Ορ. Οικονομετρία: είναι ο κλάδος της οικονομικής επιστήμης, που ασχολείται με την εμπειρική εκτίμηση των οικονομικών σχέσεων.
Έτσι η οικονομετρία εφαρμόζει στατιστικές μεθόδους για:

- την εκτίμηση οικονομικών σχέσεων
- τον έλεγχο οικονομικών θεωριών, δηλαδή υποθέσεων σχετικών με την οικονομική συμπεριφορά οικονομικών μονάδων (όπως π.χ. οικογενειών, παραγωγών κτ.λ.)
- την πρόβλεψη της συμπεριφοράς μεταβλητών που περιλαμβάνονται σε μια οικονομική σχέση.

Με άλλα λόγια η οικονομετρία συνδυάζει:
- οικονομική θεωρία
- στατιστική θεωρία
- γεγονότα με σκοπό να ελέγξει εμπειρικά ορισμένες σχέσεις ανάμεσα στις οικονομικές μεταβλητές και να δώσει εμπειρικό περιεχόμενο στην οικονομική επιχειρηματολογία.

→ Εκτίμηση της επίδρασης του διαθέσιμου εισοδήματος στις καταναλωτικές δαπάνες (μιας οικογένειας).

C = καταναλωτικές δαπάνες (dependent or endogenous) variable

Y = διαθέσιμο εισόδημα. ~~(independent or exogenous variable)~~

$C = F(Y)$: deterministic relation

$C = \beta_0 + \beta_1 Y$: model

Αντιπροσωπευτικός σκοπός της οικονομικής θεωρίας είναι να προσδιορίσουν το πρόσημο και το μέγεθος των σταθερών δομών

Κάθε πρόσθετο εισόδημα οδηγεί
→ σε πρόσθετη κατανάλωση
→ σε πρόσθετη αποταμίευση

$\boxed{\cdot\ \beta_0, \beta_1 : \text{(structural coefficients)}}$

- $\dfrac{dC}{dY} = \beta_1$ = marginal prospensity to consume (MPC) = οριακή ροπή κατανάλωσης
- $\dfrac{dS}{dY} = 1-\beta_1$ = marginal prospensity to save (MPS) = οριακή ροπή αποταμίευσης.

Ισχύουν: $0 < \beta_1 < 1$ και για $Y=0$ έχουμε πως $\beta_0 > 0$

η κλίση είναι <1 επειδή μέρος της αύξησης του εισοδήματος οδηγείται σε αποταμιεύσεις.

- $C = G(Y, \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 Y + \boxed{\varepsilon}$: stochastic relation

ε: stochastic term or disturbance term or error term

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

- Times series data: χρονολογικές σειρές.

  π.χ: ο ερευνητής ενδιαφέρεται να ερμηνεύσει τη μεταβλητότητα των καταναλωτικών δαπανών διαχρονικά.

$$\begin{pmatrix} 1950 & Y_1 & C_1 \\ 1960 & Y_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2000 & Y_{50} & C_{50} \end{pmatrix}$$

- Cross-section data: διαστρωματικά στοιχεία.

  π.χ: ο ερευνητής ενδιαφέρεται να εκτιμήσει μια οικονομική σχέση για μια ορισμένη χρονική περίοδο.

- (cross-section and time-series data) ⟹ panel

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ
i) αριθμός των υπό εκτίμηση παραμέτρων $k \leq n$ του δείγματος ← μετά θα δοθούν όλες
ii) τα X_i να είναι σταθερά σε επαναλαμβανόμενα δείγματα.

▸ ΣΚΟΠΟΙ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑΣ:

1. Structural analysis (διαρθρωτική ανάλυση)
2. future forecasts (οι μελλοντικές προβλέψεις)
3. policy evaluation (η αξιολόγηση πολιτικής)

1. Ποσοτική μέτρηση των οικονομικών σχέσεων. Αυτό επιτυγχάνεται με τον έλεγχο υποθέσεων σχετικά με τη συμπεριφορά των οικονομικών μονάδων.

   π.χ: • ο ερευνητής ενδιαφέρεται να ελέγξει εάν η οριακή ροπή κατανάλωσης (B_1) γίνεται μικρότερη όταν το διαθέσιμο εισόδημα (Y) αυξάνει.

   • ο παραγωγός ενδιαφέρεται να ελέγξει εάν οι αποδόσεις κλίμακος (returns to scale) είναι αυξάνουσες, ~~φθίνουσες ή σταθερές.~~

Γενικά η διαρθρωτική ανάλυση αποσκοπεί στην κατανόηση και στην επικύρωση ή μη οικονομικών σχέσεων (θεωριών).

2. π.χ. • ο παραγωγός επιθυμεί να προβλέψει τις πωλήσεις του προϊόντος, τα κέρδη, τα αποθέματα και το κόστος παραγωγής.

   • η κυβέρνηση ενδιαφέρεται για την πρόβλεψη των δημοσίων εσόδων και δαπανών, την επίδραση που θα ασκήσει η μεταβολή ενός φορολογικού νόμου στο εθνικό προϊόν, πληθωρισμό

3. Αξιολόγηση εναλλακτικών πολιτικών και η επιλογή εκείνης της οικονομικής πολιτικής που είναι συνεπής με τον αντικειμενικό σκοπό της οικονομετρικής μελέτης.

   π.χ. Η κυβέρνηση θέλει να μειώσει το ποσοστό ανεργίας στο 4%. Όπως όπως είναι γνωστό, η αύξηση του ποσοστού απασχόλησης μπορεί να επιτευχθεί με την αύξηση του Εθνικού προϊόντος της χώρας. Αυτή η αύξηση του Εθνικού προϊόντος μπορεί να γίνει με:
   - Μια αύξηση των επενδύσεων
   - Μια ελάττωση της φορολογίας
   - Μια αύξηση των κυβερνητικών δαπα

Βάσει λοιπόν ενός εκτιμημένου οικονομετρικού υποδείγματος που συνδέει τις παραπάνω μεταβλητές, οι φορείς της οικονομικής πολιτικής προσομοιώνουν (simulate) τις εναλλακτικές πολιτικές και εφαρμόζουν εκείνη την πολιτική, που επιτυγχάνει το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλ την ελάττωση του ποσοστού ανεργίας στο 4%.

ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΕΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

1. Εξειδίκευση των μεταβλητών που περιλαμβάνονται σε μία οικονομική σχέση, δηλαδή εξειδίκευση της εξαρτημένης και των ανεξάρτητων μεταβλητών, που περιλαμβάνονται στην οικονομική σχέση. (Θα ήταν οι πιο σημαντικές μεταβλητές).

2. Εξειδίκευση των προσήμων και μέγεθος των συντελεστών του υποδείγματος.

Έστω ότι έχουμε την παρακάτω οικονομική σχέση: $X_d = F(Y, P_x, P_y, P_z)$

όπου X_d: ζητούμενη ποσότητα του αγαθού X

Y: εισόδημα του καταναλωτή $Y\downarrow$, $Y\uparrow$

P_x: τιμή του αγαθού X. $\downarrow P_x \uparrow$

P_y: τιμή του υποκατάστατου αγαθού Y. $P_y\uparrow$ — ανεξάρτητες μεταβλητές ως προς X_d

P_z: τιμή ενός συμπληρωματικού αγαθού Z. $\downarrow P_z \uparrow$

· $\dfrac{\partial X_d}{\partial P_x} < 0$ · $\dfrac{\partial X_d}{\partial Y}$ $\begin{cases} >0, & \text{αν το X είναι κανονικό.} \\ <0, & \text{αν το X είναι κατώτερο αγαθό.} \end{cases}$

· $\dfrac{\partial X_d}{\partial P_y} > 0$ · $\dfrac{\partial X_d}{\partial P_z} < 0$.

3. Εξειδίκευση της μαθηματικής συναρτησιακής μορφής του υποδείγματος (mathematical formulation)

π.χ.: · $C = \beta_0 + \beta_1 Y$ γραμμική συναρτησιακή σχέση

όπου: οριακή ροπή κατανάλωσης $= dC/dY = \beta_1$ σταθερά.

· $C = \beta_0 + \beta_1 Y^2$ μη γραμμική συναρτησιακή σχέση

όπου: οριακή ροπή κατανάλωσης $= dC/dY = 2\beta_1 Y = f$ (επίπεδο διαθέσιμου εισοδήματος)

4. Εξειδίκευση του διαταρακτικού όρου στη στοχαστική συναρτησιακή σχέση.

ΜΟΡΦΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ.

1. Γραμμικά στατικά υποδείγματα.

i) Συστήματα εξισώσεων:

Ο ερευνητής ενδιαφέρεται για περισσότερες από μία εξαρτημένες μεταβλητές. Έτσι έχουμε συστήματα αλληλεξαρτημένων εξισώσεων (simultaneous equation models.)

π.χ.
$C = \beta_0 + \beta_1 Y + \varepsilon$: στοχαστική εξίσωση
$Y = C + I$: ταυτότητα

C: καταναλωτικές δαπάνες } ενδογενείς μεταβλητές
Y: εισόδημα
I: δαπάνες επενδύσεις → εξωγενής
ε: τυχαίοι παράγοντες.

$$C = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1} I + \frac{1}{1-\beta_1}\varepsilon$$

$$(\circledast)\quad Y = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I + \frac{1}{1-\beta_1}\varepsilon$$

→ σύστημα ανηγμένης μορφής (reduced-form system).

$\frac{\beta_0}{1-\beta_1}$, $\frac{\beta_1}{1-\beta_1}$, $\frac{1}{1-\beta_1}$: συντελεστές ανηγμένης μορφής (reduced-form coefficients)

όπου β_0, β_1: διαρθρωτικοί συντελεστές.

Το (Σ) ανηγμένης μορφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μετά την εκτίμησή του, για την ανάλυση της οικονομικής πολιτικής. π.χ. Έστω ότι οι δαπάνες επένδυσης αυξάνουν επειδή οι φορείς πολιτικής ελάττωσαν το επιτόκιο δανεισμού. Έτσι από την $\circledast$ θα έχουμε,

$$\Delta Y = \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right)\Delta I = \left(\frac{1}{1-\text{ορ.ρ.κατάν.}}\right)\Delta I$$ όπου $\frac{1}{1-\beta_1}$: εισοδηματικός πολλαπλασιαστής

από όπου φαίνεται πως μία αύξηση των δαπανών επενδύσεων θα οδηγήσει σε μία αύξηση του εισοδήματος (Y). Επειδή όμως οι καταναλωτικές δαπάνες είναι συνάρτηση του εισοδήματος, η αύξηση του εισοδήματος θα αυξήσει επίσης τις καταναλωτικές δαπάνες.

$$\Delta C = \left(\frac{\beta_1}{1-\beta_1}\right)\Delta I.$$

ii) Υπόδειγμα μιας εξίσωσης:

Ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει μία μόνο εξίσωση, που είναι μέρος ενός συστήματος εξισώσεων. Εδώ ο ερευνητής αποσκοπεί να περιγράψει τη συμπεριφορά μιας οικονομικής μονάδας, ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά άλλων οικονομικών μονάδων. Ακόμη και σ'αυτή την περίπτωση, μια πλήρης οικονομετρική μελέτη απαιτεί την εξειδίκευση όλων των εξισώσεων στο υπόδειγμα και όχι μόνο την εξειδίκευση της εξίσωσης που ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει.

2. Γραμμικά δυναμικά υποδείγματα.

Στα δυναμικά οικονομετρικά υποδείγματα, οι μεταβλητές σε διαφορετικές χρονικές περιόδους συσχετίζονται μεταξύ τους. π.χ: οι καταναλωτικές δαπάνες για τη χρονική περίοδο t συσχετίζονται με τις κατ. δαπάνες της προηγούμενης περιόδου t-1. Δηλ. στα οικονομετρικά δυναμικά υποδείγματα, μερικές από τις μεταβλητές εμφανίζονται με χρονικές υστερήσεις.

Τόσο τα απλά οικονομετρικά υποδείγματα (δηλ. υποδείγματα με μία μόνο εξίσωση) όσο και τα οικονομετρικά υποδείγματα, που αποτελούνται από μία ομάδα αλληλο-εξαρτώμενων εξισώσεων, μπορεί να είναι μη γραμμικά σε σχέση με τις μεταβλητές του υποδείγματος. Και σ'αυτή την περίπτωση, η διαδικασία εξειδίκευσης του υποδείγματος είναι παρόμοια με εκείνη για τα γραμμικά υποδείγματα.

Συνάρτηση κατανάλωσης του Keynes:

Υπάρχει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στις δαπάνες κατανάλωσης και στο διαθέσιμο εισόδημα. Δηλαδή: $C = F(Y)$.

