεπέρια βάση)

4. $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}(1\ln x + x\dfrac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$, για $x > 0$

19. Μονοτονία.

Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται **μονότονη,** και ειδικότερα:

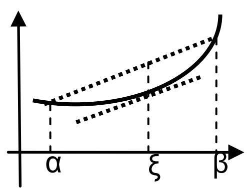
αύξουσα αν $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, φθίνουσα αν $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται **γνήσια μονότονη,** και ειδικότερα:

γνήσια αύξουσα αν $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, *γνήσια φθίνουσα* αν $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Οι ιδιότητες μονοτονίας μιας συνάρτησης μελετώνται πιο συστηματικά χρησιμοποιώντας την παράγωγο, με βασικό εργαλείο το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα μέσης τιμής (mean value theorem) *Αν η* $f(x)$ *είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα* $\alpha \leq x \leq \beta$*, και έχει παράγωγο σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του:* $\alpha < x < \beta$*, τότε η κλίση της χορδής ισούται με την κλίση της εφαπτομένης σε κάποιο γνήσια ενδιάμεσο σημείο, όπως στο γράφημα. Έχουμε:*



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(\xi) \Rightarrow \Delta f = f'(\xi)\Delta x \text{, } \textit{για κάποιο } \xi \textit{ στο εσωτερικό : } \alpha < \xi < \beta$$

όπου: $\{\Delta f = f(\beta) - f(\alpha),\ \Delta x = \beta - \alpha\}$.

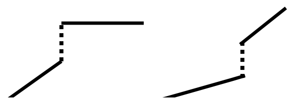
Ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής, βρίσκουμε ότι το πρόσημο της παραγώγου καθορίζει τις ιδιότητες μονοτονίας της συνάρτησης:

Ιδιότητα μονοτονίας σε διάστημα. *Μια συνάρτηση* $f(x)$ *που είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα είναι αύξουσα (φθίνουσα) αν έχει* $f'(x) \geq 0 \ (\leq 0)$ *σε* ***όλα τα σημεία*** *του διαστήματος. Ειδικότερα, αν ικανοποιεί* $f'(x) > 0 \ (< 0)$ *σε όλα τα σημεία, εκτός ίσως ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων όπου μηδενίζεται, τότε είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα).*

Παράδειγμα

1. $f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 < 0$, γνήσια φθίνουσα για όλα τα x.
2. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$, γνήσια φθίνουσα για $x \leq 0$, γνήσια αύξουσα για $x \geq 0$.
3. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0$, γνήσια αύξουσα διότι μηδενίζεται μόνο σένα σημείο: $x = 0$.
4. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$, γνήσια αύξουσα για $x > 0$.
5. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, γνήσια αύξουσα για $x \geq 0$, διότι είναι συνεχής για $x \geq 0$ και έχει γνήσια θετική παράγωγο. Στο σύνορο $x = 0$ η παράγωγος είναι $+\infty$.

Παρατήρηση



αύξουσα γνήσια

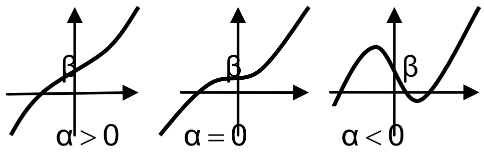
- Μια συνάρτηση είναι φθίνουσα $\Leftrightarrow$ η αρνητική της είναι αύξουσα
- Μια γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει **το πολύ** ένα μηδενικό.
- Μια συνάρτηση μπορεί να είναι μονότονη χωρίς να είναι συνεχής.
- Μια συνάρτηση μπορεί να έχει περισσότερα από ένα μονότονα τμήματα. Σημείο στο οποίο η μονοτονία αλλάζει γνήσια είναι **γνήσιο τοπικό ακρότατο,** *μέγιστο* ή *ελάχιστο.*

20. Στάσιμα σημεία μιας συνάρτησης $f(x)$ καλούνται τα x στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος: $f'(x) = 0$.

