B_2. Ισοσταθμικές - Ιακωβιανές Ορίζουσες

2014-2015

Άσκηση 1η: Θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$

α) Να σκιαγραφηθούν οι διανυσματικές παράγωγοι, οι ισοσταθμικές και οι σταθμικές περιοχές.

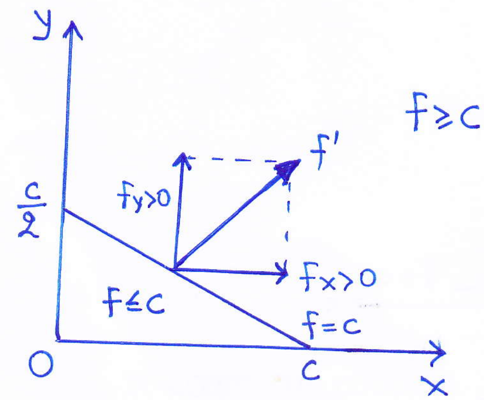
β) Να διερευνηθεί η μονοτονία ως προς τη κάθε μεταβλητή.

Λύση:

▸ $f(x,y) = x+2y$

α) Είναι $f_x = 1>0$, $f_y = 2>0$

Ισοσταθμικές: $f(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R} \iff x+2y=c$



x	0	c
y	$\frac{c}{2}$	0

β) $f_x = 1>0$ τότε η f είναι γνήσια αύξουσα ως προς x

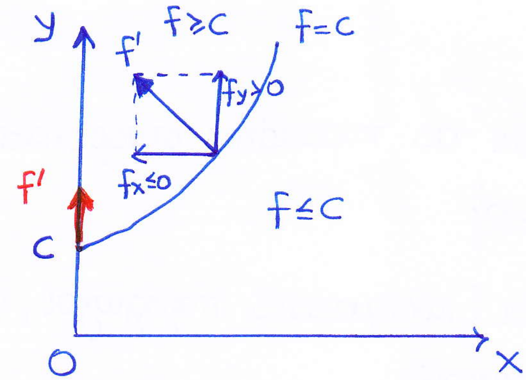
$f_y = 2>0$ τότε η f είναι γνήσια αύξουσα ως προς y

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς x, y.

▸ $f(x,y) = y - x^2$, $x \geq 0, y \geq 0$

α) Είναι $f_x = -2x \leq 0$, $f_y = 1 > 0$

Ισοσταθμικές: $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y - x^2 = c \Leftrightarrow y = x^2 + c$



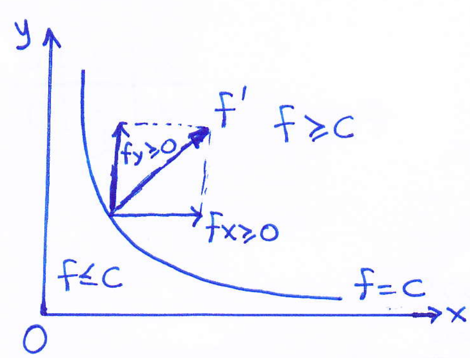
β) $f_x = -2x \leq 0$ τότε η f είναι φθίνουσα ως προς x

$f_y = 1 > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς y

▸ $f(x,y) = x^{1/2} y^{1/3}$

α) Είναι $f_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/3} \geq 0$, $f_y = \frac{1}{3} x^{1/2} y^{-2/3} \geq 0$

Ισοσταθμικές: $f(x,y) = c \Leftrightarrow x^{1/2} y^{1/3} = c$, $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = c^3 x^{-3/2}$



β) $f_x \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα ως προς x

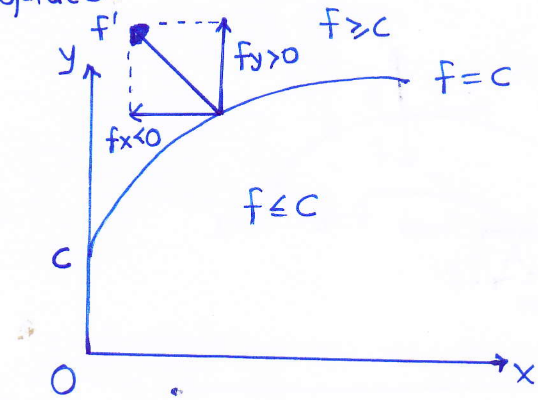
$f_y \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα ως προς y

άρα η f είναι αύξουσα ως προς x, y

- $f(x,y) = y-\sqrt{x}$, $x\geq 0, y\geq 0$

α) Είναι $f_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$, $f_y = 1 > 0$

Ισοσταθμικές: $f(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y-\sqrt{x}=c \Leftrightarrow y=\sqrt{x}+c$