- Η οριακή ροπή κατανάλωσης >0 και <1, δηλ: $0<(M.P.C.)<1$

$$0 < M.P.C. = \frac{dC}{dY} < 1.$$

- Η μέση ροπή κατανάλωσης (average propensity to consume) A.P.C. δηλαδή ο λόγος των δαπανών κατανάλωσης προς το εισόδημα, C/Y, ελαττώνεται όταν το εισόδημα αυξάνει. Δηλ.

$$\frac{d(A.P.C.)}{dY} = \cdots = \frac{MPC-APC}{Y} < 0$$

$$\Rightarrow MPC < APC$$

→ Εαν έχουμε την γραμμική σχέση: $C=\beta_0+\beta_1 Y$ τότε αυτή θα ικανοποιεί το νόμο του Keynes: εάν:

i) $0<\beta_1<1$

ii) $\beta_0>0$

deterministic relation

→ $C=F(Y,\varepsilon)=\underbrace{\beta_0+\beta_1 Y}_{\text{συστηματικό μέρος}}+\underbrace{\varepsilon}_{\text{μη συστηματικό μέρος ή διαταρακτικός όρος}}$ (συστημ. μέρος της οικ. θεωρίας ⟺ πραγματικά δεδομένα), όπου ε: μια τυχαία μεταβλητή.

→: στοχαστική ή στατιστική σχέση

Η εξαρτησιακή σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δύο μεταβλητές είναι ~~στοχαστική όταν δεν είναι ακριβής. Δηλαδή η τιμή που παίρνει η εξαρτημένη~~ μεταβλητή C, δεν είναι "μοναδική" για κάθε προκαθορισμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής Y.

(Disturbance term):

- Συνήθως πολλοί παράγοντες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν την εξαρτημένη μεταβλητή Y δεν περιλαμβάνονται στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.
- Η ανθρώπινη συμπεριφορά (Human Response) δεν δύναται να προβλεφθεί με ακρίβεια.
- Μερικές ή όλες οι μεταβλητές στο υπόδειγμα παλινδρόμησης μπορεί να μη μετρούν ακριβώς.
- Η πραγματική στοχαστική σχέση δεν είναι γραμμική. Η παρουσία του διαταρακτικού όρου στην παλινδρόμηση αποσκοπεί στο να απορροφήσει την επίδραση της μη γραμμικότητας.

Το ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ - LINEAR REGRESSION MODEL

$$\boxed{Y = F(X, \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon}$$

• ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ (population regression function)

υποθέτουμε ότι $\varepsilon \sim N(0,1)$

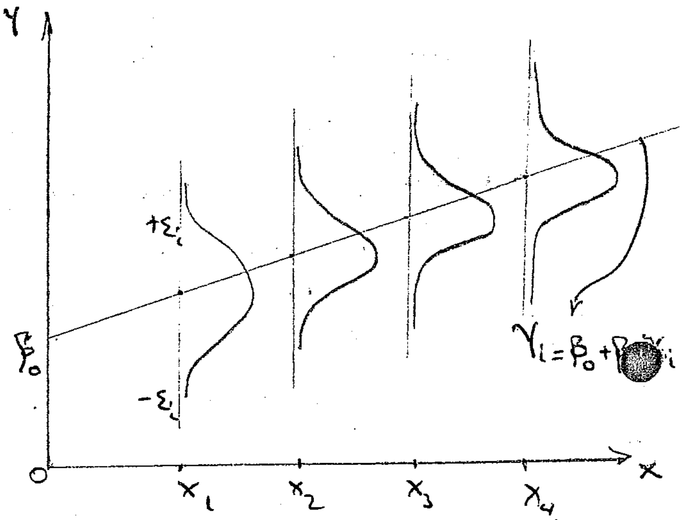
$$E(Y/X_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + E(\varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$: συνάρτηση παλινδρόμησης πληθυσμού

β_0, β_1: συντελεστές παλινδρόμησης (population regression coefficients.)

Intercept, slope.

$$\varepsilon_i = Y_i - E(Y/X_i)$$

Δεδομένης της κατανομής της στοχαστικής μεταβλητής ε_i, η συνάρτηση παλινδρόμησης του πληθυσμού δίνει την μεταβολή της μέσης τιμής της Y για κάθε δεδομένη τιμή της μεταβλητής X και η γραμμή παλινδρόμησης είναι ο "Locus" των αναμενομένων τιμών της Y για κάθε δεδομένη τιμή της X.



• ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ (sample regression function)

έστω $\hat\beta_0$ και $\hat\beta_1$ οι εκτιμήσεις των β_0 και β_1 του πληθυσμού.

Επομένως $\hat Y_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 X_i$: sample regression line.

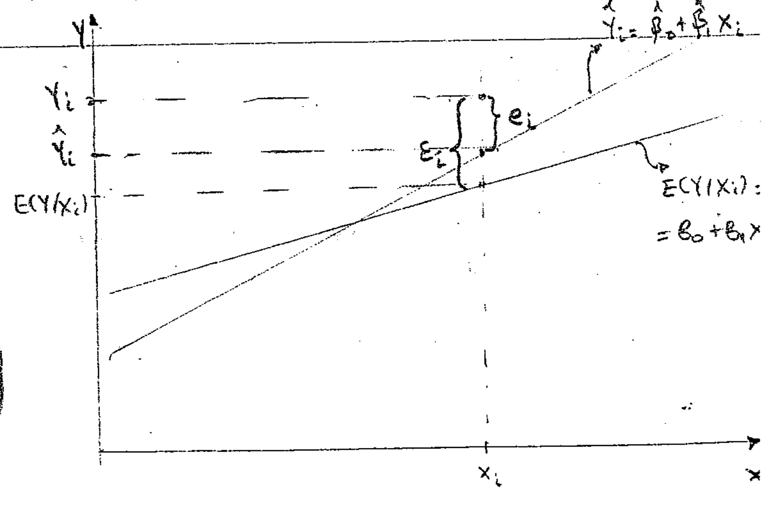
$\hat Y_i$: υπολογιζόμενη τιμή της $Y_i = E(Y/X_i)$

$\hat\beta_0, \hat\beta_1$: εκτιμητές των β_0, β_1 αντίστοιχα.

→ $Y_i = \hat Y_i + e_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 X_i + e_i$

με $\hat Y_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 X_i$: εκτιμητής της $E(Y_i/X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$

και $e_i = Y_i - \hat Y_i = Y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 X_i$ = κατάλοιπα (residuals)



• Συνάρτηση παλινδρομ. πληθυσμού

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, N$

$E(Y/X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ = μέσος υπό περιορισμό

• Συνάρτηση παλινδρομ. δείγματος

$\hat Y_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 X_i , \quad i = 1, \dots, n$

$Y_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 X_i + e_i$

$e_i = Y_i - \hat Y_i$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

$Y_i = F(X, \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots N$: στοχαστική σχέση

(απλό υπόδειγμα παλινδρόμησης του πληθυσμού)

1. Η μαθηματική μορφή που συνδέει την εξαρτημένη μεταβλητή με την ανεξάρτητη και στοχαστική μεταβλητή είναι γραμμική. Δηλαδή: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
   Η γραμμικότητα αναφέρεται στους συντελεστές παλινδρόμησης και όχι στις μεταβλητές του υποδείγματος.

$E(\varepsilon_i) = E[E(\varepsilon_i / X)] = E(0) = 0$

2. $E(\varepsilon_i / X_i) = 0$ $i = 1, \ldots, N$ όπου $\varepsilon_i > 0$ ή $\varepsilon_i = 0$ ή $\varepsilon_i < 0$.
3. $Var(\varepsilon_i / X_i) = \sigma^2 =$ σταθερή $\rightarrow$ ομοσκεδαστικότητα (homoskedasticity)

   σε άλλη περίπτωση $\rightarrow$ ετεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity)

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]\, E[\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)] = 0$: no autocorrelation

$$E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Covariance $= 0$

ή $\frac{1}{n} \sum x_i (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$

$E(X \cdot \varepsilon_i) = E[X(Y - \beta_0 - \beta_1 X)] = 0$

5. $Covar(\varepsilon_i, X_i) = 0$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή X δεν είναι στοχαστική και πως οι τιμές παραμένουν σταθερές σε μία υποθετική διαδικασία επανάλαμβανόμενης διαδικασίας. Με άλλα λόγια αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε ένα μεγάλο αριθμό δειγμάτων για τις Y και X μεγέθους $n_i = n$ οι τιμές της X δεν μεταβάλλονται από δείγμα σε δείγμα αλλά παραμένουν σταθερές

$$E(X\varepsilon) = E[E(X\varepsilon / X)] = E[X\, E(\varepsilon / X)] = E(X \cdot 0) = 0$$

6. ~~Η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι στοχαστική μεταβλητή, οι τιμές παραμένουν σταθερές αλλά δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους.~~

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ Y ΚΑΙ Η ΓΡΑΜΜΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ.

- $E(Y_i / X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$
- $Var(Y_i / X_i) = Var(\varepsilon_i / X_i) = \sigma^2$

$\Big\} \rightarrow Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (παλινδρόμηση του πληθυσμού)

$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$ (παλινδρόμηση του δείγματος)

Αντικειμενικός σκοπός $\longrightarrow$ η εκτίμηση των συντελεστών της παλινδρόμησης του πληθυσμ.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ: (Ordinary Least Squares) (OLS)

→ ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων: $\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

$$\min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

Έστω $P(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$

αρκεί: $\dfrac{\partial P(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \hat{\beta}_0} = \dfrac{\partial P(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow \dots$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

οπότε:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

και

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

ή $\boxed{\hat{\beta}_1 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}}$

ή $\boxed{\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

και $\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}}$

ιδιότητες των εκτιμητών:

- Είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των συντελεστών του πληθυσμού: (unbiased)

  $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ και $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

- Έχουν την μικρότερη δυνατή διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών. (efficient)
- Είναι γραμμικές συναρτήσεις των παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής.
- Είναι συνεπείς (consistent): $P\left(|\hat{\beta}_i - \beta_i| < \varepsilon\right) \underset{n \to N}{=} 1 \quad i = 0, 1$

proof: ① $\boxed{Y = \beta_1 X}$

χωρίς σταθερά: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} = \dfrac{\sum X_i (\beta X_i + \varepsilon_i)}{\sum X_i^2} = \beta \dfrac{\sum X_i^2}{\sum X_i^2} + \dfrac{\sum X_i \varepsilon_i}{\sum X_i^2} = \beta + \dfrac{\sum X_i \varepsilon_i}{\sum X_i^2}$

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\beta + \frac{\sum X_i \varepsilon_i}{\sum X_i^2}\right) = \beta + \frac{\sum X_i \cancel{E(\varepsilon_i)}^{\,0}}{\sum X_i^2} = \beta + 0 = \beta$$

Mean Square Error (MSE)

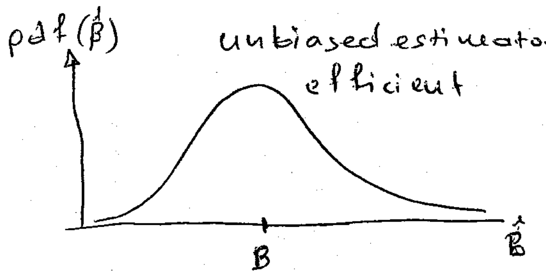
Ο κανόνας ελαχιστοποίησης του MSE εφαρμόζεται όταν συγκρίνουμε εκτιμητές που δεν είναι αμερόληπτοι αλλά η διασπορά τους είναι μικρότερη από εκείνη των αμερόληπτων εκτιμητών.