Τα στάσιμα σημεία χωρίζουν το διάστημα ορισμού σε υποδιαστήματα, όπου σε κάθε υποδιάστημα η συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη διότι η παράγωγος θα έχει γνήσια το ίδιο πρόσημο, υποθέτοντας συνεχή παράγωγο. Ένα στάσιμο σημείο στο οποίο αλλάζει γνήσια το πρόσημο της παραγώγου είναι **γνήσιο τοπικό ακρότατο,** μέγιστο αν από θετική γίνεται αρνητική, ελάχιστο στην αντίθετη περίπτωση. Ένα στάσιμο στο οποίο η παράγωγος έχει γνήσια το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν δεν είναι ακρότατο, είναι **σημείο καμπής.**

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις ιδιότητες μονοτονίας της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 + \alpha x + \beta \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + \alpha$$



1. Αν $\alpha > 0$, τότε $f'(x) > 0$ για όλα τα x. Είναι γνήσια αύξουσα.
2. Αν $\alpha = 0$, τότε $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Το πρόσημό της δεν αλλάζει στο στάσιμο: $x = 0$. Είναι γνήσια αύξουσα.
3. Αν $\alpha < 0$, τότε $f'(x) = 3x^2 + \alpha = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha/3}$, δύο στάσιμα στα οποία η παράγωγος αλλάζει πρόσημο. Η παράγωγος είναι παραβολική προς τα πάνω. Επομένως στο πρώτο στάσιμο αλλάζει από θετική σε αρνητική και δίνει τοπικό μέγιστο, ενώ στο θετικό στάσιμο αλλάζει από αρνητική σε θετική και δίνει τοπικό ελάχιστο, όπως στο τρίτο γράφημα. Περαιτέρω μελέτη χρειάζεται για να βρούμε αν το πλήθος των μηδενικών είναι 1, 2 ή 3.

▲

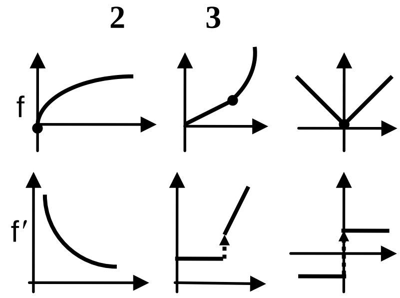
21. Γωνίες-Ασυνέχειες της παραγώγου

Θεωρούμε και δύο μορφές ασυνέχειας της παραγώγου, ως εξής:

$f'(x_o) \to \pm\infty$,**άπειρη ασυνέχεια.** Η εφαπτόμενη ευθεία είναι **κατακόρυφη** με άπειρη κλίση.

$f'(x_o^+) - f'(x_o^-) \neq 0$: **βηματική ασυνέχεια.** Το γράφημα έχει **γωνία.**

Παράδειγμα.



1. $\{f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0\} \Rightarrow f'(x) = 1/2\sqrt{x}$

Η παράγωγος έχει άπειρη ασυνέχεια στο $x = 0$: $f'(0^+) \to +\infty$

2. $f(x) = \begin{cases} x \text{ όταν } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \text{ όταν } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ όταν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \text{ όταν } x \geq 1 \end{cases}$

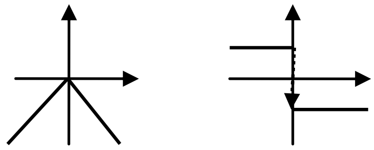
Η παράγωγος έχει βηματική ασυνέχεια στο $x = 1$, βήματος 1, με αντίστοιχη γωνία στο γράφημα.

3. $f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ όταν } x \leq 0 \\ x \text{ όταν } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ όταν } x \leq 0 \\ 1 \text{ όταν } x \geq 0 \end{cases}$,

ασυνέχεια στο $x = 0$ βήματος $+2$.

4. $f(x) = -|x| = \begin{cases} x \text{ όταν } x \leq 0 \\ -x \text{ όταν } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ όταν } x \leq 0 \\ -1 \text{ όταν } x \geq 0 \end{cases}$,

ασυνέχεια στο $x = 0$ βήματος -2.



2η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

22. Δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)$ καλείται η *παράγωγος της (πρώτης) παραγώγου.* Παριστάνεται μένα από τα σύμβολα:

$$y'' = f''(x) \;\; \text{ή} \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \;\; \text{ή} \;\; D^2y = D^2f(x)$$

Μετράει το ρυθμό μεταβολής της πρώτης παραγώγου καθώς το x μεταβάλλεται. Γεωμετρικά:

- *η πρώτη παράγωγος μετράει την **κλίση** της καμπύλης και αφορά τον (οριακό) ρυθμό μεταβολής των τιμών*
- *η δεύτερη παράγωγος μετράει την **καμπυλότητα** της καμπύλης και αφορά τον (οριακό) ρυθμό μεταβολής της κλίσης, θετική αν η κλίση αυξάνει, αρνητική αν ελαττώνεται.*