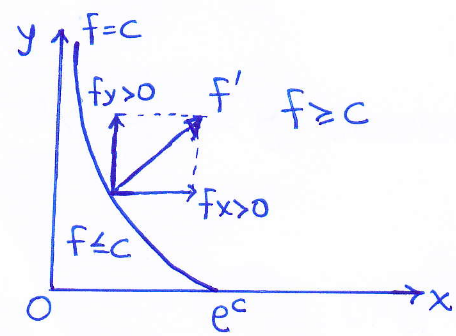


β) $f_x<0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα ως προς x
$f_y>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς y

- $f(x,y) = \ln x + y$, $x>0,\ y\geq 0$

α) Είναι $f_x = \frac{1}{x} > 0$, $f_y = 1 > 0$

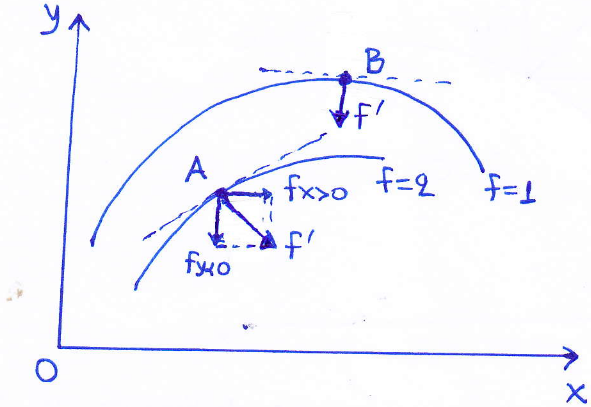
Ισοσταθμικές: $f(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \ln x + y = c \Leftrightarrow y = -\ln x + c$



β) $f_x>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς x
$f_y>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς y
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα ως προς x, y

Άσκηση 2η: Η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει τις ισοσταθμικές του παραπλεύρως σχήματος. Να βρεθούν στα σημεία $\{A,B\}$ τα πρόσημα των μερικών παραγώγων καθώς και του ρυθμού υποκατάστασης.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι όταν το c μεταβάλλεται, η αντίστοιχη καμπύλη μετακινείται προς την κατεύθυνση της διανυσματικής κλίσης f' αν το c αυξάνεται. Επίσης, οι διανυσματικές κλίσεις f' στα σημεία A, B είναι κάθετες στην ισοσταθμική $f=c$.

- Στο σημείο A, έχουμε:

  $$f_x > 0 \quad \text{και} \quad f_y < 0$$

  οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης $y' = -\dfrac{f_x}{f_y} > 0$

- Στο σημείο B, έχουμε:

  $$f_x = 0 \quad \text{και} \quad f_y < 0$$

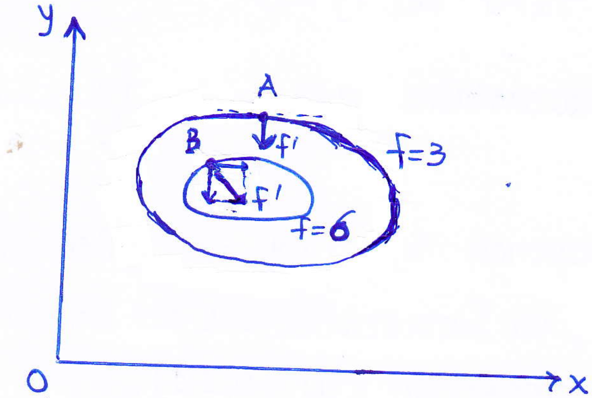
  οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης $y' = -\dfrac{f_x}{f_y} = 0$ (σταθερός)

Άσκηση 3η: Στα γραφήματα παραπλεύρως δίνονται δύο ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $f(x,y)$. Στα σημεία $\{A,B\}$:

1) Να εκτιμηθούν οι μερικές παράγωγοι και ο ρυθμός υποκατάστασης.

2) Να σκιαγραφηθεί η διανυσματική παράγωγος.

Λύση:



- Στο σημείο A, έχουμε:

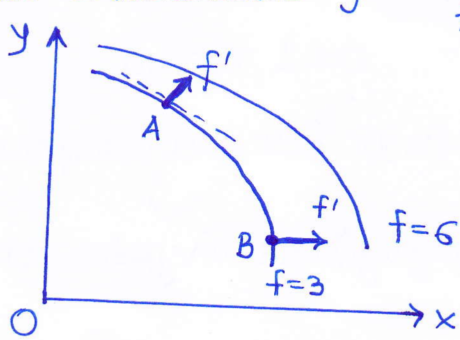
$$f_x = 0 \quad \text{και} \quad f_y < 0$$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης $y' = -\dfrac{f_x}{f_y} = 0$ είναι σταθερός.

- Στο σημείο B, έχουμε:

$$f_x > 0 \quad \text{και} \quad f_y < 0$$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης $y' = -\dfrac{f_x}{f_y} > 0$.



