Θέματα σε Μέτρα Κινδύνου

Βασικό Ερώτημα: Πως θα μπορούσε να αναπαρασταθεί απλά το "κινδυνώδες" χρηματοοικονομικού τίτλου;

Τέτοιου είδους αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες σε ζητήματα δικαιολόγησης διαδικασιών βέλτιστης επιλογής (π.χ. χαρτοφυλακίου), ή ρύθμισης χρηματοοικονομικών συστημάτων, κ.ο.κ. Επομένως έχει νόημα η μελέτη τέτοιων αναπαραστάσεων ως προς ιδιότητες που (εν μέρει) μπορεί να σχετίζονται με ζητήματα όπως τα παραπάνω.

Βασικό Υπόβαθρο. Στην παρούσα χρονική στιγμή t, είναι δυνατόν να υπάρχει αβεβαιότητα για την μεταβολή της αξίας, ή την απόδοση, κ.ο.κ. χρηματοοικονομικού τίτλου κατά την χρονική στιγμή $t+h$ $(h>0)$ σε σχέση με την t, και αυτό να ισχύει για κάθε τίτλο σε ένα σύνολο που μας ενδιαφέρει. Έστω λοιπόν ότι το παραπάνω χαρακτηριστικό έχει την μορφή τυχαίας μεταβλητής, για μια κάθε έναν από τους προαναφερθέντες τίτλους, ενώ αυτές θα συμβολίζονται χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $x_{t,t+h}$, $y_{t,t+h}$, κ.ο.κ.

Σημείωση: Το παραπάνω υπόβαθρο είναι αρκετά γενικό και μπορεί να περιλαμβάνει διάφορες περιπτώσεις στις οποίες συναντώνται ζητήματα όπως αυτά που προαναφέρθηκαν. Π.χ. κάθε ένας από τους τίτλους στην εν λόγω συλλογή ενδιαφέροντος θα μπορούσε να έχει την μορφή χαρτοφυλακίου ως προς k βασικούς τίτλους κάθε ένας εκ των οποίων αναπαρίσταται από την σχετική τυχαία μεταβλητή $x_{i,t,t+h}$, όπου $i=1,\ldots,k$. Έτσι π.χ. η εν λόγω συλλογή μπορεί να αναπαρίσταται από το σύνολο

$$(*) \quad \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{i,t,t+h} \, , \, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

ή από το υποσύνολο του παρακάτω

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_{i,t,t+h} \,, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \,, \lambda_i \geq 0 \,, i=1,\dots,k \right\}$$

εφόσον δεν επιτρέπονται θέσεις τύπου short, ή από άλλο υποσύνολο του (*) που μπορεί να ενσωματώνουν περαιτέρω οικονομικούς, ή/και νομικούς, ή/και ρυθμιστικούς περιορισμούς κ.ο.κ. Κάθε ένας από τους βασικούς τίτλους μπορεί επίσης να είναι χαρτοφυλάκιο άλλων τίτλων, παράγωγο, κλπ. Π.χ. η εν λόγω συλλογή θα μπορούσε να έχει μορφή σχετική με ζητήματα ρύθμισης από σχετική ρυθμιστική αρχή η οποία για παράδειγμα μπορεί να αποφασίζει τα ως προς την επιβολή διακράτησης ρευστών διαθεσίμων με σκοπό την ευστάθεια χρηματοοικονομικού οργανισμού κ.λ.π.

Υπόθεση: Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι αν δύο τίτλοι έχουν την ίδια κατανομή τότε είναι ισοδύναμοι ως προς το βασικό ερώτημα.

Σχόλιο. Η παραπάνω υπόθεση ταυτίζει κάθε τυχαία μεταβλητή στην παραπάνω συλλογή με την κατανομή που αυτή ακολουθεί και συνεπώς είναι δυνατόν να "αγνοεί" χαρακτηριστικά της τυχαίας μεταβλητής (ως κατάλληλης συνάρτησης) που δεν επηρεάζουν την κατανομή. Θα μπορούσε να ονομασθεί και ως υπόθεση του law invariance για τα όσα θα πούμε παρακάτω για τα μέτρα κινδύνου.