Οι γραμμικές συναρτήσεις έχουν μηδενική 2η παράγωγο: $\{y = mx + \beta,\ y' = m,\ y'' = 0\}$

Οι παραβολικές συναρτήσεις έχουν σταθερή μη μηδενική 2η παράγωγο:

$\{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ y' = 2\alpha x + \beta,\ y'' = 2\alpha\}$

Παράδειγμα

$\{x^{\alpha},\ (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\ (x^{\alpha})'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\}$ $\{e^{\alpha x}, (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x},\ (e^{\alpha x})'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\}$

$\{\ln x,\ \ln' x = 1/x,\ \ln'' x = -1/x^2\}$, $\{f(x) = (1-x)^{1/2}, f'(x) = -(1/2)(1-x)^{-1/2},\ f''(x) = -(1/4)(1-x)^{-3/2}\}$,

$\{\sin x,\ \sin'(x) = \cos x,\ \sin'' x = -\sin x\}$, $\{\cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ \cos'' x = -\cos x\}$

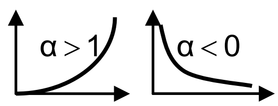
$\{\tan x,\ \tan' x = 1 + \tan^2 x,\ \tan'' x = 2\tan x \tan' x = 2\tan x + 2\tan^3 x\}$

▲

23. Κυρτή καλείται μια *συνεχής* συνάρτηση $f(x)$ σένα διάστημα αν η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι αύξουσα, και **γνήσια κυρτή** αν η πρώτη παράγωγος είναι γνήσια αύξουσα. Ειδικότερα:

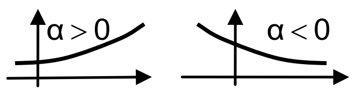
- *Η* $f(x)$ *είναι κυρτή σένα διάστημα αν ικανοποιεί* $f''(x) \geq 0$ *σε **όλα τα σημεία** του διαστήματος.*
- *Μια κυρτή συνάρτηση είναι γνήσια κυρτή αν το γράφημα της δεν έχει ευθύγραμμο τμήμα, οπότε μπορεί να έχει* $f''(x) = 0$ *σε πεπερασμένο πλήθος σημείων αλλά όχι σε ολόκληρο διάστημα.*

Παράδειγμα



1. $y = x^{\alpha},\ y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}$ για $x \geq 0$.

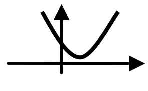
Είναι γνήσια κυρτή $\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1) > 0$, δηλαδή $\alpha < 0$ ή $\alpha > 1$



2. $y = \exp(\alpha x)$, $y' = \alpha\exp(\alpha x)$, $y'' = \alpha^2 \exp(\alpha x)$.

Είναι γνήσια κυρτή $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

Για $\alpha = 0$ είναι σταθερή γραμμική, επομένως κυρτή αλλά όχι γνήσια



3. $y = 2 + (x-1)^2 = 3 - 2x + x^2,\ y' = -2 + 2x,\ y'' = 2$.

Είναι γνήσια κυρτή με δύο μονότονα τμήματα, πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα.

Γενικότερα, αν μια συνάρτηση είναι κυρτή, τότε η πρώτη παράγωγος ως αύξουσα μπορεί να αλλάζει πρόσημο μόνο από αρνητικό σε θετικό, και επομένως: **Μια κυρτή συνάρτηση θα είναι είτε μονότονη, είτε θα έχει δύο διαστήματα μονοτονίας οπότε θα είναι πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα.**

24. Κοίλη καλείται μια συνάρτηση $f(x)$ αν η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ είναι φθίνουσα, και **γνήσια κοίλη** αν η πρώτη παράγωγος είναι γνήσια φθίνουσα. Ειδικότερα:

- *Η* $f(x)$ *είναι κοίλη σένα διάστημα αν ικανοποιεί* $f''(x) \leq 0$ *σε **όλα τα σημεία** του διαστήματος.*
- *Μια κοίλη συνάρτηση είναι γνήσια κοίλη αν το γράφημα της δεν έχει ευθύγραμμο τμήμα, οπότε μπορεί να έχει* $f''(x) = 0$ *σε πεπερασμένο πλήθος σημείων αλλά όχι σε ολόκληρο διάστημα.*

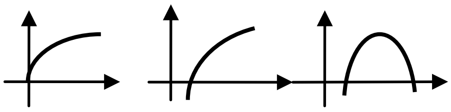
Παράδειγμα

1. $y = x^{\alpha}$, $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}$.Είναι γνήσια κοίλη $\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1) < 0$, δηλαδή $0 < \alpha < 1$.