• Στο σημείο Α, έχουμε:

$$f_x > 0 \text{ και } f_y > 0$$

και ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

• Στο σημείο Β, έχουμε:

$$f_x > 0 \text{ και } f_y = 0$$

και ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\infty < 0$

Άσκηση 4η: Για τη συνάρτηση $z = z(x,y)$ που ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση $xz + yz^2 = 1$, να διαπιστωθεί ότι δεν έχει στάσιμο σημείο, και να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση στο $(0,1,1)$.

Λύση:

Έστω ότι η συνάρτηση $z = z(x,y)$ έχει στάσιμο σημείο, δηλαδή ισχύει $z_x = z_y = 0$.

Παραγωγίζουμε πλεγμένα την $xz + yz^2 = 1 \ (1)$ ως προς x, οπότε έχουμε:

$$z + xz_x + 2yzz_x = 0 \overset{z_x=0}{\Rightarrow} z = 0$$

Για $z=0$ στην (1), έχουμε:

$$0 = 1, \text{ άτοπο}$$

Επομένως, η $z = z(x,y)$ δεν έχει στάσιμο σημείο.

• Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε πλεγμένα την (1), ως προς y, οπότε έχουμε:

$$xz_y + z^2 + 2yzz_y = 0$$

Η γραμμική προσέγγιση της $z = z(x,y)$ στο σημείο $(0,1,1)$, είναι:

$$z = z(x,y) \cong z(0,1) + z_x(0,1)(x-0) + z_y(0,1)(y-1) \quad (2)$$

- $z(0,1) = 1$
- $z + xz_x + 2yzz_x = 0 \underset{\substack{y=1 \\ z=1}}{\overset{x=0}{\Rightarrow}} 1 + 2z_x = 0 \Leftrightarrow z_x(0,1) = -\frac{1}{2}$
- $xz_y + z^2 + 2yzz_y = 0 \underset{y=z=1}{\overset{x=0}{\Rightarrow}} 1 + 2z_y = 0 \Leftrightarrow z_y(0,1) = -\frac{1}{2}$

Οπότε η (2) γράφεται:

$$z = z(x,y) \cong 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(y-1)$$

Άσκηση 5η: Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων επιπέδων στα αντίστοιχα σημεία (x,y,z) των παρακάτω επιφανειών:

Λύση:

- $z = z(x,y) = x^2 + y^2$ στο $(1,2,5)$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της $z(x,y)$ είναι η γραμμική προσέγγισή της στο σημείο $(1,2,5)$. Δηλαδή, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το αντίστοιχο σημείο της επιφάνειας, οπότε έχουμε:

$$z(x,y) \approx z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (1)$$

Έχουμε $z(x_0,y_0) = z(1,2) = 5$

$z_x = 2x$ τότε $z_x(1,2) = 2$

$z_y = 2y$ τότε $z_y(1,2) = 4$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$z(x,y) = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) =$$
$$= 2x + 4y - 5$$

▶ $x^2+y^2+z^2 = 9$ στο $(2,1,2)$

Έχουμε $z^2 = 9 - x^2 - y^2 \overset{z>0}{\Longrightarrow} z = \sqrt{9-x^2-y^2} = z(x,y)$

Ομοίως, με πριν έχουμε:

- $z(x_0,y_0) = z(2,1) = 2$
- $z_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ τότε $z_x(2,1) = -1$
- $z_y = \dfrac{-2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} = \dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ τότε $z_y(2,1) = -\frac{1}{2}$

οπότε η (1) γράφεται:

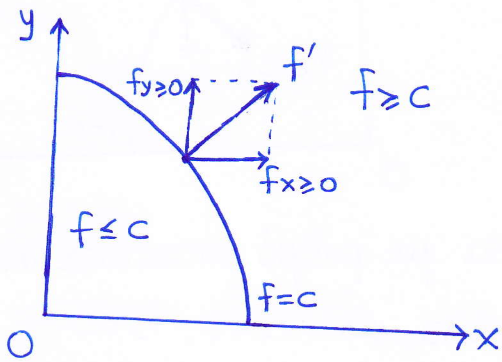
$$z(x,y) = 2 - (x-2) - \frac{1}{2}(y-1) = 2 - x + 2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{9}{2} - x - \frac{1}{2}y$$

Άσκηση 6η: Να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές και οι διανυσματικές παράγωγοι μιας συνάρτησης $f(x,y)$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

Λύση:

① ⓐ αύξουσα με ρυθμό υποκατάστασης αύξοντα

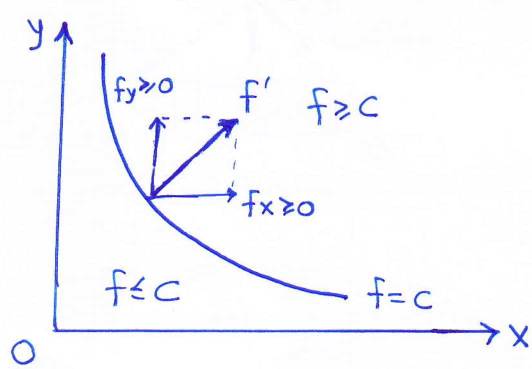
- f αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$
- κλίση της ισοσταθμικής ≡ ρυθμός υποκατάστασης ≡ $\equiv y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$
- Επειδή έχουμε αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' < 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:



