B_3. Πολλαπλασιαστές Lagrange

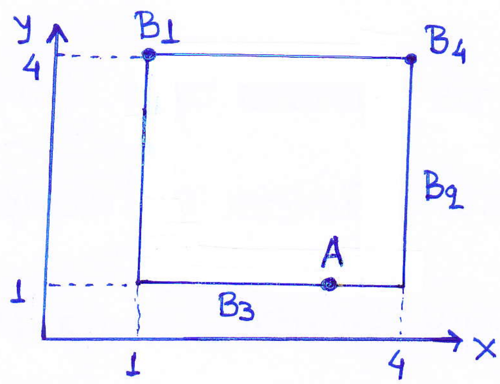
$\boxed{2014-2015}$

Άσκηση 1η: Να βρεθούν οι ακρότατες τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στις αντίστοιχες φραγμένες περιοχές:

Λύση:

- $f(x,y) = xy - x - 3y$ στην τετραγωνική περιοχή $\{1 \le x \le 4, 1 \le y \le 4\}$

Επειδή η περιοχή είναι φραγμένη τότε το ακρότατο θα βρίσκεται σε σημεία της περιοχής, στάσιμα ή συνοριακά.



Είναι: $f_x = y - 1$, $f_y = x - 3$

A: Στάσιμο Σημείο

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

οπότε το στάσιμο σημείο είναι $(x,y) = (3,1)$ με $f = -3$

Το σύνορο αποτελείται από τέσσερις καμπύλες:

B_1: $\{x = 1, 1 \le y \le 4\}$ τότε $f = -1 - 2y$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο $(1,4)$, το $f = -9$ και μέγιστο στο $(1,1)$, το $f = -3$

B_2: $\{x=4,\ 1 \leq y \leq 4\}$ τότε $f = y-4$

οπότε η f έχει ελάχιστο στο $(4,1)$, το $f=-3$ και μέγιστο στο $(4,4)$, το $f=0$.

B_3: $\{1 \leq x \leq 4,\ y=1\}$ τότε $f=-3$ σταθερή

B_4: $\{1 \leq x \leq 4,\ y=4\}$ τότε $f = 3x-12$

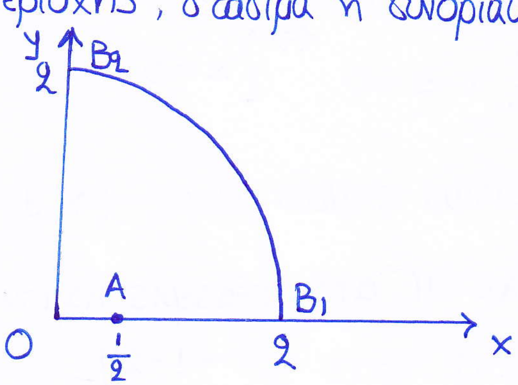
οπότε η f έχει μέγιστο, στο $(4,4)$, το $f=0$ και ελάχιστο στο $(1,4)$, το $f=-9$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές, έχουμε:

- Το μέγιστο βρίσκεται στη κορυφή: $(x^*,y^*)=(4,4)$ με $f^*=0$
- Το ελάχιστο βρίσκεται στη κορυφή: $(x^*,y^*)=(1,4)$ με $f^*=-9$

▸ $f(x,y) = x^2+2y^2-x$, στην κυκλική περιοχή: $x^2+y^2 \leq 4$

Επειδή η περιοχή είναι φραγμένη τότε το ακρότατο θα βρίσκεται σε σημεία της περιοχής, στάσιμα ή συνοριακά.