Σημείωση. Και πάλι το υπόβαθρο μας είναι αρκετά γενικό ώστε να επιτρέπει π.χ. τίτλους για τους οποίους δεν υπάρχει αβεβαιότητα οπότε και οι σχετικές κατανομές είναι εκφυλισμένες.

Δεδομένης και της παραπάνω υπόθεσης, και αν δεν επιμείνουμε στην απαίτηση της απλότητας στο βασικό μας ερώτημα, γίνεται προφανές ότι το "κινδυνώδες" όποιου τίτλου στην παραπάνω συλλογή περιγράφεται απολύτως από την δεσμευμένη στο Y_t κατανομή του εν λόγω τίτλου.

Σημείωση: Τα παραπάνω θα μπορούσαν να επεκταθούν κατάλληλως και στην περίπτωση που στην χρονική στιγμή t είναι διαθέσιμο μη τετριμμένο σύνολο πληροφορίας, οπότε και θα αφορούσαν τις δεσμευμένες στο σύνολο πληροφορίας κατανομές των παραπάνω τίτλων. □

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση το κινδυνώδες κωδικοποιείται και περιγράφεται από την ανάλογη κατανομή, η οποία όμως είναι γενικά ένα "περίπλοκο" μαθηματικό αντικείμενο (μια κατάλληλη συνάρτηση) του οποίου γενικά η διαχείριση σε ζητήματα όπως τα παραπάνω μπορεί να είναι "υπολογιστικά περίπλοκη". Επίσης, όπως και περιμένουμε να ισχύει γενικά σε εφαρμογές, κάποιες από τις εν λόγω κατανομές μπορεί να είναι (εν μέρει) άγνωστες. Προκειμένου προς το παρόν να αποφύγουμε ζητήματα διαχείρισης τέτοιου είδους "δεύτερης τάξης αβεβαιότητας" (π.χ. μέσω διαδικασιών στατιστικής επαγωγής) κάνουμε και την παρακάτω απλουστευτική υπόθεση.

Υπόθεση. Οι προαναφερθείσες κατανομές πιθανότητας είναι γνωστές. □

Δεδομένου και του παραπάνω μπορούμε να αναρωτηθούμε αν θα ήταν δυνατόν η αναπαράσταση του "κινδυνώδους" ή τουλάχιστον κάποιων χαρακτηριστικών αυτού να γίνεται από "απλούστερα διαχειρίσιμα" μαθηματικά αντικείμενα όπως π.χ. οι πραγματικοί αριθμοί. Αποκτούμε έτσι την έννοια του μέτρου κινδύνου.

Μέτρα Κινδύνου – Risk Measures

Στα παρακάτω και για λόγους συμβολικής απλούστευσης θα αποφεύγουμε την χρήση των χρονικών δεικτών εφόσον αυτό δεν δημιουργεί παρεξηγήσεις. Έτσι θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα x, y κ.ο.κ. προκειμένου να αναφερόμαστε στις παραπάνω τυχαίες μεταβλητές (κάθε μία εκ των οποίων ταυτίζεται, βάσει υπόθεσης παραπάνω, με την κατανομή που ακολουθεί). Έστω επίσης X "κατάλληλος χώρος" από τυχαίες μεταβλητές που περιλαμβάνει και τις παραπάνω.