2. $y = \ln x$, $y' = 1/x$, $y'' = -1/x^2 < 0$. Είναι γνήσια κοίλη.

3. $y = 1-(x-2)^2 = -3+4x-x^2$, $y' = 4-2x$, $y'' = -4$.

Είναι γνήσια κοίλη με δύο μονότονα τμήματα, πρώτα αύξουσα και μετά φθίνουσα.



$x^{\alpha}: \alpha < 1$ $\quad \ln x \quad$ $1-(x-2)^2$

Γενικότερα, αν μια συνάρτηση είναι κοίλη, τότε η πρώτη παράγωγος ως φθίνουσα μπορεί να αλλάξει πρόσημο μόνο από θετικό σε αρνητικό και επομένως: **Μια κοίλη συνάρτηση θα είναι είτε μονότονη, είτε θα έχει δύο διαστήματα μονοτονίας οπότε θα είναι πρώτα αύξουσα και μετά φθίνουσα.** ▲

Παρατήρηση. Ισχύουν και τα παρακάτω:

- Μια συνάρτηση είναι κοίλη $\Leftrightarrow$ η αρνητική της είναι κυρτή.
- Γραμμικός **θετικός** συνδυασμός κυρτών (κοίλων) συναρτήσεων είναι κυρτή (κοίλη) συνάρτηση

Π.χ. κυρτή ως θετικός γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων για $x > 0$ είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = -1 + 2x + x^2 + 3x^{3/2} + 2x^{-1/2} - 4x^{1/2}$$

Γενικά, λέμε ότι οι κυρτές έχουν *θετική κυρτότητα,* και οι κοίλες *αρνητική κυρτότητα,* οπότε ο όρος **«κυρτότητα»** καλύπτει και τις δύο έννοιες. **Η γραμμική συνάρτηση θεωρείται και κυρτή και κοίλη, όχι γνήσια.**

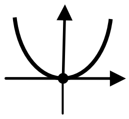
25. Σημεία καμπής

25. Σημεία καμπής μιας συνάρτησης καλούνται τα σημεία στα οποία η κυρτότητα αλλάζει **γνήσια**, από γνήσια κοίλη σε γνήσια κυρτή ή αντίστροφα. *Αν η δεύτερη παράγωγος είναι **συνεχής** τότε στο σημείο καμπής θα έχουμε* $f''(x) = 0$. *Αντίστροφα ένα σημείο με* $f''(x) = 0$ *δεν είναι απαραίτητα σημείο καμπής. Θα είναι αν το πρόσημο της* $f''(x)$ *αλλάζει γνήσια* .

Παράδειγμα.

1. $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$

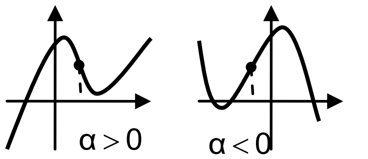
Έχουμε $f''(x) = 0$ όταν $x = 0$, αλλά το $x = 0$ δεν είναι σημείο καμπής. Η συνάρτηση είναι γνήσια κυρτή.



2. $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $f' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $f'' = 6\alpha x + 2\beta$

Με $\alpha \neq 0$, έχουμε $f'' = 0$ όταν $x = -\beta/3\alpha$. Τώρα το $x = -\beta/3\alpha$ είναι σημείο καμπής διότι η f'' ως γραμμική αλλάζει πρόσημο:

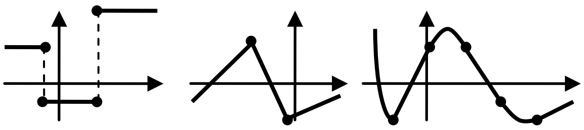
Για $\alpha > 0$, η $f(x)$ είναι κοίλη αν $f''(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq -\beta/3\alpha$, κυρτή αν $f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq -\beta/3\alpha$. Για $\alpha < 0$ ισχύει το αντίστροφο.