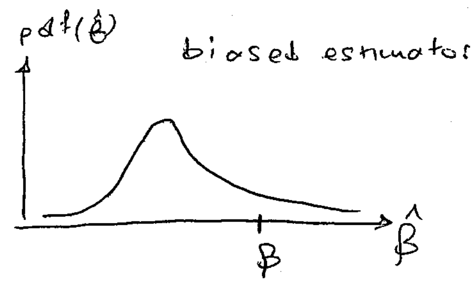
Σύμφωνα με το κριτήριο του MSE λαμβάνεται υπόψη ισοδύναμα η επιπρόσθετη διακύμανση και η τετραγωνισμένη μεροληψία, ήτοι:

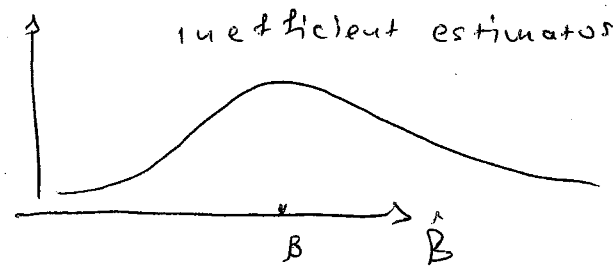
$$MSE(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}-\beta)^2 \overset{*}{=} Var(\hat{\beta}) + \{bias(\hat{\beta})\}^2$$

$$\begin{aligned}
\triangleright\ MSE(\hat{\beta}) &= E(\hat{\beta}-\beta)^2 \\
&= E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) + E(\hat{\beta}) - \beta)^2 \\
&= E[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})]^2 + [E(\hat{\beta})-\beta]^2 + 2\underbrace{E\{[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})][E(\hat{\beta})-\beta]\}} \\
&= Var(\hat{\beta}) + [bias(\hat{\beta})]^2 + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\{[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})][E(\hat{\beta})-\beta]\} &= E\{\hat{\beta}E(\hat{\beta}) - \hat{\beta}\beta - [E(\hat{\beta})]^2 + \beta E(\hat{\beta})\} \\
&= \cancel{[E(\hat{\beta})]^2} - \cancel{[E(\hat{\beta})]^2} - \cancel{\beta E(\hat{\beta})} + \cancel{\beta E(\hat{\beta})} \\
&= 0
\end{aligned}$$







Η γραμμή παλινδρόμησης του δείγματος που εκτιμάμε με την OLS ικανοποιεί τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

- Η γραμμή παλινδρόμησης του δείγματος περνάει από το σημείο που ορίζεται από το μέσο των μεταβλητών Y και X. $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$.
- $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i$
- $\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i = 0 \longrightarrow \bar{e} = 0$
- $\sum_{i=1}^{n} e_i X_i = 0 \longrightarrow e_i, X_i$: ασυσχέτιστα.
- $\sum_{i=1}^{n} e_i \hat{Y}_i = 0 \longrightarrow e_i, Y_i$: ασυσχέτιστα.

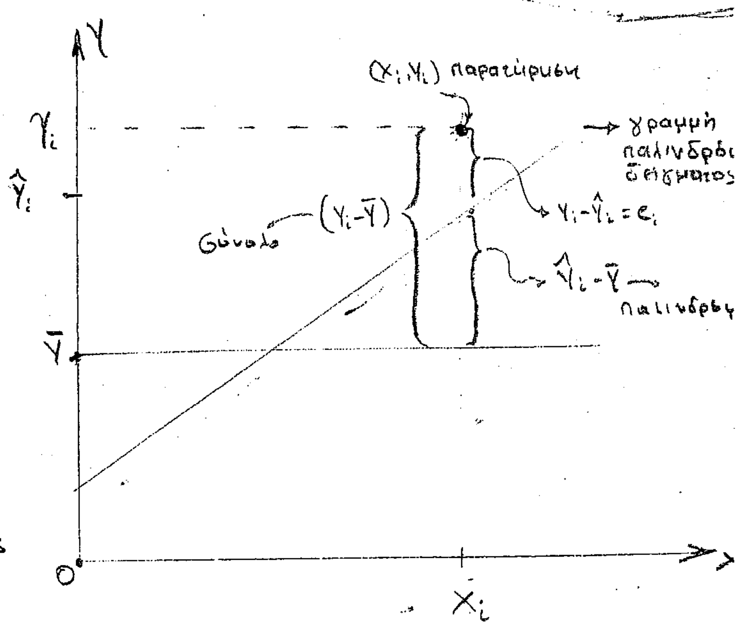
e_i →
- συντελεστής προσδιορισμού (coefficient of determinat
- συντελεστή συσχέτισης (correlation coefficient)
- variance of ε_i

Ισχύει ότι:

$$TSS = RSS + ESS$$

$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i + \sum e_i^2$$



▶ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ (r^2)

Μετράει το ποσοστό της μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Y που ερμηνεύεται από την παλινδρόμηση του δείγματος.

Δηλαδή ο r^2 δείχνει πόσο καλά η γραμμή παλινδρόμησης ~~του δείγματος ικανοποιεί τα στατιστικά στοιχεία.~~ και ορίζεται ως εξής:

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

- $0 < r^2 < 1$

▶ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ (correlation coefficient.) (r) γραμμικότητας

Μετράει τον βαθμό (degree) της γραμμικής συσχέτισης ανάμεσα στις μεταβλητές X και Y και ορίζεται σαν η τετραγωνική ρίζα του συντελεστή προσδιορισμού. Δηλ. $r = \pm\sqrt{r^2}$. Έχει όμως διαφορετική ερμηνεία από τον συντελεστή προσδιορισμού, καθώς και ιδιότητες.

- $0 < r^2 < 1$ ενώ • $-1 < r < 1$.
- r=1 : πλήρως θετική συσχέτιση ανάμεσα στην Y και X

  r=-1 : " αρνητική " " " "

  r=0 : οι μεταβλητές X και Y δεν συσχετίζονται.
- ο συντελεστής συσχέτισης είναι συμμετρικός: $r_{XY} = r_{YX}$, δεν εξαρτάται από τον γραμμικό μετασχηματισμό των μεταβλητών του υποδείγματος, και έχει μόνο εφαρμογή όταν η σχέση ανάμεσα στην Y και X είναι γραμμική.
- ο r του δείγματος είναι ένας εκτιμητής του συντελεστή συσχέτισης του πληθυσμού ρ.

▶ ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟΥ ΟΡΟΥ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} =$$

↳ αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου σ^2.

- $\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \hat{\sigma}$: τυπικό σφάλμα (standard error) εκτίμησης της Y.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

(maximum likelihood method)

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του διαταρακτικού όρου είναι:

$F(\varepsilon_i)$: $\qquad\qquad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Η σ.π.π. του ε_i θα είναι: $f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma^2}}$

τα ε_i είναι ανεξάρτητα:

$L = f(\varepsilon_1) \cdot f(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_n)$: συνάρτηση μέγιστης πιθανοφ.

$L = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum \varepsilon_i^2}$

Να μεγιστοποιηθεί ως προς τα σ, β_0, β_1.

$L^* = \ln L$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \beta_0} = \frac{\partial L^*}{\partial \beta_1} = \frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = 0.$$

$$L^* = \ln \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum \varepsilon_i^2} = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

i) $\frac{\partial L^*}{\partial \beta_0} = 0 \Leftrightarrow \ldots \hat{\beta}_0 = \ldots$

ii) $\frac{\partial L^*}{\partial \beta_1} = 0 \Leftrightarrow \ldots \hat{\beta}_1 = \ldots$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ → συμπίπτουν με αυτούς της OLS

~~iii) $\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = 0 \Leftrightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n}$ → μεροληπτικός εκτιμητής~~

ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

— Forecasts — → για την μέση τιμή της εξαρτημ. μεταβλ.

→ για ατομικές τιμές της εξαρτημ. μεταβλ.

• Μέση πρόβλεψη

i) σημειακή πρόβλεψη (point forecast)

$$E(\hat{Y} / X=X_0) = E(\hat{\beta}_0) + \hat{\beta}_1 \cdot E(X_0) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0$$

ii) διάστημα εμπιστοσύνης (confident interval)

→ χρειαζόμαστε τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης:

$$\left.\begin{aligned} E(\hat{Y}/X_0) - E(Y/X_0) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0 - \beta_0 - \beta_1 X_0 \\ &= (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1) X_0 \end{aligned}\right\} \text{σφάλμα πρόβλεψης}$$

$$Var(\hat{Y}) = \sigma_{\hat{Y}}^2 = \hat{\sigma}^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1} (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

δ.ε.: $\hat{Y} - \hat{\sigma}_{\hat{Y}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \leq E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i \leq \hat{Y} + \hat{\sigma}_{\hat{Y}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$

• Ατομική πρόβλεψη:

i), ii) → χρειαζόμαστε το σφάλμα πρόβλεψης:

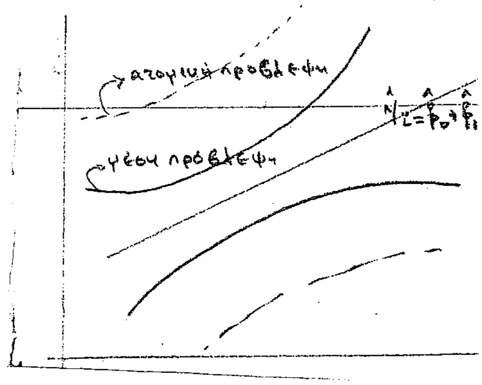
$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_0 - Y_0 &= (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0) - (\beta_0 + \beta_1 X_0 + \varepsilon_0) \\ &= (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1) X_0 + \varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \text{σφάλμα πρόβλεψης}$$

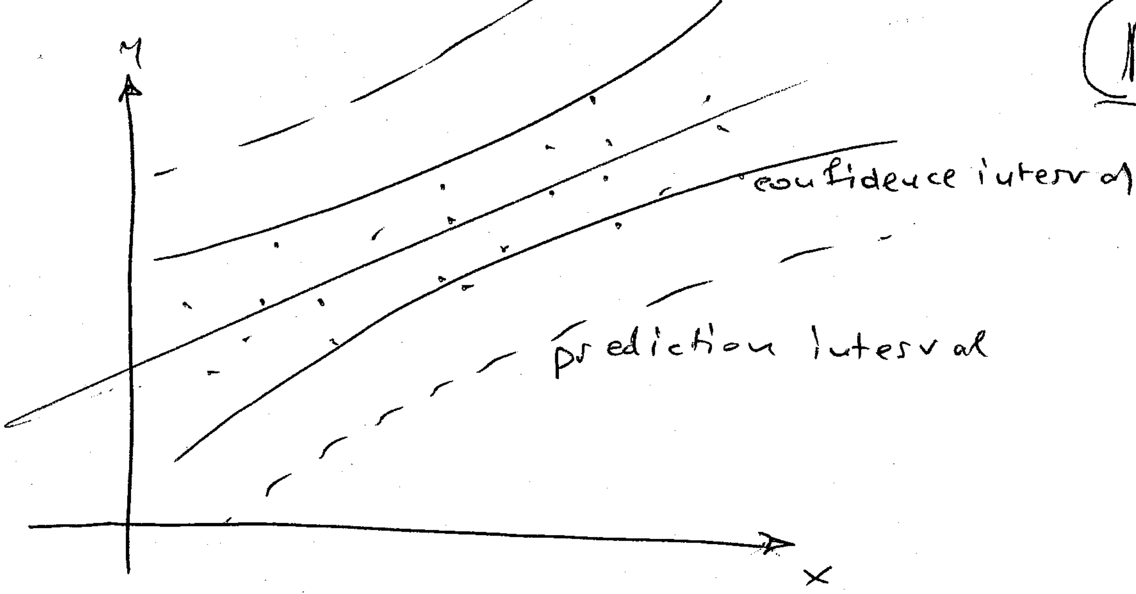
→ στο 2: ∃ και το ε_0 που μπορεί για την ατομική πρόβλ. να 'ναι $\neq 0$.

$$Var(\hat{Y}) = \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2 = \sigma^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1} (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

δ.ε.: $\hat{Y}_0 - \hat{\sigma}_{\hat{Y}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + \hat{\sigma}_{\hat{Y}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$

→ $Var(\hat{Y})\big|_{\text{ατομική πρόβλεψη}} > Var(\hat{Y})\big|_{\text{μέση πρόβλ}} \Rightarrow \text{δ.ε.}_{\text{ατομ. προβ}} > \text{δ.ε.}_{\text{μ. πρόβλεψη}}$





confidence interval 95%

Με πιθανότητα 95% περιέχει το καλύτερο γραμμικό υπόδειγμα.
ή το πραγματικό γρ. υπόδειγμα.

prediction interval 95%

Είναι το διάστημα που περιέχει το 95% όλων των δεδομένων

— ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ —

- t-κατανομή: για τον έλεγχο των ατομικών συντελεστών του υποδείγματος
- F-κατανομή: για τον έλεγχο του συνόλου του υποδείγματος

Ισχύουν:

- $Var(e) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} \longrightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}$
- $Var(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)}$
- $Var(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$

και

- $\hat{t}_{\hat{\beta}_0} = \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$ ← $H_0: \hat{\beta}_0 = \beta_0$ συνήθως ελέγχουμε κατά πόσο το $\hat{\beta}_0 = 0$
- $\hat{t}_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$
- $F = \dfrac{SSR/k-1}{SSE/n-k}$ όπου k: # μεταβλητών (συμπεριλαμβανομένου και του Y)

με $\beta_i \sim N(\hat{\beta}_i, \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_i})$

i) των συντελεστών

ΣΗΜΕΙΑΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ:

t-στατιστική → two-tailed test
→ one-tailed test {αριστερός / δεξιός}

$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ:

Υπόθεση: Υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή ανάμεσα στη Y και στην X_i. Αν δεν υπάρχει σημαντική σχέση ανάμεσα στην Y και X_i, τότε η γραμμή παλινδρόμησης είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή $\hat{\beta}_i = 0$. Αντίστροφα αν οι Y και X_i συσχετίζονται σημαντικά, τότε $\hat{\beta}_i \neq 0$