ⓑ αύξουσα με ρυθμό υποκατάστασης φθίνοντα

- f αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$

  οπότε η κλίση της ισοσταθμικής είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$
- Επειδή έχουμε φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' > 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:

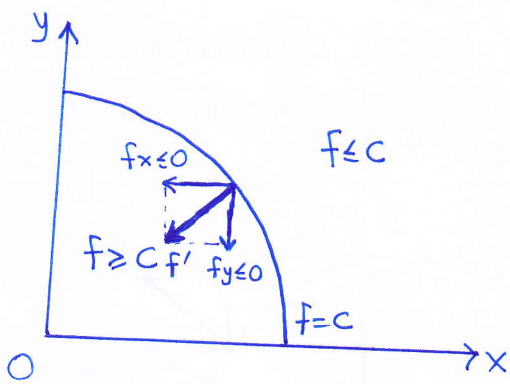


② ⓐ φθίνουσα με ρυθμό υποκατάστασης αύξοντα

- f φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \leq 0$, $f_y \leq 0$

οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Επειδή έχουμε αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' < 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:

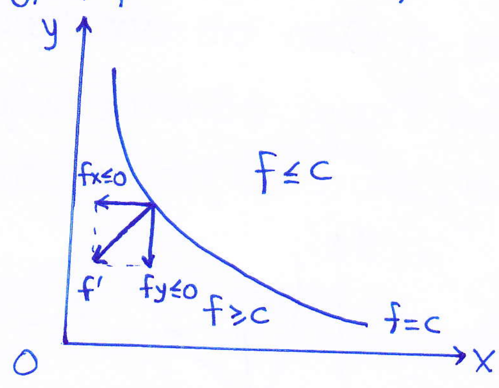


ⓑ φθίνουσα με ρυθμό υποκατάστασης φθίνοντα

- f φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \leq 0$, $f_y \leq 0$

οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Επειδή έχουμε φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' > 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:

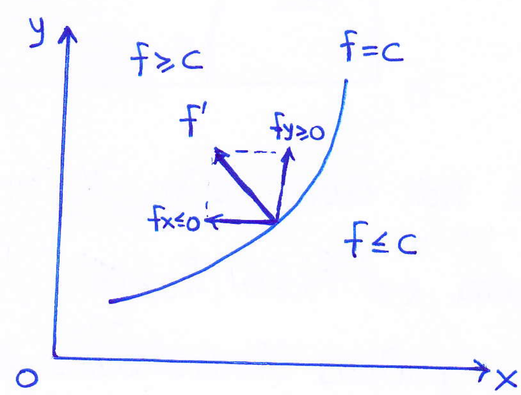


③ x - φθίνουσα, y - αύξουσα, με αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) του y ως προς x

- x - φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \leq 0$
- y - αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_y \geq 0$

οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} > 0$

- Επειδή έχουμε αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' > 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:

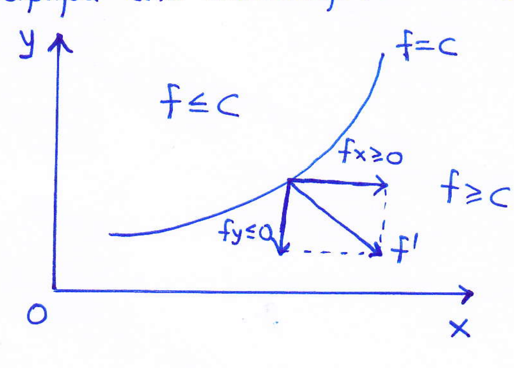


④ x - αύξουσα, y - φθίνουσα με ρυθμό υποκατάστασης αύξοντα

- x - αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \geq 0$
- y - φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_y \leq 0$

οπότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} > 0$

- Επειδή έχουμε αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης τότε $y'' > 0$, οπότε το γράφημα της ισοσταθμικής είναι:

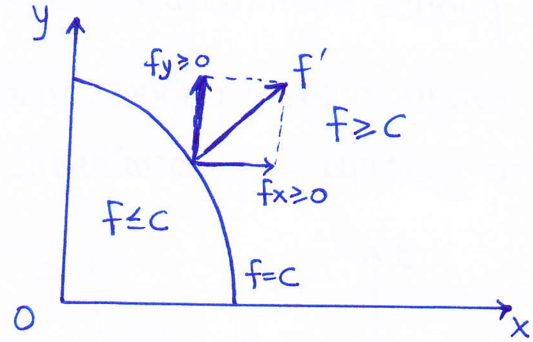


5 (α) αύξουσα και οιονεί κυρτή

- f αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Αφού η f οιονεί κυρτή τότε όλες οι κάτω σταθμικές ($f \leq c$) είναι κυρτές περιοχές.