▲

26. Τμηματικά ορισμένες

καλούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται με διαφορετικό τύπο, σε **συνεχόμενα** διαστήματα. Ιδιαίτερα διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

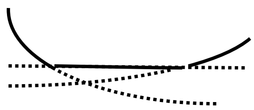


βηματική $\qquad$ **πολυγωνική** $\qquad$ **σφηνοειδής**

- Η *βηματική* αποτελείται από οριζόντια τμήματα και είναι υποχρεωτικά μη συνεχής.
- Η *πολυγωνική* αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, συνεχής, αλλά με βηματικές ασυνέχειες της 1[ης] παραγώγου στα σημεία ένωσης όπου και το γράφημα εμφανίζει γωνίες.
- Η *σφηνοειδής* αποτελείται από παραβολικά τμήματα, συνεχής και με συνεχή 1[η] παράγωγο, αλλά με βηματικές ασυνέχειες της 2[ης] παραγώγου στα σημεία ένωσης.

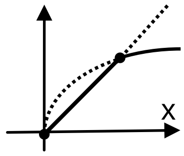
27. Περιβάλλουσες

Τμηματικά ορισμένες είναι και οι συναρτήσεις $\max(\min)$ μιας συλλογής συναρτήσεων που σχηματίζονται παίρνοντας σε κάθε x την μεγαλύτερη (μικρότερη) τιμή των συναρτήσεων της συλλογής. Καλούνται επίσης **πάνω (κάτω) περιβάλλουσες** των συναρτήσεων.



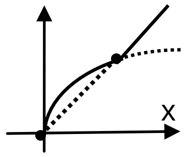
max κυρτών

Παράδειγμα



1. $\min\{x,\sqrt{x}\} = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{αν } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 1 \\ 1/2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} 0 \\ -1/4x^{3/2} \end{cases}$,

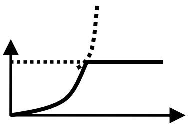
Είναι κοίλη διότι η 1η παράγωγος είναι φθίνουσα, ενώ και στο σημείο ένωσης έχει αρνητικό βήμα ασυνέχειας: $y'(1^+) - y'(1^-) = -1/2$. Δεν είναι γνήσια κοίλη διότι είναι γραμμική στο διάστημα $0 \le x \le 1$.



2. $\text{miax}\{x,\sqrt{x}\} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{αν } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 1/2\sqrt{x} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} -1/4x^{3/2} \\ 0 \end{cases}$,

Τώρα το κάθε τμήμα είναι κοίλο, αλλά η συνάρτηση δεν είναι κοίλη διότι στο σημείο ένωσης: $x = 1$, η 1η παράγωγος μεγαλώνει καθώς έχει θετική βηματική ασυνέχεια: $y'(1^+) - y'(1^-) = 1 - 1/2 = 1/2 > 0$.

3. $\min\{1, x^2\}$ για $x \ge 0$ $= \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \le 1 \\ 1 & \text{αν } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{αν } x \le 1 \\ 0 & \text{αν } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} 2 & \text{αν } x < 1 \\ 0 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$



Τώρα το κάθε τμήμα είναι κυρτό, αλλά η συνάρτηση δεν είναι κυρτή διότι στο σημείο ένωσης: $x = 1$, η 1η παράγωγος μικραίνει καθώς έχει αρνητική βηματική ασυνέχεια: $y'(1^+) - y'(1^-) = 0 - 2 = -2 < 0$.

▲

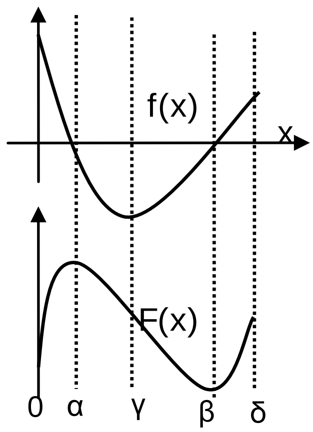
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ

28. Παράγουσα συνάρτησης $f(x)$ καλείται κάθε συνάρτηση $F(x)$ που την έχει ως παράγωγο:

$F'(x) = f(x)$

Είναι μοναδική εκτός από μια προσθετική σταθερά διότι σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής μόνο οι σταθερές συναρτήσεις έχουν μηδενική παράγωγο. *Μια παράγουσα ορίζεται κατά τρόπο μοναδικό αν επιπλέον δίνεται και η τιμή της σε κάποιο σημείο διότι τότε καθορίζεται η τιμή της σταθεράς.* Δίνουμε παρακάτω τις παράγουσες $F(x)$ ορισμένων βασικών συναρτήσεων $f(x)$, χωρίς την σταθερά.