Ορισμός. Μέτρο κινδύνου (Risk Measure – RM) θα ονομάζεται οποια συνάρτηση $\rho : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Σχόλιο. Προφανώς δεδομένου κάποιου τέτοιου ρ, η x (ισοδύναμα βάσει των παραπάνω η σχετιζόμενη στο $\mathbb{R}$ κατανομή του x) ανάγεται στον "εκτεταμένο" πραγματικό αριθμό $\rho(x)$. Το ερώτημα που προφανώς προκύπτει αφορά στις ιδιότητες αυτής της αναγωγής ως προς την αναπαράσταση του "κινδυνώδους". Δηλαδή το εάν το $\rho(x)$ περιέχει την πληροφορία που βρίσκεται στην κατανομή του x για την επίλυση ζητημάτων όπως τα παραπάνω (π.χ. βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου, ρύθμισης, κ.ο.κ.). Πριν προσεγγίσουμε αυτό το ερώτημα, επισημαίνουμε ότι μέσω οποιουδήποτε τέτοιου ρ επιτυγχάνεται η απαλοιφή της ασάφειας. Π.χ. αν το ρ αναπαριστά το "κινδυνώδες", τότε αν $\rho(x) < \rho(y)$ (και εφόσον ο υπολογισμός των $\rho(x)$ και $\rho(y)$ είναι απλός), το x είναι λιγότερο κινδυνώδες του y. □

Σχόλιο. Το να αποκλείσουμε από τον ορισμό συναρτήσεις που θα μπορούσαν να αποδώσουν και την τιμή $-\infty$, αφορά στο ζήτημα της χρήσης του ρ για βέλτιστη επιλογή. Σε τέτοιες περιπτώσεις τα σχετικά προβλήματα βελτιστοποίησης θα ήταν δυνατόν να καθίστανται "προβληματικά". □

Έτσι π.χ. το ζήτημα της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου, δεδομένης της χρήσης κάποιου ρ, θα μπορούσε να πάρει την μορφή

[*]
$$\min_{(\lambda_i)_{i=1,\dots,k}} \rho\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right)$$
υπό $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ και άλλους περιορισμούς

ενώ το ζήτημα π.χ. της υποχρεωτικής διακράτησης ρευστών διαθεσίμων από τους ρυθμιστές θα μπορούσε να συναρτάται με την τιμή $\rho^*(X)$ για κάποιο ρ^* που έχει κατά κάποιο τρόπο επιλεγεί από τις ρυθμιστικές αρχές (μάλιστα είναι δυνατόν τέτοιοι ρυθμιστικοί περιορισμοί να εμφανίζονται και ως περαιτέρω περιορισμοί σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής όπως τα παραπάνω).

Αξιωματική Προσέγγιση στα Μέτρα Κινδύνου

Προφανώς το ζήτημα της επιλογής του ρ για την μετέπειτα επίλυση ζητημάτων όπως τα παραπάνω, συναρτάται άμεσα με το ποια χαρακτηριστικά των κατανομών αναπαρίστανται από το εκάστοτε ρ και την σχέση αυτών των χαρακτηριστικών με το εκάστοτε πρόβλημα. Η αξιωματική προσέγγιση αφορά στην επιλογή του ρ βάσει διαδικασίας που "μοιάζει" με την παρακάτω:

1. Προσδιορίζεται ένα σύνολο από αξιώματα που θεωρούνται "σχετικά" με τα ανάλογα προβλήματα και τα οποία θεωρείται ότι το κάθε επιλέξιμο ρ θα πρέπει να ικανοποιεί.
2. Δεδομένου του 1, προσδιορίζεται το σύνολο από τα επιλέξιμα ρ.
3. Επιλέγεται το ρ που θα χρησιμοποιηθεί από το σύνολο των επιλέξιμων.

Προφανώς από τα παραπάνω το βήμα 1 δεν δίνει κάποια μονοσήμαντη κατεύθυνση στο πως επιλέγεται το εν λόγω σύνολο από αξιώματα. Στα παρακάτω, θα παρουσιάσουμε ένα σύνολο από αξιώματα ως παράδειγμα αυτής της διαδικασίας, και ανάμεσα στα άλλα με το αν ήδη γνωστά μέτρα κινδύνου ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα, χωρίς να ασχοληθούμε με το γιατί αυτά μπορεί να επηρεάζονται. Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να βρουν στις Ref2 και Ref5 παρακάτω λόγους αυτής της επιλογής, λόγους για τους οποίους κάποια από αυτά να μην συνάδουν απολύτως π.χ. με προβλήματα ρύθμισης, άλλα σύνολα από αξιώματα, κ.ο.κ. Η ενδελεχής εξέταση τέτοιων ζητημάτων εκφεύγει του αντικειμένου μας και του εισαγωγικού χαρακτήρα των διαλέξεων.