$H_0: \beta_i = 0$
$H_1: \beta_i \neq 0$

- $t = \dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} = \dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} > t_{\underbrace{(1-\frac{\alpha}{2})}_{\alpha/2}, n-k} \Rightarrow H_0$: απορρίπτεται
- $t = \dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k} \Rightarrow H_0$: δεκτή

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

εαν επαναλάβουμε την διαδικασία της παλινδρόμησης πολλές φορές, τότε η πραγματική τιμή του πληθυσμού "β" θα βρίσκεται μέσα (ανήκει) στο 95% ΔΕ με πιθανότητα 95%.

$$\hat{\beta}_i - \sigma_{\hat{\beta}_i} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, N-K} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + \sigma_{\hat{\beta}_i} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, N-K}$$ με πιθανότητα $1-\alpha$.

ii) ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

ΠΗΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ	SS	DF	MS
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ	SSR	$k-1$	$SSR/_{k-1}$
ΚΑΤΑΛΟΙΠΑ	SSE	$n-k$	$SSE/_{n-k}$
TOTAL	SST	$n-1$	$SST/_{n-1}$

$$F = \frac{SSR/_{k-1}}{SSE/_{n-k}} = \frac{\frac{SSR}{SST} \cdot \frac{1}{k-1}}{\frac{SSE}{SST} \cdot \frac{1}{n-k}} = \frac{r^2/_{k-1}}{(1-r^2)/_{n-k}} = \frac{r^2/_{k-1}}{(1-r^2)/_{n-k}}$$

$F < F_{1-\alpha, k-1, n-k} \Rightarrow H_0$ δεκτή

$F > F_{1-\alpha, k-1, n-k} \Rightarrow H_0$ απορρίπτεται

$H_0: \beta_0 = \beta_1 = 0$

$H_1:$ τουλ. ένα $\beta_i \neq 0$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΙΑΡΘΡΩΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Έστω ότι έχουμε στατιστικά στοιχεία για καταναλωτικές δαπάνες για μια χρονική περίοδο η οποία αναφέρεται σε δύο υποπεριόδους: περίοδο ειρήνης και περίοδο πολέμου. Το ενδιαφέρον του ερευνητή είναι να διαπιστώσει κατά πόσο η καταναλωτική συμπεριφορά των καταναλωτών διαφέρει ανάμεσα στις δύο υποπεριόδους. ~~καταναλωτικές δαπάνες και το διαθέσιμο~~

Οι συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις καταναλωτικές δαπάνες και το διαθέσιμο εισόδημα για τις δύο υποπεριόδους έχουν ως εξής:

Περίοδος πολέμου: $Y_1=\beta_0+\beta_1 X_1+\varepsilon_1$

Περίοδος ειρήνης: $Y_2=\gamma_0+\gamma_1 X_2+\varepsilon_2$

όπου $Y=Y_1+Y_2$: συνολικές καταναλωτικές δαπάνες

$X=X_1+X_2$: συνολικό διαθέσιμο εισόδημα

Ο έλεγχος υποθέσεων που αφορούν διαρθρωτικές μεταβολές των συντελεστών του υποδείγματος μεταξύ των δύο χρονικών περιόδων μπορεί να επιτευχθεί

με
τη χρήση των ψευδομεταβλητών
(Dummy Variables)

Dummy Variables

Το πρόβλημα της εισαγωγής ποιοτικών παραγόντων σ'ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης λύνεται με την τεχνική των ψευδομεταβλητών ή δυαδικών (binary) μεταβλητών.

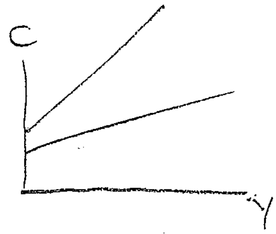
Στο πρόβλημα της συνάρτησης κατανάλωσης για ένα χρονικό διάστημα που χαρακτηρίζεται από περιόδους πολέμου και ειρήνης, δεν χρειάζεται να εκτιμήσουμε (3 συναρτήσεις Οι ψευδομεταβλητές είναι τεχνικές μεταβλητές που παίρνουν συνήθως τις τιμές 0 και 1.

Συνάρτηση κατανάλωσης του Keynes: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$:(1)

Ορίζουμε ότι η μεταβλητή Y (=διαθέσιμο εισόδημα) παίρνει την τιμή 0 στην περίοδο πολέμου και την τιμή 1 στην περίοδο ειρήνης.

$$D = Y_t = \begin{cases} 0 \longrightarrow \text{περίοδος πολέμου} \\ 1 \longrightarrow \text{ειρήνης} \end{cases}$$

i) μεταβολή του σταθερού όρου $\hat{\beta}_0$ και της κλίσης $\hat{\beta}_1$ της :(1)

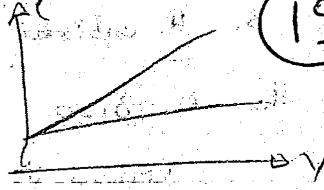


Η (1): γράφεται: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \gamma D_t + \delta D_t Y_t + \varepsilon_t$

όπου για $D=0$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$

$D=1$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \gamma + \delta Y_t + \varepsilon_t = (\beta_0 + \gamma) + (\beta_1 + \delta) Y_t + \varepsilon_t = \beta_0^* + \beta_1^* Y_t + \varepsilon_t$

ii) μεταβολή μόνο της κλίσης της συνάρτησης κατανάλωσης.



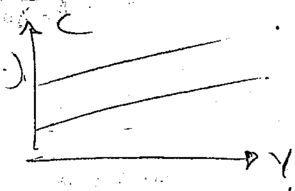
$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \delta D_t Y_t + \varepsilon_t .$$

όπου για: $D=0$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$

$D=1$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \delta Y_t + \varepsilon_t = \beta_0 + (\beta_1 + \delta) Y_t + \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1^* Y_t + \varepsilon_t$

διαφέρει η οριακή ροπή κατανάλωσης στις δύο υποπεριόδους.

iii) μεταβολή μόνο της τομής της συνάρτησης κατανάλωσης.



$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \gamma D + \varepsilon_t$$ (διαφέρει η τομή κατανα....)

όπου για $D=0$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$

$D=1$: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \gamma + \varepsilon_t = \underline{(\beta_0 + \gamma) + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t} = \beta_0^* + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$

Πολυμεταβλητό Υπόδειγμα

- multiple regression model -

$$Y = F(X_1, X_2, \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

↳ εξαρτημένη ⟶ ανεξάρτητες

Υποθέσεις:

1. γραμμικότητα
2. $E(\varepsilon_i / X_1, X_2) = 0$
3. $Var(\varepsilon_i / X_1, X_2) = \sigma^2$: σταθ → ομοσκεδαστικότητα
4. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$: no autocorrelation
5. $Cov(\varepsilon_i, X_1) = 0$ και $Cov(\varepsilon_i, X_2) = 0$
6. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές δεν είναι στοχαστικές μεταβλητές. Οι τιμές παραμένουν σταθερές αλλά δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους.
7. Δεν υπάρχει ακριβώς γραμμική σχέση ανάμεσα στις ανεξάρτητες μεταβλητές του υποδείγματος. Δηλαδή έχουμε απουσία πλήρους πολυσυγγραμμικότητας (perfect multicollinearity) σε ένα οικονομετρικό υπόδειγμα. Αυτό αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την εκτίμηση του υποδείγματος.
8. Οι βαθμοί ελευθερίας πρέπει να 'ναι θετικοί. Δηλ. ο αριθμός παρατηρήσεων του δείγματος πρέπει να 'ναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των συντελεστών του υποδείγματος που θέλουμε να εκτιμήσουμε ($n > k$). Έτσι εξασφαλίζεται τόσο η εκτίμηση όσο και ο έλεγχος του υποδείγματος με την t, F ή άλλη κατανομή.

- Η εξαρτημένη μεταβλητή στο υπόδειγμα κατανέμεται κανονικά με μέσο: $E(Y / X_1, X_2) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$: population regression.

και διακύμανση $Var(Y) = \sigma_Y^2 = E[Y_i - E(Y_i)]^2 = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2$

Στην παλινδρόμηση του πληθυσμού οι συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ είναι μερικοί συντελεστές παλινδρόμησης (partial regression coefficients) και δείχνουν την ξεχωριστή επίδραση των ανεξάρτητων μεταβλητών X_{1i} και X_{2i} στο μέσο της εξαρτημένης μεταβλητής Y_i : $E(Y_i / X_{1i}, X_{2i})$. Έτσι θα είναι:

Μόνο όταν $Cov(X_1, X_2) = 0$

$$\beta_1 = \frac{\partial E(X_1, X_2)}{\partial X_1} \quad \text{και} \quad \beta_2 = \frac{\partial E(X_1, X_2)}{\partial X_2}.$$

Με άλλα λόγια οι μερικοί συντελεστές παλινδρόμησης μετρούν την μεταβολή στη μέση τιμή της Y όταν η X_j ($j = 1, 2$) μεταβάλλεται κατά μία μονάδα και η άλλη μεταβλητή παραμένει σταθερή.

▸ Οι ανεξάρτητες μεταβλητές στο υπόδειγμα είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δηλαδή, $Cov(X_1, X_2) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση οι μερικοί συντελεστές παλινδρόμησης, δηλαδή β_1 και β_2 θα μπορούσαν να εκτιμηθούν με βάση τα παρακάτω δύο ξεχωριστά διμεταβλητά υποδείγματα:

$$Y = \gamma_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1$$

$$Y = \delta_0 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_2$$

▸ Οι ερμηνευτικές μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή $Cov(X_1, X_2) \neq 0$. Έτσι οι προηγούμενες σχέσεις: $\beta_1 = \frac{\partial E(X_1, X_2}{\partial X_1}$, $\beta_2 = ---$ δεν θα ισχύουν, παρά μόνο αν η γραμμική επίδραση της X_1 στην X_2 αφαιρεθεί.

$$Y = F(X_1, X_2, \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$ → OLS → MLM (22)

$$\rightarrow \min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)^2 \ldots$$

Λ

- $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)(-1) = 0$
- $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)(-X_1) = 0$
- $\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2)(-X_2) = 0$

κανονικές εξισώσεις

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_1 Y = \hat{\beta}_0 \cdot \sum X_1 + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_1^2 + \hat{\beta}_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2 \\ \sum_{i=1}^{n} X_2 Y = \hat{\beta}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_2 + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_2^2 \end{cases}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} YX_1 \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_2^2) - \sum_{i=1}^{n} YX_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2}{\sum_{i=1}^{n} X_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_2^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_1 X_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} YX_2 \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_1^2) - \sum YX_1 \cdot \sum X_1 X_2}{\sum X_1^2 \cdot \sum X_2^2 - (\sum X_1 X_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

► συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού
- multiple coefficient of determination or goodness of fit of the regression –

(... είναι το ποσοστό της μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Y, που ερμηνεύεται από την παλινδρόμηση.

$$R^2_{Y,X_1,X_2} = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{SST}$$

Ισχύει:
$$R^2_{Y,X_1,X_2}(adj) = \left(1 - \frac{SSR}{SST}\right) \frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - R^2_{Y,X_1,X_2}) \cdot \frac{n-1}{n-k}$$

- αν $R^2_{Y,X_1,X_2} = 1 \Rightarrow \bar{R}^2_{Y,X_1,X_2}(adj) = R^2_{Y,X_1,X_2}$
- αν $k > 1 \Rightarrow R^2_{adj} < R^2$
- $0 \leq R^2 \leq 1$ αλλά ο R^2_{adj} μπορεί να είναι και αρνητικός. (όταν οι τιμές του R^2 είναι χαμηλές ή όταν το k αυξάνει έναντι n (σταθερό))

$$SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_1 (X_1 - \bar{X}_1) + \hat{\beta}_2 (X_2 - \bar{X}_2)\right)^2$$

$$= \underbrace{\hat{\beta}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_1 - \bar{X}_1)^2}_{\text{συμβολή της μεταβλητής } X_1} + \underbrace{\hat{\beta}_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_2 - \bar{X}_2)^2}_{\cdots X_2} + \underbrace{2\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)}_{\text{συνδυασμένη συμβολή των } X_1 \text{ και } X_2}$$

Άρα: i) όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ορθογώνιες, δηλαδή δεν συσχετίζονται, τότε ο συντελεστής προσδιορισμού ισούται με το άθροισμα των συντελεστών απλού προσδιορισμού: $R^2_{Y X_1 X_2} = r^2_{YX_1} + r^2_{YX_2}$

ii) όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές συσχετίζονται, η τιμή του συντελεστή πολλαπλού προσδιορισμού δεν μπορεί ποτέ να μειώνεται όταν προσθέτουμε ερμηνευτικές μεταβλητές στο υπόδειγμα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

έλεγχο υποθέσεων για:

- → ατομικούς συντελεστές
- → το σύνολο του υποδείγματος
- → γρ. συνδυασμούς ανάμεσα στους συντελεστές
- → διαρθρωτικές μεταβολές των συντελεστών μιας οικονομικής σχέσης

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ.