A: Στάσιμο σημείο

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε το στάσιμο σημείο είναι $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, με $f = -\frac{1}{4}$ (ολικό ελάχιστο)

Το σύνορο αποτελείται από δύο καμπύλες:

B_1: $\{0 \leq x \leq 2, y = 0\}$ τότε $f = x^2 - x$

οπότε η f έχει μέγιστο στο $(2,0)$, το $f = 2$ και ελάχιστο στο $(0,0)$, το $f = 0$

B_2: $\{x = 0, \ 0 \leq y \leq 2\}$ τότε $f = 2y^2$

οπότε η f έχει μέγιστο στο $(0,2)$, το $f = 8$ και ελάχιστο στο $(0,0)$, το $f = 0$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές, έχουμε:

- Το μέγιστο βρίσκεται στο σημείο $(x^*, y^*) = (0,2)$ με $f^* = 8$
- Το ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ με $f^* = -\frac{1}{4}$

Άσκηση 2η: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παρακάτω συνάρτησης 3 μεταβλητών:

$$f(x) + g(y) + h(z), \text{ όπου : } f(x) = e^{-x^2+x}, \ g(y) = \ln y - y$$

$h(z) = 1 - z - e^{-z}$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x,y,z) = f(x) + g(y) + h(z)$

Αφού η συνάρτηση ϕ είναι χωριζομένων μεταβλητών τότε η μέγιστη τιμή της ϕ είναι:

$$\phi^* = \phi(x^*, y^*, z^*) = f(x^*) + g(y^*) + h(z^*) =$$
$$= f^* + g^* + h^*$$

όπου f^*, g^*, h^* οι μέγιστες τιμές των συναρτήσεων f, g, h αντίστοιχα. Επομένως, για να βρούμε την μέγιστη τιμή της ϕ, αρκεί να βρούμε τις μέγιστες τιμές των συναρτήσεων f, g και h.

- Έχουμε $f(x) = e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (-2x+1)\, e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -2e^{-x^2+x} + (-2x+1)^2 e^{-x^2+x} = e^{-x^2+x}(4x^2 - 4x + 1 - 2) =$

$= e^{-x^2+x}(4x^2 - 4x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

  - Στάσιμο σημείο: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+1)e^{-x^2+x} = 0 \underset{\forall x \in \mathbb{R}}{\overset{e^{-x^2+x} > 0}{\Leftrightarrow}}$

    $-2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (δεκτή)

  - $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{4}} < 0$

    τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{1}{2}$ γνήσιο τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}} = f^*$

- Έχουμε $g(y) = \ln y - y$, $y > 0$

$g'(y) = \frac{1}{y} - 1$, $y > 0$

$g''(y) = -\frac{1}{y^2} < 0$, $\forall y > 0$

- Στάσιμο σημείο: $g'(y)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}-1=0 \Leftrightarrow y=1$ (δευτή)

- $g''(1)=-1<0$

τότε η g παρουσιάζει στο $y_0=1$ γνήσιο ολικό μέγιστο

το $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\ln 2-\frac{1}{2}=g^*$

- Έχουμε $h(z)=1-z-e^{-z}$, $z\in\mathbb{R}$

$h'(z)=-1+e^{-z}$, $z\in\mathbb{R}$

$h''(z)=-e^{-z}<0$, $\forall z\in\mathbb{R}$

- Στάσιμο σημείο: $h'(z)=0 \Leftrightarrow -1+e^{-z}=0 \Leftrightarrow$

$e^{-z}=1=e^{0} \Leftrightarrow z=0$ (δευτή)

- $h''(0)=-1<0$

τότε η h παρουσιάζει στο $z_0=0$ γνήσιο ολικό μέγιστο

το $h(0)=0=h^*$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της ϕ είναι:

$$\phi^*=f^*+g^*+h^*=e^{\frac{1}{4}}-\ln 2-\frac{1}{2}+0=$$

$$=e^{\frac{1}{4}}-\ln 2-\frac{1}{2}$$

Άσκηση 3η: Να διαπιστωθεί ότι στα παρακάτω προβλήματα μεγιστοποίησης στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0, y\geq 0\}$, το ακρότατο είναι συνοριακό.