$f(x)$	1	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$x^{-1},\ x > 0$	e^x	$x + x^2$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	x	$x^{\alpha+1}/\alpha+1$	$\ln x$	e^x	$x^2/2 + x^3/3$	$-\cos x$	$\sin x$



παράγουσα

Παράδειγμα. Παραπλεύρως δίνουμε το γράφημα μιας συνάρτησης: $f(x)$, και στη συνέχεια βρίσκουμε γραφικά και το γράφημα μιας παράγουσας $F(x)$, χρησιμοποιώντας τα πρόσημα και τις μονοτονίες της παραγώγου. Ειδικότερα:

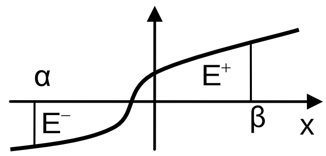
1. Η $F(x)$ είναι αύξουσα όταν η $f(x)$ έχει θετικές τιμές, και είναι φθίνουσα όταν έχει αρνητικές τιμές. Έτσι βρίσκουμε και τα τοπικά ακρότατα $\{\alpha, \beta\}$ της $F(x)$, που δίνονται από τα μηδενικά της $f(x)$ όπου και αλλάζει το πρόσημό της

2. Η $F(x)$ είναι κυρτή όταν η $f(x)$ είναι αύξουσα, και είναι κοίλη όταν είναι φθίνουσα. Έτσι βρίσκουμε και το σημείο καμπής $\{\gamma\}$ της $F(x)$, που δίνεται από το τοπικό ακρότατο της $f(x)$ όπου και αλλάζει η μονοτονία της.

Η παραπάνω γραφική επίλυση δεν μας επιτρέπει να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές της παράγουσας $F(x)$ **σε διάφορα σημεία,** π.χ. στα σημεία $\{0, \delta\}$. Η σύγκριση θα γίνει χρησιμοποιώντας την θεωρία ολοκλήρωσης που δίνουμε στη συνέχεια

▲

29. Ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ σένα φραγμένο διάστημα $[\alpha,\beta]$ καλείται το **προσημασμένο εμβαδόν** μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και του $x-$άξονα σ' αυτό το διάστημα. Παριστάνεται με:



$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E^+ - E^-$$

όπου $\{E^+, E^-\}$ είναι τα **γεωμετρικά εμβαδά** πάνω και κάτω από τον $x-$άξονα αντίστοιχα. Η ερμηνεία ισχύει εφόσον το πάνω όριο είναι μεγαλύτερο: $\beta > \alpha$, οπότε λέμε ότι έχουμε *ολοκλήρωση προς τα δεξιά.*

Επεκτείνουμε την ερμηνεία σόλες τις περιπτώσεις με τους ορισμούς:

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx, \quad \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$$

οπότε ισχύει και η παρακάτω **προσθετική ιδιότητα,** για *οιαδήποτε διάταξη* των $\{\alpha,\beta,\gamma\}$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Παράδειγμα. $\int_0^\beta x dx = \frac{1}{2}\beta^2$ αν το β είναι θετικό, αλλά και αν είναι αρνητικό, διότι τότε έχουμε ολοκλήρωση προς τα αριστερά, αλλά είναι και η συνάρτηση αρνητική.

▲

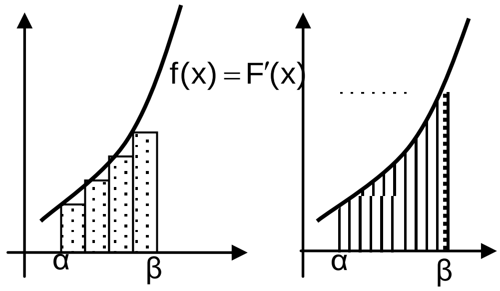
Στη συνέχεια θα συνδέσουμε τις παράγουσες με τα ορισμένα ολοκληρώματα (εμβαδά).

30. Θεμελιώδες Θεώρημα του Μαθηματικού Λογισμού.