Coherent Μέτρα Κινδύνου

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με ζητήματα που άπτονται του βήματος 2 παραπάνω, και ειδικότερα με το αν τρία μέτρα κινδύνου (τουλάχιστον δύο εκ των οποίων μας είναι ήδη γνωστά) ικανοποιούν ένα σύνολο από αξιώματα που ορίζει αυτά που αναφέρονται Coherent μέτρα κινδύνου (θα σχολιάσουμε επίσης και σχετικά ζητήματα υπολογισμού σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής). Πριν δώσουμε τον σχετικό ορισμό κάνουμε τις παρακάτω χρήσιμες εννοιολογικές διευκρινήσεις.

Θυμόμαστε ότι μια τυχαία μεταβλητή x είναι επί της ουσίας "κατάλληλη" πραγματική συνάρτηση ορισμένη επί συνόλου Ω που αναπαριστά τα "στοιχειώδη ενδεχόμενα πειράματος τύχης", $x: \Omega \to \mathbb{R}$. Έστω αν x, y τυχαίες μεταβλητές και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: [*]

α. $x \leq y$ ανν (αν και μόνο αν) $x(\omega) \leq y(\omega), \forall \omega \in \Omega$.

β. $x = \lambda_1$ ανν $x(\omega) = \lambda_1 \; \forall \omega \in \Omega$.

γ. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ είναι τυχαία μεταβλητή που ορίζεται σημειακά, δηλαδή $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\omega) := \lambda_1 x_1(\omega) + \lambda_2 x_2(\omega), \forall \omega \in \Omega$.

Ορισμός. Ένα μέτρο κινδύνου ρ θα αναφέρεται Coherent ανν ικανοποιεί όλες τις παρακάτω ιδιότητες:

i. (κανονικοποίηση) $\rho(0) = 0$.

ii. (θετική ομογένεια) $\forall \lambda_1 \geq 0$, $\rho(\lambda_1 x) = \lambda_1 \rho(x)$.

iii. (μονοτονία) αν $x \leq y$ τότε $\rho(x) \geq \rho(y)$.

[*] Κάποια από τα παρακάτω μπορούν να γενικευθούν επιτρέποντας την ισχύ τους σε υποσύνολα του Ω μοναδιαίας πιθανότητας, με την συνοδευόμενη γενίκευση της

iv. (υποπροσθετικότητα) $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$.

v. (συναλλοίωση ως προς την εισαγωγή ρευστών διαθεσίμων)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \rho(X+\lambda) = \rho(X) - \lambda$. $\square$

Σχόλιο. Η i. προφανώς σημαίνει ότι η με βεβαιότητα μηδενική απόδοση (θυμηθείτε την ερμηνεία της X στο γενικό μας υπόβαθρο) συνεπάγεται "μηδενικό κίνδυνο". Η ii. συνεπάγεται ότι είναι εύκολη η διακρίβωση του κινδυνώδους από τον "μοναδιαίο κίνδυνο". Η iii. συνεπάγεται ότι αν ένας τίτλος έχει με βεβαιότητα υψηλότερη απόδοση από άλλον τότε δεν θεωρείται περισσότερο κινδυνώδης. Η v συνεπάγεται ότι η "εισαγωγή ρευστών διαθεσίμων" μειώνει κατά το ίδιο μέγεθος το κινδυνώδες. Η iv συμφωνεί με την αρχή της διαφοροποίησης, ενώ είναι γενικά αμφιλεγόμενο (δείτε την Ref5) το εάν θα πρέπει π.χ. να υιοθετείται από τις ρυθμιστικές αρχές. Επίσης όταν ισχύει συνεπάγεται ότι το ρ είναι κυρτό ως συνάρτηση κάτι το οποίο είναι δυνατόν να διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων βέλτιστης επιλογής. Επιπλέον είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι τα Coherent μέτρα κινδύνου εκφράζονται από κατάλληλες "συναρτήσεις σταθμισμένων κακών ενδεχομένων" και έτσι συνδέονται με την έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο [Ref1].

