Λύση μίας αποκλίνουσας πρωτοβάθμιας εξίσωσης διαφορών

May 16, 2024

Έστω μία πρωτοβάθμια γραμμική εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$\boldsymbol{b_t = Rb_{t-1} - S_t} \tag{1}$$

R είναι μία σταθερή παράμετρος για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $|R|>1$, οπότε σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση διαφορών ονομάζεται αποκλίνουσα. Η αποκλίνουσα εξίσωση διαφορών δεν συγκλίνει προς μία τιμή ισορροπίας. Η μεταβλητή b_t είναι μία συνάρτηση του χρόνου, η οποία είναι άγνωστη και θα βρεθεί από την λύση της εξίσωσης διαφορών.

Ένας από τους τρόπους λύσης μία αποκλίνουσας πρωτοβάθμιας εξίσωσης διαφορών είναι να την αντιστρέψουμε και να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται "λύση προς τα εμπρός" (forward solution) . Από την αντιστροφή θα έχουμε:

$$b_{t-1} = \frac{1}{R}b_t + \frac{S_t}{R} \tag{2}$$

Μία εξίσωση διαφορών ισχύει και για μία περίοδο μπροστά, επομένως:

$$b_t = \frac{1}{R}b_{t+1} + \frac{S_{t+1}}{R} \tag{3}$$

Παρομοίως για ακόμα μία περίοδο μπροστά θα ισχύει:

$$b_{t+1} = \frac{1}{R}b_{t+2} + \frac{S_{t+2}}{R} \tag{4}$$

και ούτω καθεξής.

Τώρα μπορούμε, ξεκινώντας από την εξίσωση (2), να εφαρμόσουμε την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων με το να αντικαταστήσουμε την b_t στην δεξιά της πλευρά, καθώς από εξίσωση (3) ισχύει: $b_t = \frac{1}{R}b_{t+1}+\frac{S_{t+1}}{R}$. Επομένως θα έχουμε:

$$b_{t-1} = \frac{1}{R}b_t + \frac{S_t}{R}$$

$$b_{t-1} = \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{R}b_{t+1} + \frac{S_{t+1}}{R}\right\} + \frac{S_t}{R} \Leftrightarrow$$

$$b_{t-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^2 b_{t+1} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 S_{t+1} + \frac{S_t}{R} \tag{5}$$

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε αντικαθιστώντας στην δεξιά πλευρά της (5) την μεταβλητή b_{t+1} καθώς από εξίσωση (4) ισχύει: $b_{t+1} = \frac{1}{R}b_{t+2} + \frac{S_{t+2}}{R}$, και επομένως θα έχουμε:

$$b_{t-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^2 b_{t+1} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 S_{t+1} + \frac{S_t}{R} \Leftrightarrow$$

$$b_{t-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^2 \left\{\frac{1}{R} b_{t+2} + \frac{S_{t+2}}{R}\right\} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 S_{t+1} + \frac{S_t}{R} \Leftrightarrow$$

$$b_{t-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^3 b_{t+2} + \left(\frac{1}{R}\right)^3 S_{t+2} + \left(\frac{1}{R}\right)^2 S_{t+1} + \frac{S_t}{R}$$

Κατά συνέπεια μετά από n διαδοχικές αντικαταστάσεις στην αντεστραμμένη εξίσωση διαφορών, βρίσκουμε ότι:

$$b_{t-1} = \left(\frac{1}{R}\right)^{T+1} b_{t+T} + \left(\frac{1}{R}\right) \sum_{i=0}^{T} \left(\frac{1}{R}\right)^i S_{t+i}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι η λύση της (1).