→ με τις t-στατιστικές.
→ ($\varepsilon_i \sim N$ και ε_i's ανεξάρτητα) $\Rightarrow \hat{\beta}_i \sim N$

$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \hat{\sigma}^2_{\beta_0})$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \hat{\sigma}^2_{\beta_1})$$

$$\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \hat{\sigma}^2_{\beta_2})$$

όπου:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2 \cdot (1-r^2_{X_1X_2})}$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2 \cdot (1-r^2_{X_1X_2})}$$

$$Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{-r_{X_1X_2} \cdot \hat{\sigma}^2_\varepsilon}{(1-r^2_{X_1X_2}) \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}$$

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-3}$$

$$t_{\hat{\beta}_i} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \longrightarrow t_{(1-\frac{\alpha}{2}),\, n-3}$$

$\beta_i \to 0$.

α / $1-\alpha$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ.

$$F = \frac{SSR/_{k-1}}{SSE/_{n-k}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}-\bar{Y})^2/_{k-1}}{\sum_{i=1}^{n}(Y-\hat{Y})^2/_{n-k}} = \frac{R^2_{Y.X_1.X_2....X_k}/_{k-1}}{(1-R^2_{Y.X_1.X_2....X_k})/_{n-k}}$$

H_0: όλα $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

H_1: όχι $\beta_i \neq 0$ για κάποια i

αν $F < F_{\alpha, k-1, n-k} \Rightarrow H_0$ δεκτή

αν $F > F_{\alpha, k-1, n-k} \Rightarrow H_0$ απορρίπτεται.

→ Η διαφορά μεταξύ των: $H_0: \beta_i = 0$ $(i=1,2,\dots,k)$ και $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$.

Στην 1η ο έλεγχος αφορά την επίδραση μιας μεταβλητής στη διαμόρφωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής.

Στην 2η ο έλεγχος αφορά την συνδυασμένη (joint) ή από κοινού επίδραση όλων των ερμηνευτικών μεταβλητών στη διαμόρφωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής.

→ Μπορεί με την t να δεχτώ την $H_0: \beta_i = 0$ και ταυτόχρονα με την F να απορρ. η $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k$.
Αυτό συμβαίνει όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές συσχετίζονται μεταξύ τους σε μεγάλο βαθμό, με αποτέλεσμα τα τυπικά σφάλματα των συντελεστών να'ναι μεγάλα ⇒ t-στατιστικές μικρές.

→ Σπάνια: Να γίνεται δεκτή η H_0 με την F ότι $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$ και να απορρίπτεται η H_0 με την t ότι $\beta_i = 0$ για κάθε i ξεχωριστά ⇒ 1η ένδειξη ύπαρξης πολυσυγγραμμικότητας

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ. (25)

Συνάρτηση παραγωγής: Cobb-Douglas, όπου το άθροισμα των εκθετών (συντελεστών) καθορίζει την φύση της τεχνολογίας:

$$Y=\beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot e^{\varepsilon}$$

- $\beta_1+\beta_2=1$: σταθερές αναλογίες κλίμακας
- $\beta_1+\beta_2>1$: αύξουσες — " — — " —
- $\beta_1+\beta_2<1$: ~~φθίνουσες~~ φθίνουσες — " — — " —

► t - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ :

H_0: ισότητα συντελεστών

$$Y=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\varepsilon$$

$H_0: \beta_1=\beta_2 \quad (\beta_1-\beta_2=0)$

$H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \quad (\beta_1-\beta_2 \neq 0)$

$(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2) \sim N$ με $n-3$ β.ε.

$$t=\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)-(\beta_1-\beta_2)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)}}=\frac{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2}}}=\frac{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)+Var(\hat{\beta}_2)-2\,Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}}$$

$t<t_{\alpha/2,\,n-3} \Rightarrow$ δεκτή H_0

$t>t_{\alpha/2,\,n-3} \Rightarrow$ απορρίπτεται η H_0.

$$(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)-\sigma^2_{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2}\, t_{\alpha/2,\,n-3} \le \beta_1-\beta_2 \le \hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2+\sigma \cdot t.$$

μεγάλη

ΟΡΙΑΚΗ ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

– Χρησιμοποιούμε την F στατιστική –

Έστω ότι έχουμε δύο οικονομετρικά υποδείγματα:

(R) Υπόδειγμα A: $Y = B_0 + B_1 X_1 + \varepsilon_1$

(U) B: $Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \varepsilon_2$

όπου Y: καταναλωτικές δαπάνες

X_1: διαθέσιμο εισόδημα

X_2: άλλα περιουσιακά στοιχεία

(Άραγε, είναι η συμβολή των περιουσιακών στοιχείων στις καταναλωτικές δαπάνες, σημαντική?)

στάδιο 1: Με την OLS εκτιμούμε τα παραπάνω δύο υποδείγματα και υπολογίζουμε και τα αθροίσματα των τετραγώνων των κατάλοίπων

(R): $SST = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$ με $n-1$ df

$\downarrow SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ με $K_R - 1$ df

$\uparrow SSE = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2$ με $n - K_R$ df

(U): $SST = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$ $(n-1)$ df

$\uparrow SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ $(K_U - 1)$ df

$\downarrow SSE = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2$ $(n - K_U)$ df

στάδιο 2: $SSR_U - SSR_R =$ συμβολή της X_2 στην Y.

Επειδή η ερμηνευτική (ερευνητική) ικανότητα του υποδείγματος χωρίς περιορισμό είναι μεγαλύτερη εκείνης του υποδείγματος με περιορισμό $(SSR_U > SSR_R)$

$SSE_R > SSE_U$

στάδιο 3: Υπολογίζουμε την F στατιστική:

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U) / [(n-k_R) - (n-k_U)]}{SSE_U / (n-k_U)}$$

Η οριακή συμβολή της μεταβλητής X_2 είναι στατιστικά σημαντική αν

$F_{stat} > F_{(\alpha, v_1, v_2)}$ όπου $v_1 = (n-k_R) - (n-k_U) = k_U - k_R$, $v_2 = n - k_U$

τότε και η μεταβλητή X_2 πρέπει να συμπεριληφθεί σαν ανεξάρτητη μεταβλητή στο υπο εκτίμηση υπόδειγμα.

ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ – MULTICOLLINEARITY

- μορφές πολυσυγγραμμικότητ
- συνέπειες
- τρόποι διαπίστωσης multic
- μέθοδοι υπολογισμού υποδειγμάτων με πολυσυγγ

ΜΟΡΦΕΣ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

Εμφανίζεται κυρίως σε χρονολογικές σειρές και μπορεί να είναι πλήρης ή μερική πολυσυγγραμμικότητα.

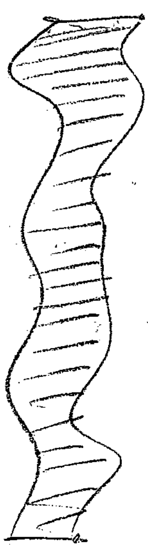
i) Πλήρης πολυσυγγραμμικότητα:

Η π.π. ανάμεσα σε δύο μεταβλητές δηλώνει ότι η μία από τις 2 μ. διαφέρει από την άλλη μ. μόνο είτε κατά ένα σταθερό παράγοντα (constant factor) είτε κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα (scale facto

ii) Μερική πολυ/τητα (near multicollinearity):

Στη πράξη οι ανεξάρτητες μεταβλητές συσχετίζονται, αλλά η συσχέτιση δεν είναι ακριβής. Έχουμε σχετική πολυσ/τητα και

⇒ μπορώ να εκτιμήσω με OLS τους συντελεστές του υποδείγματος.



A: • ανεξάρτητες μεταβλητές δεν συσχετίζονται
• δηλ. είναι ορθογώνιες
⇒ ⇒ απλή παλινδρόμηση για $\left\{ \begin{matrix} Y \text{ και } X_1 \\ Y \text{ και } X_2 \end{matrix} \right\}$ ⇒ εκτίμηση των $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$

B: Exact multicollinearity ⇒ δεν μπορώ να εκτιμήσω

Γ: Near – ⇒ ∃ γραμμικές σχέσεις ανάμεσα στις ανεξάρτητες μ. που τείνουν να είναι ακριβείς ⇒ Μπορώ να εκτιμήσω.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ.

▶ ΠΛΗΡΗΣ πολυ/τητα:

- Δεν μπορώ να εκτιμήσω τους συντελεστές
- Οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις $\to +\infty$. ⇒ συντελ. προσδιορισμού ανάμεσα στο ζεύγος των συσχετισμένων (ακριβώς) μ. $\to = 1$.

Για πολυμεταβλητό υπόδειγμα με τέλεια πολυσυγγραμμικότητα, κάποια ερμηνευτική μεταβλητή μπορεί να εκφρασθεί σαν γρ. συνδυασμός των υπολοίπων.

- Για $k=2$: (τέλεια συσχέτιση ανάμεσα στις ερμηνευτικές μ.) ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τέλειας πολυσυγγραμμικότητας
- Για $k>2$ (— " — σε 2 — " —) ικανή συνθήκη για την ύπαρξη τέλειας πολυσυγγραμμικότητας

γενικά:

- $r^2_{x_1,x_2}=0$: οι ανεξάρτητες μεταβλ. ασυσχέτιστες, δηλ. είναι ορθογώνιες ⇒ (ισχύει η κλ. υπόθεση)
  - οι διακυμάνσεις των συντελεστών παλινδρόμησης είναι οι μικρότερες δυνατές
  - Η συνδιακύμανση των συντελεστών παλινδρόμησης $=0$
- $r^2_{x_1,x_2}=1$: πλήρης συσχέτιση ⇒ $Var(\hat{\beta}_1)=Var(\hat{\beta}_2)=Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)\to\infty$.
- $-1<r^2_{x_1,x_2}<1$: μερική συσχέτιση ⇒ μπορώ να εκτιμήσω τα $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$
  - οι Var και Cov των συντελεστών του υποδείγμ. θα είναι μεγαλύτερες εκείνων που υπολογίζονται όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ορθογώνιες

▶ ΜΕΡΙΚΗ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ:

Όταν δεν υπάρχουν ακριβείς γραμμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών δεν υπάρχει πρόβλημα στην εκτίμηση των συντελεστών παλινδρόμησης. Εντούτοις, η εκτίμηση του υποδείγματος με την παρουσία πολυ/τητας θα επηρεάσει:

α.) τις Var-Cov των συντελεστών ↑

β.) τον συντελεστή προσδιορισμού (R^2) και F-statistic

γ.) τον βαθμό μεταβλητότητας των συντελεστών παλινδρόμησης

δ.) την εξειδίκευση του υποδείγματος

α.) Τις διακυμάνσεις – συνδιακυμάνσεις των συντελεστών.

- $r^2_{x_1x_2} \to 1 \Rightarrow$ Var–Cov ($\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$) ↑ ⇒ t-στατιστική ↓ (σε σχέση με την t-stat. όταν οι μ. είναι ανεξάρτητες)

Άρα αποδεχόμαστε πιο εύκολα την H_0: $\beta_1=0$ δηλαδή πιο εύκολα μηδενίζω κάποιους συντελεστές με στατ. σημ.α. ⇒ επηρεάζεται και το δ.ε. (ε_t)

β.) Το συντελεστή προσδιορισμού και F-statistic.

∃ πολυσυγγραμμικότητας ανάμεσα στις ανεξάρτητες μ. ⇒ δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε την επίδραση κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής ξεχωριστά στην εξαρτημένη μεταβλητή.
⇒ R^2: υπερεκτιμάται.

Έτσι μπορεί να έχω πολυμεταβλητό υπόδειγμα με κάποιους συντελεστές στατ. μη σημαντ. που θα έχουν συντελεστή πολλαπλού προσδιορισμού υψηλό.

- R^2↑ ⇒ F-στατιστική ↑.

Αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο. μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένους ή αντιφατικούς ελέγχους.

γ.) Το βαθμό μεταβλητικότητας των συντελεστών παλινδρόμησης:

Η πολυσυγγραμμικότητα μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των συντελεστών, ακόμη και τα πρόσημα. που μπορεί να αλλάζουν.