Τρία μέτρα κινδύνου και εξέταση για το αν το κάθε ένα από αυτά είναι Coherent.

A. Τυπική απόκλιση

Στα παρακάτω θα έχουμε ότι $\mu_X := \mu(X) := \mathbb{E}(X)$ και $\sigma_X := \sigma(X) := \left(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right)^{1/2}$.

Προφανώς το $\sigma : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και επομένως είναι καλώς ορισμένο μέτρο κινδύνου.

ερμηνείας των ιδιοτήτων του ορισμού του Coherent RM.

Επιπλέον έχουμε ότι:

1. $\sigma_0 = 0$

2. αν $\lambda \geq 0$, $\sigma_{\lambda x} = \lambda \sigma_x$ και επομένως το σ ικανοποιεί τις i και ii.

3. Όταν τα σ_x ή/και $\sigma_y = +\infty$ η iv ικανοποιείται τετριμμένα ενώ είναι αδύνατον $\sigma_{x+y} = +\infty$ ενώ $\sigma_x, \sigma_y < +\infty$. Τέλος όταν $\sigma_x, \sigma_y < +\infty$ τότε επειδή το $\sigma(\cdot)$ είναι νόρμα στον χώρο των τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(x^2) < +\infty$ ικανοποιεί την iv. Επομένως σε κάθε περίπτωση το $\sigma(\cdot)$ είναι υποπροσθετικό μέτρο κινδύνου. Όταν το $\sigma(x) < +\infty$, $\forall x$ στην σχετική συλλογή τότε στα πλαίσια του [*] (αυτό θα συμβαίνει στα πλαίσια αυτού του προβλήματος αν $\sigma(x_i) < +\infty$ $\forall i = 1, \dots, k$) και εφόσον οι περιορισμοί είναι οι "συνήθεις" αναπτύσσουμε την κατά Markowitz ανάλυση-mean variance, η αναλυτική επιτυχία της οποίας εν πολλοίς οφείλεται στην iv και την μορφή των "συνήθων" περιορισμών. Αν π.χ. $\sigma(x_i) = +\infty$ $\forall i = 1, \dots, k$ τότε το κριτήριο δεν μπορεί να "ξεχωρίσει" μεταξύ των διαθέσιμων χαρτοφυλακίων.

4. Έχουμε ότι αν $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_{x+\lambda_1} = \sigma_x$ οπότε το $\sigma(\cdot)$ δεν ικανοποιεί την v.

[Παρατηρήστε όμως ότι το μετασχηματισμένο κριτήριο $\sigma^*(\cdot)$, όπου $\sigma^*_x := \sigma_x - \mu_x$ την ικανοποιεί αφού $\sigma^*_{x+\lambda_1} = \sigma_{x+\lambda_1} - \mu_{x+\lambda_1} = \sigma_x - \mu_x - \lambda_1 = \sigma^*_x - \lambda_1$.]

5. Θεωρούμε το εξής παράδειγμα. Έστω $x = c < 0$ με π.θ. 1,

$$y = \begin{cases} 0 & \text{με π.θ. } 1/2 \\ 1 & \text{με π.θ. } 1/2 \end{cases}.$$ Έχουμε ότι $x \leq y$ αλλά $0 = \sigma_x < \left(1/2 - 1/4\right)^{1/2} = 1/2 = \sigma_y$. Επομένως γενικά το $\sigma(\cdot)$ δεν ικανοποιεί την iii.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το $\sigma(\cdot)$ θα ικανοποιεί την iii όταν η κατανομή κάθε τίτλου στην σχετική συλλογή ανήκει στην οικογένεια που αποτελείται από τις λεγόμενες ελλειπτικές κατανομές με πεπερασμένη διακύμανση (Elliptical Distributions with finite variance), υπο-οικογένεια της οποίας είναι αυτή των κανονικών κατανομών. Έχουμε όμως ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά αποδόσεων κατηγοριών από τίτλους, σε όχι αναγκαστικά υψίσυχνες παρατηρήσεις, δεν συνάδουν με ιδιότητες της εν λόγω οικογένειας, ακόμη και για λογαριθμικές αποδόσεις. □

Συνεπώς το $\sigma(\cdot)$ δεν είναι γενικά Coherent.