Λύση:

▸ $\max \{ f = x - y - x^2 - y^2 \,//\, x \geq 0, y \geq 0 \}$

Α. Ελεύθερο στάσιμο : $\{ f_x = 0$ και $f_y = 0 \}$ με $\{ x \geq 0, y \geq 0 \}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ -1 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} > 0 \\ y = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \text{(απορρίπτεται)}$$

Β. Συνοριακό : $\{ f_x = 0, y = 0 \}$ με $\{ x \geq 0, f_y \leq 0 \}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} > 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{δεκτή}$$

και $f_y = -1 - 2y = -1 - 2 \cdot 0 = -1 < 0$, ισχύει

οπότε το σημείο $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ είναι μέγιστο.

Γ. Συνοριακό : $\{ f_y = 0, x = 0 \}$ με $\{ y \geq 0, f_x \leq 0 \}$

$$\begin{cases} f_y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} < 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{(απορρίπτεται)}$$

Δ. Γωνιακό : $\{ x = 0, y = 0 \}$ με $\{ f_x \leq 0, f_y \leq 0 \}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ με } \begin{array}{l} f_x = 1 > 0 \text{, δεν ισχύει} \\ f_y = -1 < 0 \end{array}$$

Επομένως, το $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ είναι συνοριακό ακρότατο.

▸ $\max\{f = -2x - y - x^2 - y^2 \,//\, x \geq 0, y \geq 0\}$

Α. Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x = 0$ και $f_y = 0\}$ με $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-2x = 0 \\ -1-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 \\ y = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \text{(απορρίπτεται)}$$

Β. Συνοριακό: $\{f_x = 0, y = 0\}$ με $\{x \geq 0, f_y \leq 0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{(απορρίπτεται)}$$

Γ. Συνοριακό: $\{f_y = 0, x = 0\}$ με $\{y \geq 0, f_x \leq 0\}$

$$\begin{cases} f_y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} < 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{(απορρίπτεται)}$$

Δ. Γωνιακό: $\{x = 0, y = 0\}$ με $\{f_x \leq 0, f_y \leq 0\}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{με} \quad \begin{matrix} f_x = -2 < 0 \\ f_y = -1 < 0 \end{matrix} \quad \text{ισχύει}$$

Επομένως, το $(x,y) = (0,0)$ είναι γωνιακό (συνοριακό) ακρότατο.

Άσκηση 4η: Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\{a, \beta\}$ για τις οποίες το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ έχει συνοριακό ακρότατο.

Λύση:

$$\max \{ f = ax + \beta y - 4x^2 - y^2 \,//\, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

- Συνοριακό: $\{ f_x = 0, y = 0 \}$ με $\{ x \geq 0, f_y \leq 0 \}$

$$\begin{cases} a - 8x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{8} \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{και } f_y = \beta - 2y = \beta - 2 \cdot 0 = \beta \leq 0$$

οπότε το $\left(\frac{a}{8}, 0\right)$ είναι συνοριακό ακρότατο, όταν $a \geq 0$ και $\beta \leq 0$.

- Συνοριακό: $\{ f_y = 0, x = 0 \}$ με $\{ y \geq 0, f_x \leq 0 \}$

$$\begin{cases} \beta - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\beta}{2} \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{με } f_x = a - 8x = a \leq 0$$

οπότε το $\left(0, \frac{\beta}{2}\right)$ είναι συνοριακό ακρότατο, όταν $a \leq 0$ και $\beta \geq 0$.

- Γωνιακό: $\{ x = 0, y = 0 \}$ με $\{ f_x \leq 0, f_y \leq 0 \}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{με} \quad \begin{matrix} f_x = a \leq 0 \\ f_y = \beta \leq 0 \end{matrix}$$

οπότε το $(0,0)$ είναι γωνιακό ακρότατο, όταν $a \leq 0$ και $\beta \leq 0$.