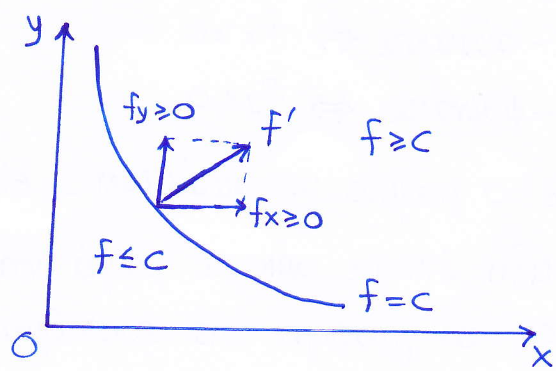


(β) αύξουσα και οιονεί κοίλη

- f αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Αφού η f είναι οιονεί κοίλη τότε όλες οι πάνω σταθμικές ($f \geq c$) είναι κυρτές περιοχές.

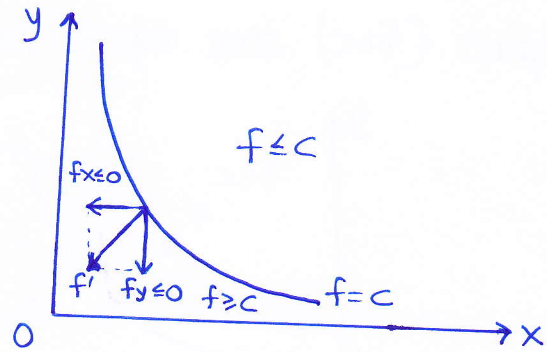


6 a φθίνουσα και οιονεί κυρτή

- f φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \le 0$, $f_y \le 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Αφού η f είναι οιονεί κυρτή τότε όλες οι κάτω σταθμικές ($f \le c$) είναι κυρτές περιοχές.

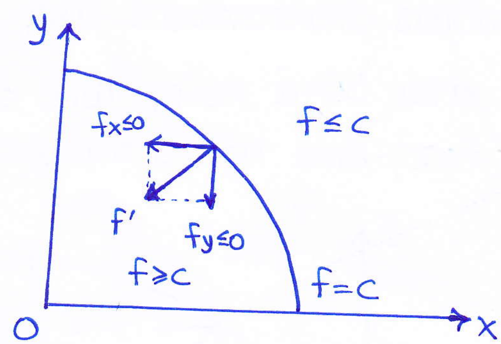


β φθίνουσα και οιονεί κοίλη

- f φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f_x \le 0$, $f_y \le 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} < 0$

- Αφού η f είναι οιονεί κοίλη τότε όλες οι πάνω σταθμικές ($f \ge c$) είναι κυρτές περιοχές.

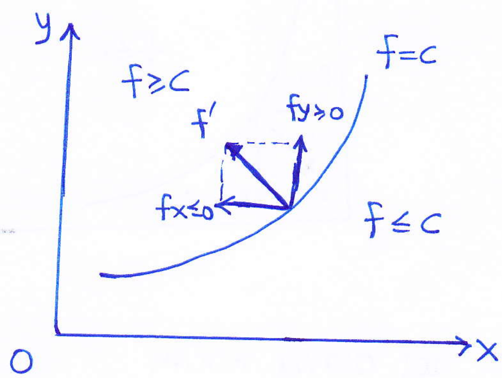


⑦ x-φθίνουσα, y-αύξουσα και οιονεί κοίλη

- x-φθίνουσα $\Leftrightarrow f_x \leq 0$
- y-αύξουσα $\Leftrightarrow f_y \geq 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} > 0$.

- Αφού η f είναι οιονεί κοίλη τότε όλες οι πάνω σταθμικές $(f \geq c)$ είναι κυρτές περιοχές.

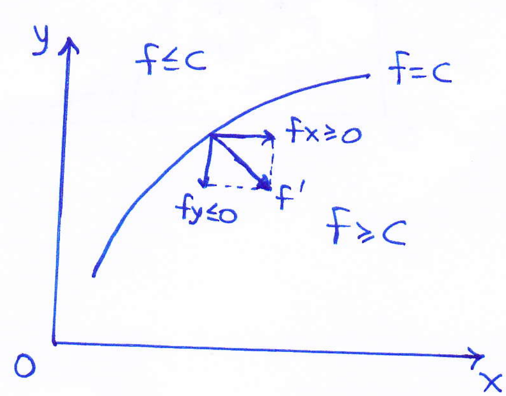


⑧ x-αύξουσα, y-φθίνουσα και οιονεί κοίλη

- x-αύξουσα $\Leftrightarrow f_x \geq 0$
- y-φθίνουσα $\Leftrightarrow f_y \leq 0$

τότε ο ρυθμός υποκατάστασης είναι $y' = -\frac{f_x}{f_y} > 0$.