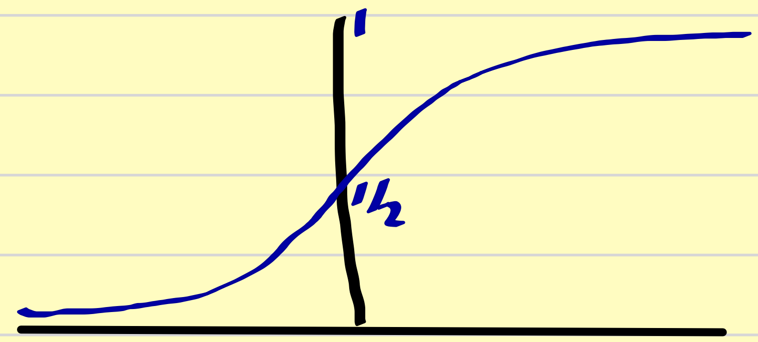
B. Value at Risk (VaR)

Προκειμένου για την κατασκευή του VaR μας χρειάζονται οι παρακάτω ενδιάμεσες έννοιες.

Δεδομένης της Law Invariance έχουμε ότι για την κατανομή της x ορίζεται αμφιμονοσήμαντα η αθροιστική της συνάρτηση, η οποία και την αναπαριστά, ως $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F_x(z) := P(x \leq z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Π.χ. αν $x \sim N(0,1)$, τότε το γράφημα της F_x μοιάζει με το παρακάτω



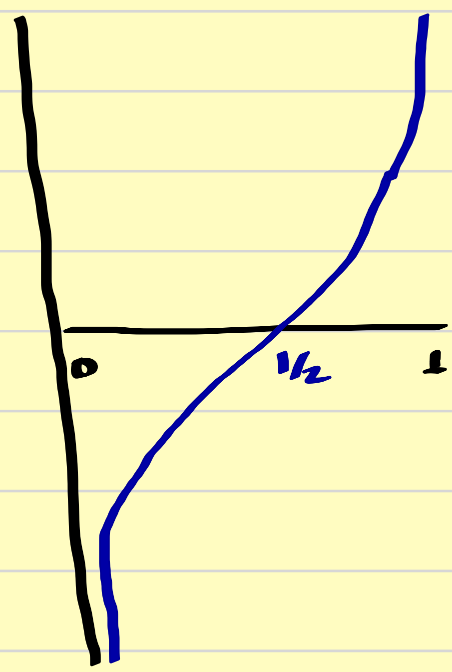
Δεδομένης της F_x είναι δυνατόν να οριστεί η γενικευμένη αντίστροφος της, $q_x : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$q_x(\alpha) := \inf_{z \in \mathbb{R}} \{ F(z) \geq \alpha \}.$$

Η q_x είναι πάντα καλώς ορισμένη, αναπαριστά και αυτή την κατανομή της X και ονομάζεται συνάρτηση ποσοστημορίων (quantile function) της (κατανομής της) X. Είναι επίσης δυνατόν να αποδειχθεί ότι η παραπάνω κατασκευή έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $q_0(\alpha)=0$, $\forall \alpha\in(0,1)$.
2. αν $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$ και $\alpha_1>\alpha_2 \Rightarrow q_X(\alpha_1)\geq q_X(\alpha_2)$.
3. αν $X\geq Y$ τότε $q_X(\alpha)\geq q_Y(\alpha)$, $\forall\alpha\in(0,1)$.
4. αν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ τότε $q_{\lambda_1 X+\lambda_2}(\alpha)=\lambda_1 q_X(\alpha)+\lambda_2$ $\forall\alpha\in(0,1)$.