Αν η συνάρτηση $f(x)$ *είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα, τότε ισχύει το παρακάτω:*

Ι. $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$, *για κάθε ζεύγος* $\{\alpha,\beta\}$ *στο διάστημα*

Απόδειξη $(\Rightarrow)$**.** Πηγαίνοντας από το α στο β με διαδοχικές μεταβολές Δx, το **θεώρημα μέσης τιμής** μας δίνει για κάθε τέτοια μεταβολή την σχέση:



$\frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(\xi) = f(\xi) \Rightarrow \Delta F = f(\xi)\Delta x$,

για κάποιο ξ στο διάστημα $(x, x + \Delta x)$.

Αθροίζουμε τώρα τις δύο πλευρές της παραπάνω σχέσης, και βρίσκουμε:

1. Στο αριστερό μέρος το άθροισμα:

$\sum \Delta F = F(\beta) - F(\alpha)$

2. Στο δεξιό μέρος το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων στο πρώτο γράφημα:

$\sum f(\xi)\Delta x$

Στο όριο όταν οι μεταβολές τείνουν στο μηδέν: $\Delta x \to 0$, το παραπάνω άθροισμα τείνει στο εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Καταλήγουμε έτσι στην ζητούμενη σχέση:

$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ▲

Κρατώντας τώρα το κάτω όριο της ολοκλήρωσης σταθερό σε κάποιο $x = \alpha$ η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε πάνω όριο: $\beta = x$, οπότε βρίσκουμε την σχέση:

ΙΙ. $F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα καλείται **αόριστο ολοκλήρωμα της** $f(x)$ **αρχίζοντας από το** $x = \alpha$**.** Παρατηρούμε ότι μας δίνει την παράγουσα που έχει μηδενική τιμή στο $x = \alpha$. Έχοντας βρει μια παράγουσα μπορούμε να βρούμε το σύνολο των παραγουσών προσθέτοντας σταθερές. Το καλούμε ***αόριστο ολοκλήρωμα*** της $f(x)$ και το παριστάνουμε με:

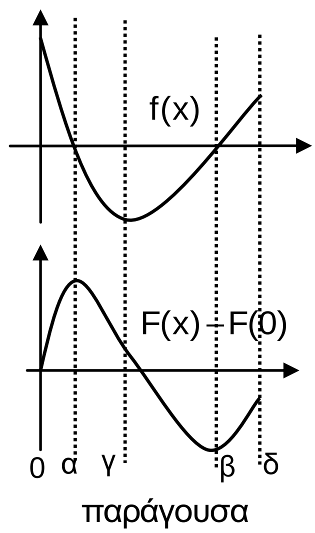
ΙΙΙ. $\int f(x)dx = F(x) + c$

Παρατήρηση Το θεμελιώδες θεώρημα στις παραπάνω τρεις μορφές μας επιτρέπει:

Ι. *Στη μορφή* ***Ι*** *να υπολογίζουμε εμβαδά (ορισμένα ολοκληρώματα) από παράγουσες,*

ΙΙ. *Στην μορφή* ***ΙΙ*** *να υπολογίζουμε τις τιμές των παραγουσών από τα αντίστοιχα εμβαδά.*

ΙΙΙ. *Στην μορφή* ***ΙΙΙ*** *να αναπτύξουμε έναν λογισμό εύρεσης παραγουσών που βασίζεται σε ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων αντίστροφες των ιδιοτήτων των παραγώγων, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο στις τεχνικές ολοκλήρωσης.*



Παράδειγμα. Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε της τιμές της παράγουσας στο προηγούμενο γράφημα, όπως φαίνεται στο γράφημα παραπλεύρως. Π.χ. έχουμε:

$f(\delta) - f(0) < 0 \Rightarrow f(\delta) < f(0)$

διότι το σχετικό αρνητικό εμβαδό στο διάστημα $\{\alpha,\beta\}$ είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο θετικό στα διαστήματα $\{0,\alpha\}$ και $\{\beta,\delta\}$. Αντίστοιχες συγκρίσεις μπορούμε να κάνουμε και για άλλες τιμές.