δ.) Την εξειδίκευση του υποδείγματος:

Η π. μπορεί να συντελέσει σε λανθασμένη εξειδίκευση του υποδείγματος.
Αυτό γίνεται γιατί πολλές φορές, προσθέτουμε ή αφαιρούμε ερμηνευτικές μεταβλητές ανάλογα με το αν είναι στατιστικά σημαντικές ή όχι. Αν όμως η μη σημαντικότητα ή η σημαντικότητα κάποιου συντελεστή οφείλεται στην ύπαρξη π., τότε θα προκύψει λανθασμένη εξειδίκευση του υποδείγματος.

γενικά:

- exact multicollinearity: → δεν μπορώ να εκτιμήσω τους συντελεστές του υποδείγματος
  → γρ. συνδυασμοί των συντελεστών παλινδρόμησης θα μπορούσαν να εκτιμηθούν

- near multicollinearity ⇒ το υπόδειγμα εκτιμάται με τις εξής συνέπειες
  → τα τυπικά σφάλματα των συντελεστών αυξάνουν
  → t-stat ↓ ⇒ οι συντελεστές γίνονται λιγότερο σημαντικοί
  → cov-(x_1,x_2) ↑ (όταν $r_{x_1x_2}$ ↑) ⇒ δεν μπορώ να ερμηνεύσω τους συντ
  → οι εκτιμητές των συντελεστών παλινδρόμησης είναι
  αμερόληπτοι
  αν αποτελεσματικοί
  συνεπείς

ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΗ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ.

- Είναι χαρακτηριστικό του δείγματος
  → Δεν γίνεται έλεγχος για π. αλλά διαπίστωση και μέτρηση.
- $K=2 \Rightarrow r^2_{x_1,x_2}$: ικανοποιητικό μέτρο του βαθμού π. που ∃ στο δείγμα

$K\uparrow$ → δυσκολότερη η διαπίστωση και η μέτρηση με βάση τον συντελεστή συσχέτισης.

(μπορεί r_{ij} πολύ χαμηλή και το δείγμα να πάσχει από π.)

κριτήρια που χρησιμοποιούνται:

- R^2 και των F-statistics
- συντελεστές συσχέτισης
- κριτήριο του Frisch
- των Farrar-Flauber
- του Klein
- του Theil
- των R_i^2,
- των Besley-Kuh-Welsh

Μέθοδος VIF (variance inflation factor)

Το μέγεθος VIF δηλώνει το ποσό κατά το οποίο (σε σχετικούς όρους) αυξάνεται η διασπορά ενός εκτιμητή της παλινδρόμησης όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές συσχετίζονται.

- VIF < 1 : ∄ πολυσυγγραμμικότητα
- VIF ∈ (5,10) : ∃ —"—

$$VIF_{\hat{\beta}_j} = \frac{1}{1-R_j^2}$$

όπου το R_j^2 προκύπτει από την παλινδρόμηση:

$$X_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{j-1} X_{j-1} + \alpha_{j+1} X_{j+1} + \dots + \alpha_k X_k$$

▶ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

- restricted Least squares
- ridge regression (ρακοειδής)
- μετατροπή της μαθηματικής μορφής του υποδείγματος
- συνδυασμός χρονολογικών και διαστρωματικών στοιχείων
- περιορισμός των μεταβλητών στο υπ.
- (Principal Component, Durbin version, Generalized least squares, Theil + Goldberger)

1. Restricted least squares method.

- μπορεί να εφαρμοσθεί σε εκείνες τις περιπτώσεις που σε ένα πολυμεταβλητό υπόδειγμα έχουμε ακριβείς πληροφορίες για την ακριβή τιμή ενός ή περισσοτέρων συντελεστών του υποδείγματος ή σε περιπτώσεις που γνωρίζουμε την γραμμική και ακριβή σχέση μεταξύ συντελεστών του υπο εκτίμηση υποδείγματος.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα (τριμεταβλητό) ανάμεσα στις καταναλ. δαπάνες Y, στο εργ. εισόδημα και άλλες πηγές εισοδήματος, x_1, x_2: $\boxed{Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon}$

ακριβής τιμή κάποιων συντελεστών

οριακή ροπή κατανάλωσης από το εργατικό εισόδημα $= \hat{\beta}_1 = b_1 = 0{,}75$.

στάδιο 1: $Y = \beta_0 + 0{,}75 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

$$Y^* = Y - b_1 X_1 = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \quad :(*)$$

στάδιο 2: Με την μέθοδο OLS εκτιμάμε το υπόδειγμα (*) και έτσι έχουμε εκτιμήσεις των συντελεστών παλινδρόμησης $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_2$.

Είναι γνωστό πως οι δύο μορφές εισοδήματος συσχετίζονται μεταξύ τους $Cov(X_1, X_2) \neq 0$ → Η εκτίμηση με OLS → πολυσυγγρ. προβλήματα.

γνωστή γρ. σχέση μεταξύ των συντελεστών

- έστω $\beta_2 = 0{,}2\beta_1$.

στάδιο 1: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + 0{,}2\beta_1 X_2 + \varepsilon$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 (X_1 + 0{,}2X_2) + \varepsilon$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon \quad \text{όπου } X^* = X_1 + 0{,}2X_2.$$

στάδιο 2: Με την OLS εκτιμάμε τους συντελεστές $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$. $\Rightarrow \hat{\beta}_2 = 0{,}2\hat{\beta}_1$

2. RIDGE REGRESSION:

- Είναι μια μηχανική που αποβλέπει στην ελάττωση των τ. σφάλματα των συντελεστών παλινδρόμησης που είναι το κυριότερο πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας.
- Αυτή η μέθοδος προσθέτει ένα σταθερό όρο στις διακυμάνσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος που με τη σειρά τους ελαττώνουν τη συσχέτιση ανάμεσα στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αυτό παρατηρείται από τους τύπους:
  $\Rightarrow \downarrow$ πολυσυγγραμμικότητας

$$r^2_{x_1x_2} = \frac{\sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \, \sum x_{2i}^2}, \qquad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum x_{1i}^2 \cdot (1 - r^2_{x_1x_2})}$$

Επομένως όταν η διακύμανση της μεταβλητής x_1 αυξηθεί κατά ένα σταθερό αριθμό λ. $\Sigma(x_{1i}+\lambda) \Rightarrow r^2_{x_1x_2} \downarrow \Rightarrow$ πολυσυγγραμμικότητα $\downarrow$

Άρα η ridge παλινδρόμηση δίνει μεροληπτικούς συντελεστές παλινδρόμησης και μικρότερα τυπικά σφάλματα των συντελεστών, συγκρινόμενα με εκείνα που παίρναμε από την εφαρμογή της OLS.

5. Περιορισμός των μεταβλητών στο υπόδειγμα:

- Εφαρμόζεται μόνο όταν θέλουμε εκτίμηση ορισμένων μόνο συντελεστών στο υπόδειγμα

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \quad : (1)$$

Εαν ενδιαφέρομαι μόνο για τον συντελεστή β_1 τότε η μεταβλητή X_2 αφαιρείται από το υπόδειγμα και η υπό εκτίμηση σχέση είναι της μορφής

$$Y = \beta_1 X_1 + u. \quad : (2).$$

(1): $\hat{\beta}_1$: αμερόληπτος (2): $\hat{\beta}_1$: μεροληπτικός

(1): SSE $<$ (2): SSE

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ — AUTOCORRELATION — (χρονολογικές σειρές)

Η αυτοσυσχέτιση αναφέρεται στην παραβίαση της στοχαστικής υπόθεσης ότι η συνδιακύμανση των διαδοχικών τιμών του διαταρακτικού όρου είναι μηδέν.

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) \neq 0$$

χρονική υστέρηση s: $\begin{cases} 0, +1, +2, +3, \ldots \\ 0, -1, -2, \ldots \end{cases}$

για $s \neq 0$: → ο διαταρακτικός όρος μιας παρατήρησης i συσχετίζεται με αυτόν της j παρ.

$s=0$: $E(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0$: σταθερή (ομοσκεδαστικότητα $\forall t$)

συντελεστής αυτοσυσχέτισης: $\rho_s = \dfrac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s})}{\sqrt{Var(\varepsilon_t)} \cdot \sqrt{Var(\varepsilon_{t-s})}} = \dfrac{\gamma_s}{\gamma_0}$

ΜΟΡΦΕΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

▶ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ 1ου ΒΑΘΜΟΥ (AR(1))

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$

$\boxed{\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + V_t}$, $-1 \leq \rho \leq 1$ → Με την OLS εκτιμώ το ρ

V_t: τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τις κλασικές υποθέσεις: $E(V_t) = 0$, $E(V_t^2) = \sigma_{V_t}^2$, $E(V_t \cdot V_{t-1}) = E(V_i \cdot V_j) = 0$

- $\rho = 0$: $\varepsilon_t = V_t$ ∄ αυτοσυσχέτιση
- $\rho \to 1$: ∃ ισχυρή " "

→ $E(\varepsilon_t) = E(\rho \varepsilon_{t-1} + V_t) = \rho \cdot E(\varepsilon_{t-1}) + E(V_t) = \rho \cdot 0 + 0 = 0$.

→ $\sigma_{\varepsilon_t}^2 = Var(\varepsilon_t) = E([\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)])^2 = E[\varepsilon_t]^2 = E(\varepsilon_t^2) = E(\rho\, \varepsilon_{t-1} + V_t)^2$

$= E(\rho^2 \varepsilon_{t-1}^2 + V_t^2 + 2\rho\, \varepsilon_{t-1} V_t) = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(V_t^2) + 2\rho\, E(\varepsilon_{t-1} V_t)$ είναι ανεξάρτητα

$= \rho^2 Var(\varepsilon_t) + Var(V_t) + 0 = \rho^2 Var(\varepsilon_t) + Var(V_t) = \rho^2 \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \sigma_V^2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_t}^2 = \dfrac{\sigma_V^2}{1-\rho^2}$

→ $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) = E[(\rho \cdot \varepsilon_{t-1} + V_t)\, \varepsilon_{t-1}] = E(\rho\, \varepsilon_{t-1}^2 + V_t \cdot \varepsilon_{t-1})$

$= \rho\, E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(V_t\, \varepsilon_{t-1}) = \rho \cdot \sigma_{\varepsilon_t}^2$ όπου $\sigma_{\varepsilon_t}^2 = \dfrac{\sigma_V^2}{1-\rho^2}$

▷ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ 2ου βαθμού και ανωτέρου. AR(2)

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + v_t.$$

⋮

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + v_t \quad AR(s).$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ.

→ παραλειπόμενες μεταβλ.
→ μη ορθή εξειδίκευση της μαθηματικής μορφής του υποδείγματος
→ σφάλμα μέτρησης της εξ. μ.
→ ∃ μεταβλητή με χρ. υστερήσεις

1. Παραλειπόμενες μεταβλητές:

Όταν μια σχετική μ. δεν περιλαμβάνεται στο υπόδειγμα τότε αποτελεί μέρος του διαταρακτικού όρου.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + v.$ Ακόμα και αν ο δ.ο. ε στο 1ο υπόδειγμα ικανοποιεί όλες τις κλασικές υποθέσεις, ο v στο 2ο αυτοσυσχετίζεται αν η μεταβλητή X_2 από μόνη της αυτοσυσχετίζεται.

$V = \beta_2 X_2 + \varepsilon$ και $\rho_{v_t} = f.(\rho_{X_2}$, μέγεθος μεταβλητότητας του $\beta_2 X_2$, βαθμός αυτοσυσχέτισης του ε_t στο 1ο

2. Μαθηματική μορφή του υποδείγματος:

Ο ερευνητής (για π.χ.) εκτιμά το γραμμικό υπόδειγμα (λάθος) μιας οικονομικής σχέσης αντί του μη-γραμμικού (σωστού) υποδείγματος

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + v \end{aligned}\right\} \rightarrow \varepsilon = \beta_2 X_1^2 + v. \Rightarrow \text{αυτοσυσχέτιση του } \varepsilon.$$

3. Υποδείγματα με χρονικές υστερήσεις:

Σε υποδείγματα με χρ. σειρές ∃ μεταβλητές με χρονικές υστερήσεις.

π.χ.: Παρατηρείται ότι η καταναλωτική δαπάνη στην τρέχουσα περίοδο t εξαρτάται, μεταξύ άλλων παραγόντων από το εισόδημα Y_t και την καταναλωτική δαπάνη της προηγούμενης περιόδου C_{t-1}. Έτσι αν η συνάρτηση κατανάλωσης εκτιμηθεί χωρίς την ~~εκτίμηση του~~ κατανάλωση της προηγούμενης περιόδου, ο ε_t θα αναπτύξει ένα συστηματικό πρότυπο που οφείλεται στην επίδραση της C_{t-1}.