5. αν η F 1-1, τότε $q_X=F^{-1}$. Οπότε π.χ. όταν $X\sim N(0,1)$ τότε βάσει του παραπάνω γραφήματος, το γράφημα της q_X θα "μοιάζει" με το παρακάτω



6. Για δεδομένο $\alpha\in(0,1)$ το $q_X(\alpha)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η X αν δεν συμβούν τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν στις τιμές της X, που είναι μικρότερες της $q_X(\alpha)$, [illegible] και στο σύνολο των οποίων αποδίδεται πιθανότητα μικρότερη του α.

Ορισμός. Δεδομένου επιπέδου σημαντικότητας $\alpha\in(0,1)$, ορίζεται το $VaR_X(\alpha):=-q_X(\alpha)$. (Επίσης για λόγους σύγκρισης ορίζουμε και παραλλαγή του παραπάνω ως: $VaR^*_X(\alpha):=\mu_X-q_X(\alpha)$, όπου $\mu_X\in\mathbb{R}$)

Σχόλια:

1. Το $VaR_x(\alpha) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in (0,1)$ και για κάθε συνεχή μεταβλητή x, και προφανώς είναι καλώς ορισμένο μέτρο κινδύνου.
2. Εξαρτάται από την επιλογή του α. Ως γνωστόν το α "συνήθως" επιλέγεται ως 0.1 ή 0.05 ή 0.01.
3. Βάσει της προηγούμενης ερμηνείας του $q_x(\alpha)$, το $VaR_x(\alpha)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέγιστη "απώλεια" αν δεν συμβούν τα "κακά" ενδεχόμενα που αντιστοιχούν σε τιμές της x ίσες με $q_x(u)$, $\forall u<\alpha$. Εφόσον όπως παρατηρήθηκε προηγουμένως κάθε συνεκτικό μέτρο κινδύνου συνδέεται με κάποιου είδους αποστροφή στον κίνδυνο, και επειδή η αποστροφή στον κίνδυνο δεν φαίνεται να συνάδει με την αγνόηση τέτοιων ενδεχομένων, υποψιαζόμαστε ότι γενικά το VaR δεν θα είναι συνεκτικό.
4. Αν $\sigma_x, \mu_x \in \mathbb{R}$ τότε $z_x := \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \iff x = \sigma_x z_x + \mu_x$ οπότε βάσει της 4 παραπάνω $q_x(\alpha) = \sigma_x q_{z_x}(\alpha) + \mu_x$, και συνεπώς

$$VaR_x^*(\alpha) = \mu_x - q_x(\alpha) = \mu_x - q_{z_x}(\alpha) z_x - \mu_x = -q_{z_x}(\alpha)\cdot \sigma_x .$$

Όταν η κατανομή της x προσδιορίζεται απολύτως από τα μ_x και σ_x (και κάτι τέτοιο είναι αληθές για την οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών με πεπερασμένη διακύμανση), και το $\alpha : q_{z_x}(\alpha)<0$, (π.χ. για την προηγούμενη οικογένεια αυτό ισχύει $\forall \alpha<1/2$), τότε το $q_{z_x}(\alpha)$ είναι απλώς αρνητική σταθερά σε προβλήματα βελτιστοποίησης όπως το [*] και επομένως η βέλτιστη επιλογή βάσει του $VaR^*(\alpha)$ θα ταυτίζεται με αυτή βάσει του $\sigma(\cdot)$. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικότερα.

5. Εξαιτίας του 2 θα έχουμε ότι αν $\alpha_1<\alpha_2 \Rightarrow VaR_x(\alpha_1) \geq VaR_x(\alpha_2)$
6. Εξαιτίας του 1, $VaR_0(\alpha) = -q_0(\alpha) = 0$ $\forall \alpha\in(0,1)$ επομένως η i. ικανοποιείται.
7. Εξαιτίας του 3, αν $x \leq y \Rightarrow q_x(\alpha)\leq q_y(\alpha) \Rightarrow -q_x(\alpha)\geq -q_y(\alpha) \Rightarrow VaR_x(\alpha)\geq VaR_y(\alpha)$ $\forall\alpha\in(0,1)$ επομένως η iii ικανοποιείται.