- Αφού η f είναι οιονεί κοίλη τότε όλες οι πάνω σταθμικές $(f \geq c)$ είναι κυρτές περιοχές.



Άσκηση 7η: Η συνάρτηση $y=y(x)$ ορίζεται πλεγμένα από την εξίσωση: $x^2+xy^3=9$. Για $(x=1, y=2)$ να υπολογιστεί η παράγωγος με τρεις τρόπους:

α) βρίσκοντας την αντίστοιχη συνάρτηση

β) με πλεγμένη παραγώγιση

γ) με τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης.

Λύση:

Έχουμε $f(x,y) = x^2+xy^3=9$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(1,2)$ επαληθεύει την $f(x,y)=9$, αφού $f(1,2)=9$.

α) Είναι $x^2+xy^3=9 \Leftrightarrow xy^3 = 9-x^2 \Leftrightarrow y^3 = \frac{9}{x}-x \Leftrightarrow$

$$y(x) = \left(\frac{9}{x}-x\right)^{1/3}, \text{ οπότε}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{x}-x\right)^{1/3}\cdot\left(-\frac{9}{x^2}-1\right) \underset{y=2}{\overset{x=1}{=}} -\frac{5}{6}$$

β) πλεγμένη παραγώγιση:

$$x^2+xy^3(x)=9 \text{ τότε } 2x+y^3+3xy^2y'=0 \Leftrightarrow$$

$$3xy^2y' = -y^3-2x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^3-2x}{3xy^2} \underset{y=2}{\overset{x=1}{=}} -\frac{5}{6}$$

γ) Τύπος πλεγμένης παραγώγισης:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+y^3}{3xy^2} \underset{y=2}{\overset{x=1}{=}} -\frac{5}{6}$$

Άσκηση 8η: Δίνεται η συνάρτηση: $f(x,p,w) = px^{1/3} - wx$, και θεωρούμε ότι η εξίσωση $f_x = 0$ ορίζει πλεγμένα το x ως συνάρτηση των $\{p, w\}$. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι αυτής της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης. Να επαληθευτεί το αποτέλεσμα.

Λύση:

- Τύποι πλεγμένης παραγώγισης

Έχουμε $f(x,p,w) = px^{1/3} - wx$, $p>0, w>0$

οπότε $f_x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} p x^{-2/3} - w = 0$

- $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= -\frac{f_{xp}}{f_{xx}} \\ f_{xp} &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \\ f_{xx} &= -\frac{2}{9} p x^{-5/3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{\frac{1}{3} x^{-2/3}}{-\frac{2}{9} p x^{-5/3}} = \frac{3}{2p} x \overset{(*)}{=} \frac{3}{2p} \frac{p^{3/2}}{3^{3/2} w^{3/2}} = \frac{p^{1/2}}{2\, 3^{1/2} w^{3/2}}$$

- $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial w} &= -\frac{f_{xw}}{f_{xx}} \\ f_{xw} &= -1 \\ f_{xx} &= -\frac{2}{9} p x^{-5/3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{-1}{-\frac{2}{9} p x^{-5/3}} = -\frac{9}{2p} x^{5/3} \overset{(*)}{=}$$

$$= -\frac{9}{2p} \left[\left(\frac{p}{3w} \right)^{3/2} \right]^{5/3} = -\frac{9}{2p} \left(\frac{p}{3w} \right)^{5/2} =$$

$$= -\frac{p^{3/2}}{2\, 3^{1/2} w^{5/2}}$$

Επαλήθευση: $\quad f_x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} p x^{-2/3} - w = 0 \Leftrightarrow$

$$x^{-2/3} = \frac{3w}{p} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3w}{p}\right)^{-3/2} \Leftrightarrow x(p,w) = \left(\frac{p}{3w}\right)^{3/2} (*)$$

- $$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{3}{2}\left(\frac{p}{3w}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{3w} = \frac{p^{1/2}}{2 \cdot 3^{1/2} w^{3/2}}$$

- $$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{3}{2}\left(\frac{p}{3w}\right)^{1/2}\left(-\frac{p}{3w^2}\right) = -\frac{p^{3/2}}{2 \cdot 3^{1/2} w^{5/2}}$$

Άσκηση 9η: Τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $x^2y + yz^2 + y^3 = 14$. Στις τιμές $(x=3, y=1, z=2)$, να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι του z ως προς $\{x,y\}$ με τρεις τρόπους:

α) βρίσκοντας την αντίστοιχη συνάρτηση

β) με πλεγμένη παραγώγιση

γ) με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης.

Λύση:

Έχουμε $\quad f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + y^3 = 14$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(3,1,2)$ επαληθεύει την εξίσωση $f(x,y,z) = 14$, αφού $f(3,1,2) = 14$.