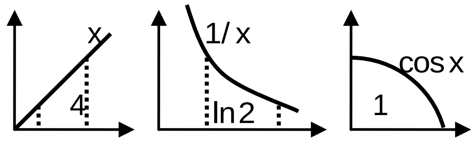
▲

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε τα παρακάτω εμβαδά από τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα:

1. $(x^2/2)' = x \Rightarrow \int_1^3 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 = \frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2}1^2 = 4$

2. $(\ln x)' = x^{-1} \Rightarrow \int_1^2 x^{-1} dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$



▲

31. Βασικά ολοκληρώματα,

χωρίς τις αυθαίρετες σταθερές, που προκύπτουν από την αντιστροφή των γνωστών τύπων παραγώγων:

α) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ $\quad \int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)$ $\quad$ για $\alpha \neq -1$

β) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$ $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$

γ) $\int e^x dx = e^x$ $\quad \int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$

δ) $\int \cos x dx = \sin x$ $\quad \int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x)$

ε) $\int \sin x dx = -\cos x$ $\quad \int f'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x)$

32. Γραμμικότητα.

Ισχύει για τα ορισμένα και για τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x) + \mu\int_\alpha^\beta g(x)]dx\,, \qquad \int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int f(x)dx + \mu\int g(x)dx$$

Παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους και την γραμμικότητα, βρίσκουμε:

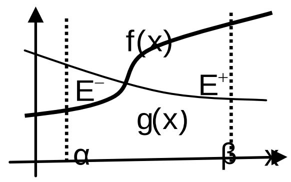
1. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}\ln x dx \underset{(\alpha)}{=} \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, 2. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx \underset{(\gamma)}{=} \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

3. $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \underset{(\beta)}{=} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

4. $\int (2x^2 - x^{-1} + 3)dx = 2\int x^2 dx - \int x^{-1}dx + 3\int 1dx = 2x^3/3 - \ln|x| + 3x$

▲

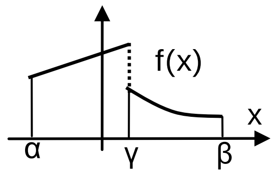
Παρατήρηση. Το ορισμένο ολοκλήρωμα της διαφοράς δύο συναρτήσεων $f(x) - g(x)$ ερμηνεύεται γεωμετρικά ως το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ των καμπύλων τους, θετικό όπου η $f(x)$ είναι μεγαλύτερη, αρνητικό όπου είναι μικρότερη, όπως στο σχήμα παραπλεύρως



$$\int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]\,dx = E^+ - E^- \quad \text{για } \beta > \alpha$$

▲

Παρατήρηση. Το ολοκλήρωμα καθώς και η παράγουσα ορίζονται και για συναρτήσεις με βηματική ασυνέχεια, θεωρώντας την παράγουσα συνεχή συνάρτηση. Ειδικά για το ορισμένο, ολοκληρώνουμε χωριστά σε κάθε διάστημα συνέχειας και μετά αθροίζουμε.



$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

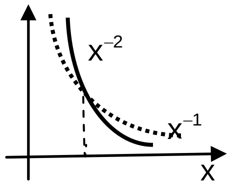
Για το ολοκλήρωμα, οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας δεν παίζουν ρόλο.

▲

33. Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα επεκτείνεται επίσης και σε μη φραγμένα διαστήματα ολοκλήρωσης καθώς και σε μη φραγμένες συναρτήσεις με άπειρη ασυνέχεια. Υπολογίζεται ως όριο και καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα.** Λέμε ότι **συγκλίνει** αν δίνει πεπερασμένο αριθμό, ότι **δεν συγκλίνει** αν δίνει άπειρο. Παρατηρούμε σχετικά ότι *μια περιοχή μπορεί να μην είναι φραγμένη αλλά να έχει πεπερασμένο εμβαδό, όπως ένα άπειρο πλήθος όρων μπορεί να έχει πεπερασμένο άθροισμα.*

Παράδειγμα. Τα παρακάτω ολοκληρώματα αφορούν μη φραγμένο διάστημα



1. $\int_1^{\infty} x^{-1}dx = \ln x\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 \to +\infty$, δεν συγκλίνει,
2. $\int_1^{\infty} x^{-2}dx = -x^{-1}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + 1 \to 1$, συγκλίνει

Παράδειγμα. Το παρακάτω ολοκλήρωμα αφορά μη φραγμένη συνάρτηση

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 \to +\infty$, δεν συγκλίνει

Πρόταση. *Τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν* $\Leftrightarrow$ *ικανοποιούνται οι αντίστοιχες συνθήκες:*

1. $\int_1^{+\infty} x^{-r}dx = \frac{1}{r-1} \Leftrightarrow r > 1$ ***2.*** $\int_0^1 x^{-r}dx = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow 0 < r < 1$ ***3.*** $\int_0^{+\infty} e^{-rx}dx = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r > 0$