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_t$$

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 C_{t-1} + v_t$$

$$\varepsilon_t = \beta_2 C_{t-1} + v_t$$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

— υπερεκτίμηση του $V(\varepsilon_t)$
→ υπερεκτίμηση του R^2
→ υποεκτίμηση του $Cov(\varepsilon_t \, \varepsilon_{t-1})$
→ $V(\widehat{Cov}$(συντελεστών)) : υποεκτίμηση

Έστω ότι σε ένα διμεταβλητό υπόδειγμα,

η δομή του διαταρακτικού όρου είναι πρώτου βαθμού;

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + v_t \; , \; |\rho|<1$$

• διακύμανση του ε: Όπως αποδείξαμε: $\sigma^2_{\varepsilon_t} = \dfrac{\sigma^2_{v_t}}{1-\rho^2}$ όπου $-1 \leq \rho \leq 1$.
↳ υπερεκτιμάται

- $\rho = \pm 1 \Rightarrow \sigma^2_\varepsilon \to +\infty$
- $\rho = 0 \Rightarrow \sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_v$: η διακύμανση του δ.ο. ισούται με αυτή που αντιστοιχεί στο κλασικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (ελάχιστη δυνατή)
- $E(\hat{\sigma}^2_\varepsilon) = E(\hat{\sigma}^2_v) \cdot \dfrac{1}{1-\rho^2} = \sigma^2_\varepsilon \left(\dfrac{1}{1-\rho^2}\right)$: μη αμερόληπτος εκτιμητής.

γενικά $\sigma^2_\varepsilon \geq \sigma_v$ (με $\rho \uparrow \Rightarrow \sigma_\varepsilon \uparrow$)

• συνδιακύμανση του ε: Όπως αποδείξαμε: $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho \sigma^2_\varepsilon = \rho \sigma^2_v \dfrac{1}{1-\rho^2}$
↳ υποεκτιμάται

• Οι εκτιμητές των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των συντελεστών που προκύπτουν από την OLS δεν είναι αμερόληπτοι και συνήθως οδηγούν σε υποεκτιμήσεις τους.

$\Rightarrow$ όχι αξιόπιστοι στατιστικοί έλεγχοι { έλεγχος υποθέσεων → η υπόθεση απορρίπτεται ενώ είναι δεκτή.
διαστήματα εμπιστοσύνης → στενότερα (μικρότερα).

Όμως οι συντελεστές της παλινδρόμησης δεν επηρεάζονται στο οικονομετρικό υπ.

$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$
$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ και $P\left[\lim\limits_{n\to\infty}(\hat{\beta}_0)\right] = \beta_0$;

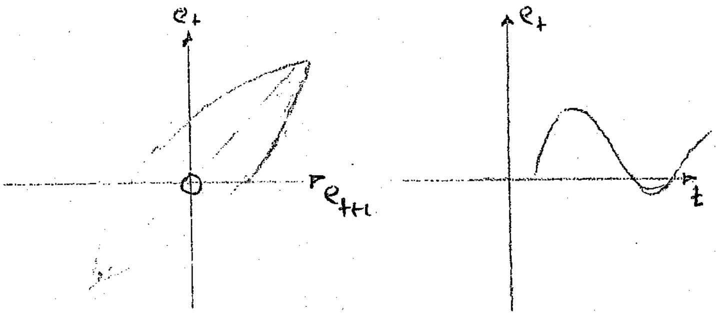
$$P\left[\lim_{n\to\infty}(|\hat{\beta}_0 - \beta_0| < \varepsilon) = 1\right]$$

ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΑ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

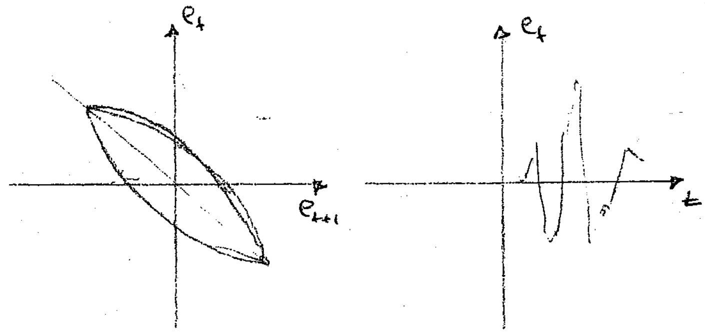
→ διαγράμματα διασποράς
→ τυπικά κριτήρια
} 1ου βαθμού (AR(1))

1. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

α.) διαπίστωση θετικής αυτοσυσχέτισης



β.) αρνητική αυτοσυσχέτιση.



2. ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ DURBIN-WATSON

. βασίζεται στην αρχή πως αν τα $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$ του πληθυσμού αυτοσυσχετίζονται ⇒ e_t, e_{t-1} (OLS) δ. αυτοσυσχ

. προϋποθέσεις: i) ερευνητικές μεταβλητές υποδείγματος: όχι στοχαστικές

ii) $\exists\ \beta_0$

iii) τα ε_t ακολουθούν 1ο βαθμό αυτοσυσχέτισης AR(1)

iv) το υπόδειγμα δεν περιλαμβάνει ερευνητικές μεταβλητές με χρονικές υστερήσεις και δεν υπάρχουν παραλειπόμενες παρατηρήσεις στις μεταβλητές του υ.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω διμεταβλητό υπόδειγμα στο οποίο η μορφή αυτοσυσχέτισης είναι πρώτου βαθμού: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$

· $E(\varepsilon_t)=0$
· $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) \neq 0$.
· $E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$.

$\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + v_t$

· $|\rho|<1$
· $E(v_t)=0$
· $E(v_t v_{t-1})=0$.
· $E(v_t^2)=\sigma_v^2$

$H_0: \rho=0$

$H_1: \rho\neq 0$. ρ: συντελεστής αυτοσυσχέτισης.

$$= \frac{E(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{E(\varepsilon_t^2) - 2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_{t-1}^2)}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$= \frac{2\sigma_\varepsilon^2 - 2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}{\sigma_\varepsilon^2} = 2-2\frac{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}{\sigma_\varepsilon^2}$$

~~στάδιο1: δείκτης αυτοσυσχέτισης: $d_{\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}} = \frac{Cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}{\sqrt{V(\varepsilon_t)}\sqrt{V(\varepsilon_{t-1})}} = 2-2\rho$~~

• $\rho=0$ $(E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})=0) \Rightarrow d_{\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}=2$.

• $\rho=1$ $(\cdots = \cdots = 1) \Rightarrow d_{\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}=0$

• $\rho=-1$ $(\cdots = \cdots = -1) \Rightarrow d_{\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}=4$.

στάδιο2: ε_t: τ.μ. ⇒ d: δεν μπορεί να υπολογιστεί

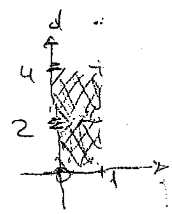
OLS-κατάλοιπα: $d_{e_te_{t-1}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = 2-2\hat{\rho}$, $\hat{\rho}$: εκτιμητής του συντ. αυτοσυσχ. του πληθυσμού ρ.

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n}[e_t^2+e_{t-1}^2-2e_te_{t-1}]}{\sum e_t^2} = 2-2\frac{\sum e_te_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

• $\hat{\rho}=0 \Rightarrow d_{e_te_{t-1}}=2$ ⇒ οι διαταρακτικοί όροι δεν αυτοσυσχετίζονται.

• $\hat{\rho}=1 \Rightarrow d_{e_te_{t-1}}=0$ ⇒ ∃ πλήρης θετική αυτοσυσχέτιση των ε_t.

• $\hat{\rho}=-1 \Rightarrow d_{e_te_{t-1}}=4$ ⇒ ∃. —"— αρνητική —"— —"—

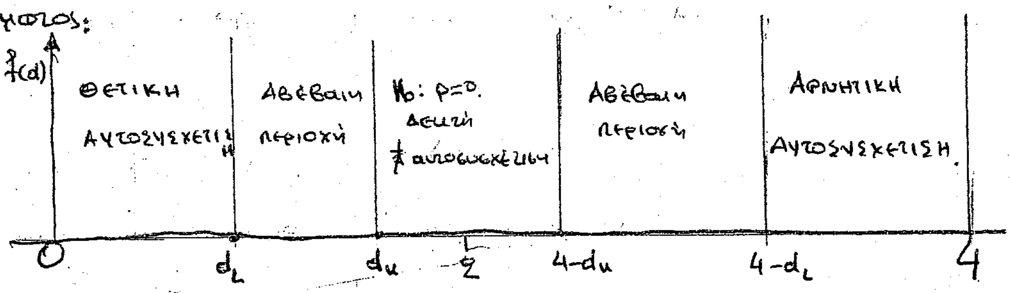


<u>στάδιο 3</u>: βασικό-μειονέκτημα: η ακριβής κατανομή της στατιστικής d δεν είναι ακριβής αλλά εξαρτάται τόσο από την ακολουθία των καταλοίπων όσο και από την ακολουθία όλων των τιμών των ερευνητικών μεταβλητών.

Έτσι η Durbin-Watson έδειξαν ότι η ακριβής (true) κατανομή της d στατιστικής κυμαίνεται μεταξύ δύο άλλων στατιστικών d_L και d_U που λαμβάνουν υπόψην τόσο τον αριθμό των ανεξαρτήτων μεταβλητών όσο και τον αριθμό των παρατηρήσεων του υποδείγματος:

$0<d<2 \rightarrow \exists$ κάποια θετική αυτοσυσχέτιση

$2<d<4 \rightarrow \exists$ κάποια αρνητική αυτοσυσχέτιση



• $0<d<2$ και $2<d<4$.

$H_0: \rho=0$

$H_1: \rho>0$ θετική αυτοσυσχέτιση ($\rho<0$ αρνητική α.)

<u>στάδιο 1</u>: Με την ΟΛS εκτιμώ τον υπόδειγμα $Y_t=\beta_0+\beta_1 X_t+\varepsilon_t$

<u>στάδιο 2</u>: $d_{e_t e_{t-1}}=2(1-\hat{\rho})=\ldots$

<u>στάδιο 3</u>: συγκρίνω την $d_{e_t e_{t-1}}$ που βρήκα με την d_L από τους πίνακες.

• $d_{e_t e_{t-1}}<d_L \Rightarrow$ H_0 απορρίπτεται $\Rightarrow \exists$ θετική αυτοσυσχέτιση $\quad d_{e_t e_{t-1}}>4-d_L \Rightarrow \exists$ αρν

• $d_L<d_{e_t e_{t-1}}<d_u \Rightarrow$? δεν ξέρω δεν απαντώ $\quad 4-d_u<d<4-d_L \Rightarrow$?

• $d_u<d_{e_t e_{t-1}}<2 \Rightarrow \nexists$ αυτοσυσχέτιση $\quad 2<d<4-d_u \Rightarrow \nexists$

3. Η h-στατιστική του Durbin

4. Ο έλεγχος του Von Neumann

5. Ο έλεγχος των Berenblut-Webb.

αυτοσυσχέτιση ανωτέρου βαθμού:

→ Βασίζονται στον Lagrange Multiplier Test (LM-test)

1. The LM-TEST : AR(S)

$H_0: \rho_1=\rho_2=\dots=\rho_s=0$

$Y_t = \beta_0+\beta_1 X_{1t}+\beta_2 X_{2t}+\dots+\beta_k X_{kt}+\varepsilon_t$

$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1}+\rho_2 \varepsilon_{t-2}+\dots+\rho_s \varepsilon_{t-s}+e_t$

στάδιο 1: εκτιμώ με την OLS το υπόδειγμα, και μετά υπολογίζω τα κατάλοιπα e_t.

στάδιο 2: με βάση τα e_t εκτιμώ με την OLS το υπόδειγμα:

$$e_t = \gamma_0+\gamma_1 X_t+\rho_1 e_{t-1}+\dots+\rho_s e_{t-s}+V_t$$

στάδιο 3: απορρίπτω H_0, όταν η F που προέκυψε από το υπόδειγμα $\geq F_{\text{πίνακα}}$

2. Η LM-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ : ο έλεγχος των BOX & PIERCE.

μόνο όταν δεν υπάρχουν στοχαστικές ερμηνευτικές μεταβλητές.

3. THE LM-TEST : το κριτήριο των BOX-PIERCE-LJUNG.

4. Η LM-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ : MA(κ).

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ.

(OLS → αναποτελεσματικοί εκτιμητές)

→ μετασχηματισμός των στοιχείων του δείγματος.

1. ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ 1ου βαθμού : AR(1)

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + v_t \quad , \quad -1 \le \rho \le 1$$

- $E(\varepsilon_t) = 0$
- $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$: σταθερή
- $E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) \neq 0$
- $E(v_t \cdot v_{t-1}) = 0$
- $E(\varepsilon_t \cdot v_t) = 0$

α) A Priori γνώση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

GLM: Generalized Least-Squares Method.