(α) Είναι $\quad x^2y + yz^2 + y^3 = 14 \Leftrightarrow yz^2 = 14 - x^2y - y^3 \Leftrightarrow$

$$z^2 = \frac{14}{y} - x^2 - y^2 \overset{z>0}{\Leftrightarrow} z = z(x,y) = \sqrt{\frac{14}{y} - x^2 - y^2}$$

οπότε $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{\frac{14}{y} - x^2 - y^2}} \underset{y=1}{\overset{x=3}{=}} -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{14}{y^2}-2y}{2\sqrt{\frac{14}{y}-x^2-y^2}} \overset{x=3}{\underset{y=1}{=\!=}} \frac{-16}{4} = -4$$

(β) Πλεγμένη παραγώγιση

- $x^2y+yz^2+y^3=14$ τότε $2xy+2yz\,z_x+0=0 \Leftrightarrow$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{2yz} = -\frac{x}{z} \overset{x=3}{\underset{z=2}{=\!=}} -\frac{3}{2}$$

- $x^2y+yz^2+y^3=14$ τότε $x^2+z^2+2yz\,z_y+3y^2=0 \Leftrightarrow$

$$z_y = -\frac{x^2+z^2+3y^2}{2yz} \overset{x=3}{\underset{\substack{y=1\\z=3}}{=\!=}} \frac{-16}{4} = -4$$

(γ) Τύποι πλεγμένης παραγώγισης

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2xy}{2yz} = -\frac{x}{z} \overset{x=3}{\underset{z=2}{=\!=}} -\frac{3}{2}$$

- $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{x^2+z^2+3y^2}{2yz} \overset{x=3}{\underset{y=1,\,z=2}{=\!=}} -4$$

Άσκηση 10η: Να βρεθούν οι Ιακωβιανές ορίζουσες του ζεύγους συναρτήσεων:

$$f(x,y,z) = x^2-2xy+yz^2 \ , \quad g(x,y,z) = \ln xy^2z^3$$

Λύση:

- Έχουμε $f(x,y,z) = x^2-2xy+yz^2$

$$f_x = 2x-2y \ , \quad f_y = -2x+z^2 \ , \quad f_z = 2yz$$

- Έχουμε $g(x,y,z) = \ln xy^2z^3$

$$g_x = \frac{1}{xy^2z^3} \cdot y^2z^3 = \frac{1}{x}$$

$$g_y = \frac{1}{xy^2z^3} \cdot 2xyz^3 = \frac{2}{y}$$

$$g_z = \frac{1}{xy^2z^3} \, 3xy^2z^2 = \frac{3}{z}$$

- $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x =$$

$$= (2x-2y)\frac{2}{y} - \frac{1}{x}(-2x+z^2) = \frac{4x}{y} - \frac{z^2}{x} - 2$$

- $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = f_y g_z - f_z g_y =$$

$$= (-2x+z^2)\frac{3}{z} - \frac{2}{y}(2yz) = -\frac{6x}{z} - z$$

- $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix} = f_x g_z - f_z g_x =$$

$$= (2x-2y)\cdot\frac{3}{z} - \frac{1}{x}(2yz) = \frac{6x}{z} - \frac{6y}{z} - \frac{2yz}{x}$$

Άσκηση 11η: Δίνεται η συνάρτηση: $\Pi(x,y,p,v,w) = p(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - vx - wy$ και θεωρούμε ότι το σύστημα: $\{\Pi_x = 0, \Pi_y = 0\}$ ορίζει πλεγμένα τα $\{x,y\}$ ως συναρτήσεις των $\{p,v,w\}$. Να βρεθούν οι αντίστοιχες πλεγμένες παράγωγοι χρησιμοποιώντας τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης και να επαληθευτεί.

Λύση:

Έχουμε $\Pi(x,y,p,v,w) = p(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - vx - wy \quad \{x \geq 0, y \geq 0\}$

- $\Pi_x = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - v = \dfrac{p}{2} x^{-1/2} - v$

- $\Pi_y = \dfrac{p}{2\sqrt{y}} - w = \dfrac{p}{2} y^{-1/2} - w$

$$\begin{cases} \Pi_x = 0 \\ \Pi_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{2} x^{-1/2} - v = 0 \\ \frac{p}{2} y^{-1/2} - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1/2} = \frac{2v}{p} \\ y^{-1/2} = \frac{2w}{p} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2v}{p}\right)^{-2} \\ y = \left(\frac{2w}{p}\right)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(p,v,w) = \frac{p^2}{4v^2} \\ y(p,v,w) = \frac{p^2}{4w^2} \end{cases}$$

οπότε $\dfrac{\partial x}{\partial p} = \dfrac{p}{2v^2}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{p^2}{2v^3}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial w} = 0$