Επομένως, για $a = 0$ και $\beta = 0$, το παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης έχει πάντα συνοριακό ακρότατο.

Άσκηση 5η: Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(2,4)$ από τις καμπύλες:

Λύση:

▸ $\min_{x,y} \{ f=(x-2)^2+(y-4)^2 \,//\, g=2x+y=1 \}$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda(1-2x-y) =$$
$$= (x-2)^2+(y-4)^2+\lambda(1-2x-y)$$

Συνθήκες 1ης τάξης για περιορισμένο εσωτερικό ακρότατο

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)-2\lambda=0 \\ 2(y-4)-\lambda=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-2=\lambda \\ y-4=\frac{\lambda}{2} \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=\frac{\lambda}{2}+4 \\ 2(\lambda+2)+\frac{\lambda}{2}+4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=\frac{\lambda}{2}+4 \\ 4\lambda+8+\lambda+8=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^*=-\frac{14}{5}+2=-\frac{4}{5} \\ y^*=-\frac{14}{5}+4=\frac{6}{5} \\ \lambda^*=-\frac{14}{5} \end{cases}$$

Επομένως, η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(2,4)$ από την καμπύλη $2x+y=1$, είναι:

$$d=\sqrt{f^*}=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}-2\right)^2+\left(\frac{6}{5}-4\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{196}{25}+\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}\sqrt{2}$$

▸ $\min\limits_{x,y} \left\{ f = (x-2)^2 + (y-4)^2 \,//\, g = x^2+y^2 = 1 \right\}$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left(1 - x^2 - y^2\right) =$$

$$= (x-2)^2 + (y-4)^2 + \lambda\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

Συνθήκες 1ης τάξης για περιορισμένο εσωτερικό ακρότατο

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y-4) - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2 = \lambda x \\ y - 4 = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x = -2 \\ (\lambda-1)y = -4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \overset{\lambda \neq 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{-2}{\lambda - 1} \\ y = \dfrac{-4}{\lambda - 1} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{(\lambda-1)^2} + \frac{16}{(\lambda-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2\sqrt{5}$$

οπότε • αν $\lambda = 1 + 2\sqrt{5}$ τότε $(x^*, y^*) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

απορρίπτεται, επειδή πρέπει $x \geq 0$, $y \geq 0$.

• αν $\lambda = 1 - 2\sqrt{5}$ τότε $(x^*, y^*) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, δεκτή

Επομένως, η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(2,4)$ από την καμπύλη $x^2 + y^2 = 1$, είναι:

$$d = \sqrt{f^*} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - 4\right)^2} = \cdots$$

Άσκηση 6η: Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+2xy+3xz$$

με τον περιορισμό $x+y+z=1$.

Λύση:

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+2y^2+3z^2+2xy+3xz+\lambda(1-x-y-z)$$

Συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας:

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z-\lambda=0 \\ 4y+2x-\lambda=0 \\ 6z+3x-\lambda=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3-3x-3y-\lambda=0 \\ 4y+2x-\lambda=0 \\ 6-6x-6y+3x-\lambda=0 \\ z=1-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y-\lambda=-3 \\ 2x+4y-\lambda=0 \\ -3x-6y-\lambda=-6 \\ z=1-x-y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+\lambda=3 & (1) \\ 2x+4y-\lambda=0 & (2) \\ -3x-6y-\lambda=-6 & (3) \\ z=1-x-y & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \quad 3x+5y=3 \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)} \quad -2x-5y=-3 \quad (6)$$

$$\xrightarrow{(5)+(6)} \quad x=0 \overset{(5)}{\Longrightarrow} y=\frac{3}{5}$$

οπότε $\quad z = 1-x-y \underset{y=\frac{3}{5}}{\overset{x=0}{=}} 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

άρα από την (1), έχουμε:

$$x+y+\lambda=3 \Rightarrow \lambda^* = 3-\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

οπότε το στάσιμο σημείο είναι:

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$