Η βασική αρχή που διέπει την GLM είναι η μετατροπή του αρχικού γρ. υποδείγματος σε ένα νέο υπόδειγμα στο οποίο οι διαταρακτικοί όροι είναι διαχρονικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$

στάδιο 1: υστερούμε το υπόδειγμα κατά μία χρονική περίοδο

$$Y_{t-1} = b_0 + b_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

στάδιο 2: πολλαπλασιάζω με τον συντελεστή συσχέτισης που είναι a priori γνωστός

$$\hat{\rho} Y_{t-1} = \hat{\rho} b_0 + \hat{\rho} b_1 X_{t-1} + \hat{\rho} \varepsilon_{t-1}$$

στάδιο 3: την αφαιρώ από το Y_t:

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = b_0 - \hat{\rho} b_0 + b_1 X_t - \hat{\rho} b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$$

$$\boxed{Y_t^* = b_0^* + b_1 X_t^* + \varepsilon_t^*} : (*)$$

στάδιο 4: το (*) υπόδειγμα ικανοποιεί όλες τις κλασικές υποθέσεις και μπορεί να εκτιμηθεί με OLS β) ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δεν είναι γνωστός.

- ο μετασχηματισμός του αρχικού υποδείγματος βασίζεται στο συντελεστή συσχέτισης που εκτιμάται από τα αρχικά στοιχεία του δείγματος.

i. Η διαδικασία του Cochrane-Orcutt: ⟸ !!!

στάδιο 1: OLS → υποθέτουμε το υπόδειγμα $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.

και κατόπιν τα κατάλοιπα: $e_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t$.

στάδιο 2: OLS → εκτιμούμε τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης (δεδομένου των καταλοίπων)

$$e_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t \rightarrow \hat{\rho}.$$

στάδιο 3: ο $\hat{\rho}$ χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό του αρχικού υποδείγματος

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + (\varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}) \longrightarrow Y^* = \beta_0^* + \beta_1 X_1^* + \varepsilon_t^*$$

και κατόπιν εκτιμούμε με OLS → $\hat{\beta}_0^*$ και $\hat{\beta}_1$

(δηλ. ο $\hat{\rho}$ χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της ρ και κατόπιν της T.)

στάδιο 4: τώρα θα έχουμε $e_t^* = Y_t - \beta_0^* - \beta_1 X_t$ ← $(e_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1)$

στάδιο 5: η $e_t = \hat{\rho} e_{t-1} + v_t$ γίνεται: $e_t^* = \hat{\hat{\rho}} \cdot e_{t-1}^* + v_t$

Ο συντελεστής $\hat{\hat{\rho}}$ χρησιμοποιείται αντί του $\hat{\rho}$ για τον μετασχηματισμό των α.υ.

Σταματάω όταν $\hat{\hat{\hat{\rho}}} \simeq \hat{\hat{\rho}}$

ii. Η διαδικασία των Hildreth-Lu.

Εδώ η τιμή του ρ που χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό των μεταβλητών του υποδείγματος, δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά κινείται στο (-1, 1). Για κάθε τιμή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης, το μετασχηματισμένο υπόδειγμα εκτιμάται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Η τελική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το SSE.

iii. Η διαδικασία του Durbin κατά δύο στάδια:

→ βασίζεται στην σχέση: $Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$ ← άγνωστος συντελεστής συσχέτισης

$$Y_t = \beta_0(1-\rho) + \rho Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \beta_1 \rho X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$= \gamma_0 + \rho Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \gamma_1 X_{t-1} + U_t \quad (*)$$

στάδιο 1: εκτιμώ το (*) με την OLS, υποθέτοντας ότι το υπόδειγμα είναι γραμμικό.

Ο συντελεστής της μεταβλητής Y_{t-1} μας δίνει τον εκτιμητή: $\hat{\rho}$.

στάδιο 2: με βάση τον $\hat{\rho}$, μετασχηματίζω το αρχικό υπόδειγμα.

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + \varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}.$$

στάδιο 3: OLS στην τελευταία σχέση (υπόδειγμα) μας δίνει τους εκτιμητές $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$.

ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

(διαστρωματικά στοιχεία)

Υπόδειγμα: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i=1,2,\ldots,n$

ετεροσκεδαστικότητα:
- $E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$

ή
- $E[\quad]^2 = E(\varepsilon_i^2) = V(\varepsilon_i) \neq \sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2$

ή
- $$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

ομοσκεδαστικότητα:
- $E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$

ή
- $$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & - & - & - & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I$$

όπου $E(\varepsilon_i) = 0$ και $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

- οι συντελεστές του υποδείγματος που προκύπτουν με την OLS όταν ο διαταρακτικός όρος είναι ετεροσκεδαστικός εξακολουθούν να είναι γραμμικοί και αμερόληπτοι. (συνεπείς)
- οι διακυμάνσεις των συντελεστών του υποδείγματος που προκ.... ...ετεροσκεδαστικός, δεν είναι αποτελεσματικοί, δηλαδή δεν έχουν την μικρότερη διακύμανση όλων των αμερόληπτων συντελεστών. Άρα. οι συντελεστές του υποδείγματος δεν είναι BLUE.

ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

- αρκετές παρατηρήσεις (για κάθε τιμή της ... μεταβλητής) για την εξαρτημένη μ.
- n: πολύ μεγάλο

→ κλασικό κριτήριο ομοιογένειας ελέγχου. η ισότητα των διακυμάνσεων

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ολικώς →

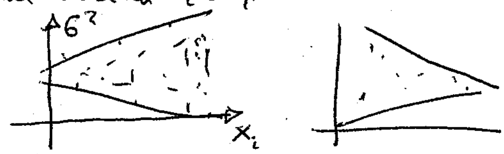
1. Κριτήριο του Σπήρμαν

- Βασίζεται στον συντελεστή συσχέτισης του Spearman r_s.
- στάδιο 1: H_0: $\rho_s = 0$ → συντελεστής συσχέτισης ⟺ ∄ ετεροσκεδαστικότητα
  H_1: $\rho_s \neq 0$.

  στάδιο 2: OLS → $e_i = Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i$

2. Κριτήριο των Goldfeld - Quandt.

- Εφαρμόζεται όταν η διακύμανση του ε_i σχετίζεται θετικά με μία από τις ερευνητικές μεταβλητές: $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$



3. Κριτήριο του Glesjer:

- εφαρμόζεται όταν η διακύμανση του ε_i σχετίζεται με διάφορες μορφές με κάποια ερευνητική μεταβλητή.

4. Κριτήριο του Παρκ:

- Βασίζεται στην υπόθεση ότι η διακύμανση του διατ. όρου σ_i^2 είναι συνάρτηση της μεταβλητής X_i: $\sigma_i^2 = \sigma^2 \cdot X_i^{\beta} \cdot e^{u_i}$

$$\ln e_i^2 = \ln\sigma^2 + \beta \cdot \ln X_i + u_i$$

H_0: $\beta = 0$
H_1: $\beta \neq 0$

5. Κριτήριο Breusch - Pagan - Goldfrey: B - P - G.

- η σ_i^2 είναι ανεξάρτητη της συναρτησιακής μορφής
- συγκεκριμένα αν ∃ μεταβλητή(-ές) που επηρεάζουν την διακύμανση ανάμεσα στην σ_i^2 και στο σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών διαχωρίζεται ως εξής

$$\sigma_i^2 = F(\gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \dots + \gamma_k X_k).$$

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k$,

---

6. Κριτήριο του ΜΠΑΡΤΛΕΤ: BARTLET'S TEST.

όπου:
- ∀ τιμή της ερευνητικής Y ∃ αρκετές παρατηρήσεις για την ανεξ. μ.
- n↑ ⇒ k ομάδες

στάδιο 1: $n \rightarrow n_1, n_2, \dots, n_k$

στάδιο 2: 1η ομάδα: $S_1^2 = \Sigma(Y_1 - \bar{Y}_1)^2 / n_1 - 1$: διακύμανση της εξαρτημένης μετα. Y_i

$S_2^2 = \Sigma(Y_2 - \bar{Y}_2)^2 / n_2 - 1$

$\vdots$

$S_k^2 = \Sigma(Y_k - \bar{Y}_k)^2 / n_k - 1$

στάδιο 3: Υπολογίζω την διακύμανση της εξαρτημένης μεταβλητής Y για το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2 / f$$

στάδιο 4: $\Lambda = A/B$ όπου $A = f \ln S^2 - \Sigma f_i \ln S_i^2$

$B = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \cdot \Sigma\left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f}\right)$

$f = \sum_{i=1}^{k} f_i$

$\sim X^2$, με $k-1$ df.

→ $\Lambda > X^2_{(a, k-1)}$ ⇒ H_0 απορρίπτεται

δηλ. ∃ ετεροσκεδαστικότητα.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

1. ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (WEIGHTED LEAST SQUARES: WLS)

→ οι παρατηρήσεις με την μικρότερη διακύμανση έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.

α. Γνωστή η μήτρα Ω.

$$Var\text{-}Cov(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega .$$

αντικειμενικός σκοπός της WLS: η στάθμιση των στοιχείων του υπ.: $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$.

$(\Rightarrow \exists\, T: \quad T'T = \Omega^{-1}$ και $T \Omega T' = I)$

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1/\sigma_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$1/\sigma_i = \omega_i$: σταθμιστές

$TY = (TX)\beta + T\varepsilon$ δηλ. $Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$

$$E(\varepsilon^*\varepsilon^{*\prime}) = E[(T\varepsilon)(T\varepsilon)'] = E(T\varepsilon\, \varepsilon' T') = E(T\varepsilon\varepsilon' T') = T E(\varepsilon\varepsilon') T' = T\sigma^2 \Omega T' = \sigma^2 I$$

Έτσι το τροποποιημένο υπόδειγμα εκτιμάται με την OLS.

και θα δώσει εκτιμητές που είναι:
- γραμμικοί
- αμερόληπτοι
- άριστοι (αποτελεσματικοί)
- συνεπείς

β. Άγνωστη η μήτρα Ω

Όταν οι διακυμάνσεις του διαταρακτικού όρου δεν είναι γνωστές, οι παρατηρήσεις του δείγματος θα μπορούσαν να σταθμιστούν αν κάναμε υποθέσεις σχετικά με την μορφή της ετεροσκεδαστικότητας.

- μορφή: $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$ αρχικό υπόδειγμα: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

  τροποποιημένο υπόδειγμα: $Y_i / X_i = \beta_0 / X_i + \beta_1 / X_i + \varepsilon_i / X_i$ $\quad (\omega_i = 1/X_i)$

- μορφή $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$

  $\rightarrow Y_i / \sqrt{X_i} = \beta_0 / \sqrt{X_i} + \beta_1 / \sqrt{X_i} + \varepsilon_i / \sqrt{X_i}$ $\qquad \omega_i = 1/\sqrt{X_i}$

- $\sigma_i^2 = \sigma^2 [E(Y_i)]^2$

  $\rightarrow Y_i / E(Y_i) = \beta_0 / E(Y_i) + \beta_1 / E(Y_i) + \varepsilon_i / E(Y_i)$ $\qquad \omega_i = 1/E(Y_i)$

2. Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΤΑ 2 ΣΤΑΔΙΑ (G2SLS)

στάδιο 1: Εκτιμάμε το αρχικό υπόδειγμα με OLS

Δηλ.: $\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i$

στάδιο 2: Τροποποιούμε το υπόδειγμα με ετεροσκεδαστικότητα, χρησιμοποιώντας σαν στάθμιση την υπολογιζόμενη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής

$w_i = 1/\hat{Y}$. Δηλ. $\frac{Y_i}{\hat{Y}_i} = \frac{b_0}{\hat{Y}_i} + \frac{b_1}{\hat{Y}_i} X_i + \frac{\varepsilon_i}{\hat{Y}_i}$

στάδιο 3: Εκτιμάμε το τροποποιημένο υπόδειγμα με OLS.

3. ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ:

A. Ετεροσκεδαστικότητα κατά ομάδες:

- σε κάθε ομάδα του υποδείγματος ο δ. όρος είναι ομοσκεδαστικός
- μεταξύ των ομάδων ο δ. όρος είναι ετεροσκεδαστικός

$$E(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad w_i = 1/\sigma_i$$

B. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

- δ. όρος κατανέμεται κανονικά.
  - → εκτίμηση των διακυμάνσεων του δ. όρου
  - → την τροποποίηση των μεταβλητών του αρχικού υποδείγματος

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ και ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

- η αναγκαία τροποποίηση:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)}\, Y_1 \\ Y_2 - \rho Y_1 \\ \vdots \\ Y_n - \rho Y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{(1-\rho^2)} \cdot X_1 \\ 1-\rho & X_2 - \rho X_1 \\ \vdots & \\ 1-\rho & X_n - \rho X_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

το υπόδειγμα απαλλάχτηκε

τόσο από την αυτοσυσχέτιση όσο και από την ετεροσκεδαστικότητα