$\dfrac{\partial y}{\partial p} = \dfrac{p}{2w^2}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial w} = -\dfrac{p^2}{2w^3}$

- Τύποι πλεγμένης παραγώγισης

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial x}{\partial p} = - \frac{\frac{\partial(\Pi_x, \Pi_y)}{\partial(p,y)}}{\frac{\partial(\Pi_x, \Pi_y)}{\partial(x,y)}} = - \frac{\begin{vmatrix} \Pi_{xp} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yp} & \Pi_{yy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy} \end{vmatrix}} \quad (1)$$

Έχουμε $\Pi_{xp} = \frac{x^{-1/2}}{2}$, $\Pi_{yx} = \Pi_{xy} = 0$, $\Pi_{xx} = -\frac{p}{4} x^{-3/2}$

$$\Pi_{yy} = -\frac{p}{4} y^{-3/2}, \quad \Pi_{yp} = \frac{y^{-1/2}}{2}$$

- $$\begin{vmatrix} \Pi_{xp} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yp} & \Pi_{yy} \end{vmatrix} = \Pi_{xp}\Pi_{yy} - \Pi_{xy}\Pi_{yp} =$$

$$= \frac{x^{-1/2}}{2} \cdot \left(-\frac{p}{4} y^{-3/2}\right) - 0 \cdot \frac{y^{-1/2}}{2} = -\frac{p}{8} x^{-1/2} y^{-3/2} \quad (2)$$

- $$\begin{vmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy} \end{vmatrix} = \Pi_{xx}\Pi_{yy} - \Pi_{xy}\Pi_{yx} =$$

$$= -\frac{p}{4} x^{-3/2} \cdot \left(-\frac{p}{4} y^{-3/2}\right) - 0 \cdot 0 = \frac{p^2}{16} x^{-3/2} y^{-3/2} \quad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) έχουμε:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = - \frac{-\frac{p}{8} x^{-1/2} y^{-3/2}}{\frac{p^2}{16} x^{-3/2} y^{-3/2}} = \frac{2}{p} x = \frac{2}{p} \cdot \frac{p^2}{4v^2} = \frac{p}{2v^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(\Pi_x,\Pi_y)}{\partial(x,w)}}{\dfrac{\partial(\Pi_x,\Pi_y)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix}\Pi_{xx} & \Pi_{xw}\\ \Pi_{yx} & \Pi_{yw}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Pi_{xx} & \Pi_{xy}\\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy}\end{vmatrix}} \quad (4)$$

Έχουμε:

$$\Pi_{xw} = 0, \quad \Pi_{yw} = -1$$

$$\begin{vmatrix}\Pi_{xx} & \Pi_{xw}\\ \Pi_{yx} & \Pi_{yw}\end{vmatrix} = \Pi_{xx}\Pi_{yw} - \Pi_{xw}\Pi_{yx} =$$

$$= -\frac{P}{4}x^{-3/2}(-1) - 0.0 = \frac{P}{4}x^{-3/2} \quad (5)$$

οπότε από τις (3), (4), (5) έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\frac{P}{4}x^{-3/2}}{\frac{P^2}{16}x^{-3/2}y^{-3/2}} = -\frac{4}{P}y^{3/2} = -\frac{4}{P}\left(\frac{P^2}{4w^2}\right)^{3/2} =$$

$$= -\frac{4}{P}\left(\frac{P}{2w}\right)^3 = -\frac{P^2}{2w^3}$$

Ομοίως, για τα άλλα ...

Άσκηση 12η: Το σύστημα $\{f(x,y)=v,\ g(x,y)=w\}$ ορίζει πλεγμένα τα (x,y) ως συναρτήσεις των (v,w). Να βρεθούν οι παρακάτω τύποι:

$$x_v = \frac{g_y}{\Delta}, \quad x_w = -\frac{f_y}{\Delta}, \quad y_v = -\frac{g_x}{\Delta}, \quad y_w = \frac{f_x}{\Delta}$$

όπου $\Delta = \begin{vmatrix} f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix} = f_x g_y - g_x f_y$.

Λύση:

Ορίζουμε $F(x,y,v,w) = f(x,y) - v$

$G(x,y,v,w) = g(x,y) - w$

οπότε
$$\begin{cases} F(x,y,v,w) = 0 \\ G(x,y,v,w) = 0 \end{cases}$$

- Τύποι πλεγμένης παραγώγισης

▸ $$x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} -1 & f_y \\ 0 & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{-g_y}{\Delta} = \frac{g_y}{\Delta}$$

▸ $$x_w = \frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(w,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_w & F_y \\ G_w & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_y \\ -1 & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{f_y}{\Delta}$$

$$y_v = \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} f_x & -1 \\ g_x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = -\frac{g_x}{\Delta}$$

$$y_w = \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,w)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_w \\ G_x & G_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} f_x & 0 \\ g_x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} = \frac{f_x}{\Delta}$$