8. Εξαιτίας του 4, αν $\lambda_1 \geq 0$, $q_{\lambda_1 x}(a) = \lambda_1 q_x(a)$ $\forall a \in (0,1)$ οπότε $-q_{\lambda_1 x}(a) = \lambda_1(-q_x(a)) \Leftrightarrow VaR_{\lambda_1 x}(a) = \lambda_1 VaR_x(a)$ $\forall a \in (0,1)$ οπότε η ii ικανοποιείται.

9. Εξαιτίας του 4, $\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $q_{x+\lambda_2}(a) = q_x(a) + \lambda_2$, $\forall a \in (0,1)$ οπότε $-q_{x+\lambda_2}(a) = -q_x(a) - \lambda_2 \Leftrightarrow VaR_{x+\lambda_2}(a) = VaR_x(a) - \lambda_2$, $\forall a \in (0,1)$ επομένως και η iv ικανοποιείται.

10. Αν ικανοποιούταν γενικά και η iii το VaR θα ήταν coherent. Θεωρούμε το παρακάτω παράδειγμα:

$$\text{Έστω } x = \begin{cases} -9 & \text{με πιθ. } 0.09 \\ 1 & \text{με πιθ. } 0.91 \end{cases} \quad \text{και}$$

y ανεξάρτητη της x με

$$y = \begin{cases} -9 & \text{με πιθ. } 0.09 \\ 1 & \text{με πιθ. } 0.91 \end{cases}.$$

Έχουμε βάση του ορισμού της συνάρτησης ποσοστημορίων ότι

$$q_x(a) = q_y(a) = \begin{cases} -9, & 0 < a \leq 0.09 \\ 1, & 0.09 < a < 1 \end{cases}$$

Επομένως $VaR_x(0.1) = VaR_y(0.1) = -q_x(0.1) = -1$.

Εξαιτίας της ανεξαρτησίας και των παραπάνω ορισμών

$$x+y = \begin{cases} -18 & \text{με πιθ. } 0.0081 \\ -8 & \text{με πιθ. } 0.1638 \\ 2 & \text{με πιθ. } 0.8281 \end{cases}, \text{ και επομένως}$$

$$q_{x+y}(a) = \begin{cases} -18 & 0 < a \leq 0.0081 \\ -8 & 0.0081 < a \leq 0.1638 \\ 2 & 0.1638 < a < 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς $VaR_{x+y}(0.1) = -q_{x+y}(0.1) = 8$ και άρα

$$VaR_{x+y}(0.1) = 8 > -2 = VaR_x(0.1) + VaR_y(0.1).$$

Επομένως γενικά το VaR δεν είναι υποπροσθετικό. Συνδυάζοντας το παρόν σχόλιο 4 με το σχόλιο 3 για το $\sigma(\cdot)$ βλέπουμε ότι το VaR* θα είναι υποπροσθετικό αν περιοριστούμε στην οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών με πεπερασμένη διακύμανση $\forall \alpha < 1/2$, αλλά κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικότερα. Επίσης είναι δυνατόν να δειχθεί ότι η μη εγκυρότητα της iv για το VaR εν πολλοίς ευθύνεται για το υπολογιστικά δυσχερές της χρήσης του σε προβλήματα όπως το [x]. $\square$

Συμπερασματικά, γενικά το VaR δεν είναι coherent.

Σημείωση: Οι Ref1, Ref2 και Ref5 είναι οι βιβλιογραφικές αναφορές 1, 2 και 5 αντίστοιχα όπως εμφανίζονται στην σύνοψη του μαθήματος.

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε πρώιμη μορφή και σε στάδιο διόρθωσης. Μην τις χρησιμοποιείτε εκτός των διαλέξεων. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος ή παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.